

Отборный конкурс

кандидатам в команду Эстонии на ММО'96

Тарту, 13–14 апреля 1996 г.

Первый день

Время для решения в каждый день 4 часа 30 минут.

Пояснения по текстам задач даются в течение первых 30 минут.

Верное и корректно оформленное решение каждой задачи дает 7 баллов.

Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Известно, что x , y и $\frac{x^2 + y^2 + 6}{xy}$ — положительные целые числа.

Доказать, что $\frac{x^2 + y^2 + 6}{xy}$ является кубом некоторого целого числа.

2. Пусть в треугольнике длины сторон a , b , c , величины их противолежащих углов α , β , γ и радиус вписанной окружности r . Доказать, что $a \sin \alpha + b \sin \beta + c \sin \gamma \geq 9r$.

3. Найти все функции f , принимающие вещественные значения и удовлетворяющие при всех вещественных x следующим условиям:

а) $f(x) = -f(-x)$;

б) $f(x+1) = f(x) + 1$;

в) $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^2}f(x)$ при $x \neq 0$.

Отборный конкурс

кандидатам в команду Эстонии на ММО'96

Тарту, 13–14 апреля 1996 г.

Второй день

Время для решения в каждый день 4 часа 30 минут.

Пояснения по текстам задач даются в течение первых 30 минут.

Верное и корректно оформленное решение каждой задачи дает 7 баллов.

Пользоваться калькулятором не разрешается.

4. Доказать, что многочлен $P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{x^n}{n!}$ при четном n не имеет корней, а при нечетном n имеет ровно один корень.
5. Пусть H — точка пересечения высот тупоугольного треугольника ABC , а A_1, B_1, C_1 — произвольные точки на его сторонах BC, AC, AB соответственно. Доказать, что касательные, проведенные из точки H к окружностям с диаметрами AA_1, BB_1 и CC_1 , имеют равные длины.
6. Каждая грань куба разделена на $n \times n$ равных квадратов. Назовем вершины этих квадратов *узлами* — итого на каждой грани куба $(n+1)^2$ узлов.
 - а) Существует ли при $n = 2$ замкнутая ломаная линия, идущая по сторонам квадратов и проходящая через все узлы ровно один раз?
 - б) Доказать, что любая такая ломаная линия (при произвольном n) разбивает поверхность куба на две части одинаковой площади.