Valikvõistlus

IMO'97 Eesti võistkonna kandidaatidele

Tartus, 28.–29. aprillil 1997. a.

Lahendamisaega on kummalgi päeval 4 tundi 30 minutit.
Selgitusi ülesannete tekstide kohta antakse esimese 30 minuti jooksul.
Iga ülesande õige ja korrektselt vormistatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvuteid kasutada ei lubata.

Esimene päev

1. Olgu A_1, B_1 ja C_1 vastavalt kolmnurga ABC külgede BC, AC ja AB keskpunktid ning A_2, B_2 ja C_2 vastavalt tippudest A, B ja C tõmmatud kõrguste keskpunktid. Tõesta, et sirged A_1A_2, B_1B_2 ja C_1C_2 lõikuvad ühes punktis.

2. Tõesta, et mistahes positiivsete reaalarvude a_1, a_2, …, a_n korral kehtib võrratus

$$\frac{1}{\frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{1+a_2}+\ldots+\frac{1}{1+a_n}}-\frac{1}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}\geqslant\frac{1}{n}\,.$$

   Millisel juhul kehtib siin võrdus?

3. Tantsupeole koguneb n noormeest, igaüks koos oma tütarlapsega. Peo algul istuvad kõik tüdrukud ringikujulise saali seina äärde ja esimesel tantsul palub iga noormees ühe neist tantsima. Pärast iga tantsu saadavad noormehed oma partnerid kohale tagasi ning järgmisele tantsule palub igaüks neist vastupäeva järgmise tütarlapse. Milliste n väärtuste korral saab tütarlapsed nii paigutada, et iga tantsu ajal tantsiks mõni noormees oma tütarlapsega, kui on teada, et peo jooksul tantsitakse kokku vähemalt n tantsu?

Valikvõistlus

IMO'97 Eesti võistkonna kandidaatidele

Tartus, 28.–29. aprillil 1997. a.

Lahendamisaega on kummalgi päeval 4 tundi 30 minutit.
Selgitusi ülesannete tekstide kohta antakse esimese 30 minuti jooksul.
Iga ülesande õige ja korrektselt vormistatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvuteid kasutada ei lubata.

Teine päev

4. a) Kas on võimalik jaotada kõik lõigule $[0, 1]$ kuuluvad reaalarvud kaheks ühisosata hulgaks A ja B ning defineerida *pidev* funktsioon $f(x)$ nii, et iga arvu x korral hulgast A arv $f(x)$ kuuluks hulka B ja vastupidi, iga arvu x korral hulgast B arv $f(x)$ kuuluks hulka A?

   b) Sama küsimus, kui lõigu $[0, 1]$ asemel võtta poollõik $[0, 1)$.

5. Kõõlnelinurga $ABCD$ külgedele AB, BC, CD ja DA nelinurgast väljapoole konstrueeritakse ristkülikud, mille kõrgused on võrdsed vastavalt nelinurga külgede CD, DA, AB ja BC pikkustega. Tõesta, et nelinurk, mille tippudeks on nende nelja ristküliku keskpunktid, on ristkülik.

6. On teada, et mistahes täisarvu $k > 1$ korral leidub arvude $k+1$, $k+2$, $\ldots$, $2k-1$ hulgas vähemalt üks algarv. Leia kõik positiivsed täisarvud n, millel on järgmine omadus: iga täisarv $m > 1$, mis on väiksem arvust n ja sellega ühistegurita, on algarv.