Отборный конкурс

кандидатам в команду Эстонии на ММО'95

Тарту, 5–6 мая 1995 г.

Первый день

Время для решения в каждый день 4 часа 30 минут.
Пояснения по текстам задач даются в течение первых 30 минут.
Верное и корректно оформленное решение каждой задачи дает 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Найти все функции $f(n)$, определенные при всех неотрицательных целых n, принимающие только целые неотрицательные значения и удовлетворяющие при каждом целом неотрицательном n условию $f(f(n)) + f(n) = 2n + 3$.

2. На плоскости даны три вершины A, B, C параллелограмма $ABCD$. Как построить четвертую вершину D этого параллелограмма, пользуясь только циркулем фиксированного радиуса? (Радиус циркуля заранее не известен; линейкой и другими инструментами пользоваться нельзя.)

3. Сумма квадратов пяти вещественных чисел a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 равна 1. Доказать, что среди них найдутся такие два числа a_i и a_j $(i \neq j)$, что $|a_i - a_j| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

Отборный конкурс

кандидатам в команду Эстонии на ММО'95

Тарту, 5–6 мая 1995 г.

Второй день

Время для решения в каждый день 4 часа 30 минут.
Пояснения по текстам задач даются в течение первых 30 минут.
Верное и корректно оформленное решение каждой задачи дает 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

4. Пусть n — произвольное положительное целое число, а k — положительное целое число, дающее при делении на 4 остаток 1. Доказать, что число

$$C_n^1 + C_n^3 k + C_n^5 k^2 + C_n^7 k^3 + \dots$$

делится на 2^{n-1}. (Здесь C_n^m обозначает число комбинации по m из n элементов и рассматриваемая сумма имеет $\left[\frac{n+1}{2}\right]$ слагаемых.)

5. В баскетбольном турнире участвуют 18 команд. Каждая команда играет по одному матчу с каждой другой командой; ничьих в баскетболе не бывает. Доказать, что по окончании турнира обязательно найдутся три такие команды A, B и C, что каждая из остальных команд проиграла в турнире по крайней мере одной из этих трех.

6. Через точку пересечения высот остроугольного треугольника ABC проведена прямая l, не проходящая через вершины этого треугольника. Доказать, что три прямые, симметричные прямой l относительно прямых, определенных сторонами треугольника ABC, пересекаются в одной точке, лежащей на описанной окружности треугольника ABC.