Valikvõistlus

IMO'96 Eesti võistkonna kandidaatidele

Tartus, 13.–14. aprillil 1996. a.

Ülesannete lahendused

Esimene päev

1. Olgu $n = \dfrac{x^2+y^2+6}{xy}$ positiivne täisarv. Vaatleme võrrandi

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - nxy + 6 = 0 \tag{1}$$

sellist naturaalarvulist lahendit (x_0, y_0), mille korral x_0 väärtus on võimalikest vähim ja y_0 väärtus on omakorda selle x_0 jaoks võimalikest vähim — siis ilmselt $x_0 \leqslant y_0$. Vahetu kontroll näitab, et $(x_0, nx_0 - y_0)$ ja $(nx_0 - y_0, x_0)$ on samuti võrrandi (1) lahendid ning $nx_0 - y_0 > 0$, kuna vastasel korral oleks $f(x_0, nx_0 - y_0) > 0$. Sellest järeldub arvude x_0 ja y_0 valiku tõttu, et $x_0 \leqslant nx_0 - y_0$ ja $y_0 \leqslant nx_0 - y_0$. Võrdusest $f(x_0, nx_0 - y_0) = 0$ saame $y_0(nx_0 - y_0) = x_0^2 + 6$, kust $y_0^2 \leqslant x_0^2 + 6$. Kui nüüd $y_0 \geqslant x_0 + 1$, siis peab olema $1 \leqslant x_0 < y_0 \leqslant 3$, ent ükski paaridest $(1,2)$, $(1,3)$ ja $(2,3)$ ei rahulda võrrandit (1). Niisiis $y_0 = x_0$ ning võrdusest $f(x_0, y_0) = 0$ saame $(n-2)x_0^2 = 6$, kust ainsa võimalusena $x_0 = y_0 = 1$ ja $n = 8$.

2. Olgu kolmnurga kõrgused h_a, h_b ja h_c ning pindala S. Kasutades seoseid

$$S = \frac{bc\sin\alpha}{2} = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2}\,,$$

saame

$$a\sin\alpha = \frac{a\cdot 2S}{bc} = \frac{2a\cdot S^2}{bc\cdot S} = \frac{a\cdot bh_b\cdot ch_c}{bc\cdot ah_a} = \frac{h_bh_c}{h_a}\,;$$

analoogiliselt $b\sin\beta = \dfrac{h_ah_c}{h_b}$ ja $c\sin\gamma = \dfrac{h_ah_b}{h_c}$. Kasutame nüüd aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vahelist võrratust:

$$a\sin\alpha + b\sin\beta + c\sin\gamma = \frac{h_bh_c}{h_a} + \frac{h_ah_c}{h_b} + \frac{h_ah_b}{h_c} \geqslant 3\sqrt[3]{h_ah_bh_c}\,.$$

Võrdustest $2S = (a+b+c)r = ah_a = bh_b = ch_c$ saame kergesti seose $\dfrac{1}{h_a} + \dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c} = \dfrac{1}{r}$, mille vasakule poolele uuesti aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vahelist võrratust rakendades saame $\dfrac{1}{r} \geqslant 3\sqrt[3]{\dfrac{1}{h_a h_b h_c}}$, ehk $\sqrt[3]{h_a h_b h_c} \geqslant 3r$.

3. Vaatleme funktsiooni $g(x) = f(x) - x$. On lihtne näha, et funktsioon $g(x)$ rahuldab järgmisi seoseid:
   A) $g(x) = -g(-x)$;
   B) $g(x+1) = g(x)$;
   C) $g\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{x^2} g(x)$, kui $x \neq 0$.

   Tingimustest A) ja B) järeldub, et $g(0) = g(-1) = 0$. Mistahes $x \neq 0, -1$ korral võime aga sooritada järgmised teisendused:

$$\begin{aligned} g(x) &= g(x+1) = (x+1)^2 g\Big(\frac{1}{x+1}\Big) = \\ &= -(x+1)^2 g\Big(-\frac{1}{x+1}\Big) = -(x+1)^2 g\Big(1 - \frac{1}{x+1}\Big) = \\ &= -(x+1)^2 g\Big(\frac{x}{x+1}\Big) = -(x+1)^2 \cdot \frac{x^2}{(x+1)^2} g\Big(\frac{x+1}{x}\Big) = \\ &= -x^2 g\Big(1 + \frac{1}{x}\Big) = -x^2 g\Big(\frac{1}{x}\Big) = -g(x)\ . \end{aligned}$$

   Seega kehtib võrdus $g(x) = 0$ suvalise reaalarvu x korral, s.t. ainus nõutavate omadustega funktsioon on $f(x) = x$.

Teine päev

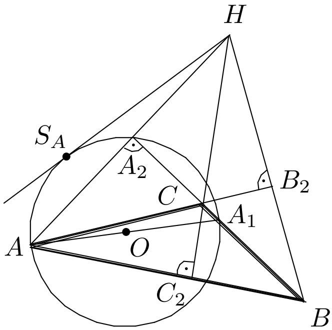
4. Olgu n paarisarv. Siis peab polünoomil $P_n(x)$ leiduma miinimum mingis punktis x_0, kus $P_n'(x_0) = 0$. Kuid

$$P_n'(x) = 1 + x + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = P_{n-1}(x)$$

ning seega $x_0 \neq 0$ ja $P_n(x_0) = P_n'(x_0) + \dfrac{x_0^n}{n!} > 0$. Niisiis on polünoomi $P_n(x)$ minimaalne väärtus $P_n(x_0) > 0$, see aga tähendab, et $P_n(x_0) > 0$ iga x väärtuse korral.

Olgu nüüd n paaritu arv. Kuna $P_n'(x) = P_{n-1}(x)$ ja $n-1$ on paarisarv, siis vastavalt eelpool tõestatule $P_n'(x) > 0$ mistahes x korral, s.t. funktsioon $P_n(x)$ on kogu reaalsirgel rangelt kasvav. Et $\lim\limits_{x\to\infty} P_n(x) = \infty$ ja $\lim\limits_{x\to-\infty} P_n(x) = -\infty$, siis on polünoomil $P_n(x)$ täpselt üks nullkoht.

5. Olgu A_2, B_2, C_2 vastavalt kolmnurga ABC tippudest A, B, C tõmmatud kõrguste aluspunktid ning S_A, S_B, S_C ülesande tekstis mainitud puutujate puutepunktid vastavate ringjoontega (mille diameetriteks on AA_1, BB_1 ja CC_1). Et $\angle AA_2A_1 = 90°$, siis asub punkt A_2 ringjoonel diameetriga AA_1, seega vastavalt teoreemile puutujast ja lõikajast $|HS_A|^2 = |HA_2| \cdot |HA|$ (vt. joonist). Analoogiliselt saame $|HS_B|^2 = |HB_2| \cdot |HB|$. Et AA_2B_2B on kõõlnelinurk, mille ümberringjoone diameetriks on AB, siis $|HA_2| \cdot |HA| = |HB_2| \cdot |HB|$ ning seega $|HS_A| = |HS_B|$. Samal viisil tõestame, et $|HS_B| = |HS_C|$.



6. a) Sellist murdjoont ei leidu. Jagame sõlmed kahte hulka:

A : kuubi tipud ning selle tahkude keskpunktid — kokku 14 punkti;

B : kuubi servade keskpunktid — kokku 12 punkti.

Kirjeldatud murdjoonel peaksid asuma vaheldumisi tipud hulkadest A ja B — et aga hulkades A ja B on erinev arv punkte, ei saa sellist murdjoont olla.

b) Olgu ruutude küljepikkus 1. Tõestame, et mööda ruutude külgi kulgeva kinnise murdjoonega piiratud kujundi pindala S avaldub selle ümbermõõdu P ja sisepiirkonnas asuvate sõlmede arvu s kaudu kujul $S = \dfrac{P + 2s - 2}{2}$.

Kasutame induktsiooni kujundi pindala S järgi. Vähima võimaliku kujundi ($S = 1$, $P = 4$ ja $s = 0$) puhul tõestatav seos kehtib. Vaatleme nüüd kujundit ümbermõõduga P, pindalaga S ning sisepiirkonnas asuvate sõlmede arvuga s. Jaotame selle kaheks kujundiks murdjoonega, mis kulgeb mööda ruutude külgi ja ühendab kaht kujundi rajajoonel asuvat sõlme ilma teisi selliseid sõlmi läbimata. Olgu seejuures tekkivad kujundid pindaladega S_1 ja S_2, ümbermõõtudega P_1 ja P_2 ning paiknegu nende sisepiirkonnas vastavalt s_1 ja s_2 sõlme. Siis induktsiooni eelduse kohaselt $S_1 = \dfrac{P_1 + 2s_1 - 2}{2}$ ja $S_2 = \dfrac{P_2 + 2s_2 - 2}{2}$. Kui kujundit kaheks jaotav murdjoon läbib selle sisepiirkonnas n sõlme, siis ilmselt $P = P_1 + P_2 - 2(n + 1)$ ja $s = s_1 + s_2 + n$. Leiame pindala S väärtuse:

$$
\begin{aligned}
S &= S_1 + S_2 = \frac{P_1 + 2s_1 - 2 + P_2 + 2s_2 - 2}{2} = \\
&= \frac{(P_1 + P_2 - 2(n{+}1)) + 2(s_1{+}s_2{+}n) - 2 + 2(n{+}1) - 2n - 2}{2} = \\
&= \frac{P + 2s - 2}{2}\,.
\end{aligned}
$$

Sellega on ülaltoodud valem tõestatud. Kuna ülesande tingimusi rahuldav murdjoon jaotab kuubi pinna kaheks võrdse ümbermõõduga osaks, mille sisepiirkonnas ei ole ühtegi sõlme (joon läbib kõik punktid), siis on ka nende osade pindalad võrdsed.