

Valikvõistlus

IMO'96 Eesti võistkonna kandidaatidele

Tartus, 13.–14. aprillil 1996. a.

Esimene päev

Lahendamisaega on kummalgi päeval 4 tundi 30 minutit.

Selgitusi ülesannete tekstide kohta antakse esimese 30 minuti jooksul.

Iga ülesande õige ja korrektselt vormistatud lahendus annab 7 punkti.

Taskuarvuteid kasutada ei lubata.

1. On teada, et x , y ja $\frac{x^2 + y^2 + 6}{xy}$ on positiivsed täisarvud. Tõesta, et $\frac{x^2 + y^2 + 6}{xy}$ on mingi täisarvu kuup.
2. Olgu kolmnurga külgede pikkused a , b ja c , nende vastasnurkade suurused α , β ja γ ning kolmnurga siseringjoone raadius r . Tõesta, et $a \sin \alpha + b \sin \beta + c \sin \gamma \geq 9r$.
3. Leia kõik reaalarvuliste väärtustega funktsioonid f , mis rahuldavad iga reaalarvu x korral järgmisi tingimusi:
 - a) $f(x) = -f(-x)$;
 - b) $f(x + 1) = f(x) + 1$;
 - c) $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^2}f(x)$, kui $x \neq 0$.

Valikvõistlus

IMO'96 Eesti võistkonna kandidaatidele

Tartus, 13.–14. aprillil 1996. a.

Teine päev

Lahendamisaega on kummalgi päeval 4 tundi 30 minutit.

Selgitusi ülesannete tekstide kohta antakse esimese 30 minuti jooksul.

Iga ülesande õige ja korrektset vormistatud lahendus annab 7 punkti.

Taskuarvuteid kasutada ei lubata.

4. Tõesta, et polünoomil $P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{x^n}{n!}$ ei ole nullkohti, kui n on paarisarv, ja on täpselt üks nullkoht, kui n on paaritu arv.
5. Olgu H nürinurkse kolmnurga ABC kõrguste lõikepunkt ning A_1 , B_1 ja C_1 vastavalt kolmnurga külgedel BC , AC ja AB võetud suvalised punktid. Tõesta, et ringjoontele diameetritega AA_1 , BB_1 ja CC_1 punktist H tõmmatud puutujad on võrdse pikkusega.
6. Kuubi iga tahk on jaotatud $n \times n$ ühesuuruseks ruuduks. Nimetame nende ruutude tippe *sõlmedeks* — seega on kuubi igal tahul $(n + 1)^2$ sõlme.
 - a) Kas $n = 2$ korral leidub kinnine murdjoon, mis kulgeb ruutude külgi mööda ning läbib kõiki sõlmi täpselt üks kord?
 - b) Tõesta, et iga niisugune murdjoon (suvalise n korral) jagab kuubi pinna kaheks võrdse pindalaga osaks.