Valikvõistlus

IMO'95 Eesti võistkonna kandidaatidele

Tartus, 5.–6. mail 1995. a.

Ülesannete lahendused

Esimene päev

1. Vastus: ainus niisugune funktsioon on $f(n) = n + 1$.

   Olgu $f(0) = a$, siis

   $$f(a) = 3 - a \ . \tag{1}$$

   Võrdusest $f(f(a)) + f(a) = 2a + 3$ ja seosest (1) saame nüüd

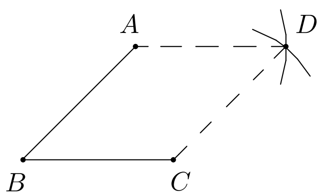
   $$f(3 - a) = 3a \tag{2}$$

   ning võrdusest $f(f(3 - a)) + f(3 - a) = 2 \cdot (3 - a) + 3$ ja seosest (2) omakorda

   $$f(3a) = 9 - 5a \ . \tag{3}$$

   Tingimusest $f(3a) \geqslant 0$ ning seosest (3) leiame nüüd $a = 0$ või $a = 1$. Kui $a = 0$, siis $f(0) = 0$, mis on vastuolus seosega (3). Seega $f(0) = a = 1$ ning induktsiooni kasutades leiame kergesti, et $f(n) = n+1$ iga mittenegatiivse täisarvu n korral.

2. Kui rööpkülik $ABCD$ on romb, mille küljepikkus on võrdne sirkli haarade vahekaugusega, siis on tipu D konstrueerimine lihtne: vt. joonist 1.



Joonis 1

Üldjuhul võime toimida vastavalt järgmisele skeemile:

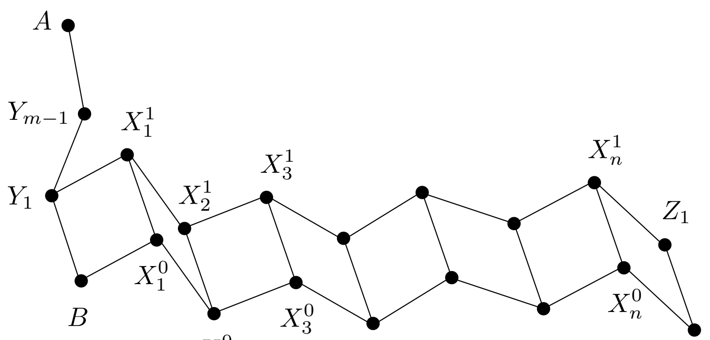
a) Konstrueerime tippu B vastavalt tippudega C ja A ühendavad murdjooned $BX_1^0X_2^0\dots X_n^0C$ ja $BY_1Y_2\dots Y_{m-1}A$, mille iga lüli pikkus on võrdne sirkli haarade vahekaugusega;

b) Konstrueerime järk-järgult murdjooned

$$\begin{aligned}
&Y_1X_1^1X_2^1\dots X_n^1Z_1\ ,\\
&Y_2X_1^2X_2^2\dots X_n^2Z_2\ ,\\
&\dots\\
&Y_{m-1}X_1^{m-1}X_2^{m-1}\dots X_n^{m-1}Z_{m-1}\ ,\\
&AX_1^mX_2^m\dots X_n^mZ_m\ ,
\end{aligned}$$

nagu näidatud joonisel 2 (igal sammul tuleb siin konstrueerida niisuguse rombi neljas tipp, mille küljepikkus on võrdne sirkli haarade vahekaugusega);

c) Viimase murdjoone teine otspunkt Z_m ongi otsitav rööpküliku tipp D.



Joonis 2

3. Üldisust kitsendamata võime eeldada, et $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \dots \leqslant a_5$. Olgu $m = \min\{a_2 - a_1, a_3 - a_2, a_4 - a_3, a_5 - a_4\}$. Siis mistahes indeksite $i > j$ korral $a_i - a_j \geqslant m \cdot (i - j)$. Seega

$$\sum_{i>j}(a_i - a_j)^2 \geqslant m^2 \cdot \sum_{i>j}(i-j)^2 = 50m^2\ .$$

Teiselt poolt aga

$$\sum_{i>j}(a_i - a_j)^2 = 5\sum_i a_i^2 - \Big(\sum_i a_i\Big)^2 \leqslant 5\sum_i a_i^2 = 5\,.$$

Seega $50m^2 \leqslant \sum_{i>j}(a_i - a_j)^2 \leqslant 5$, kust $m^2 \leqslant \dfrac{1}{10}$ ja $m \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

Teine päev

4. Tähistame $S_n = C_n^1 + C_n^3 k + C_n^5 k^2 + C_n^7 k^3 + \ldots$. Newtoni binoomvalemit kasutades saame $n > 2$ korral

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{(1+\sqrt{k})^n - (1-\sqrt{k})^n}{2\sqrt{k}} = \\ &= 2 \cdot \frac{(1+\sqrt{k})^{n-1} - (1-\sqrt{k})^{n-1}}{2\sqrt{k}} + \\ &\qquad + (k-1) \cdot \frac{(1+\sqrt{k})^{n-2} - (1-\sqrt{k})^{n-2}}{2\sqrt{k}} = \\ &= 2S_{n-1} + (k-1)S_{n-2}\,. \end{aligned}$$

   Olgu $k = 4t+1$, siis $S_n = 2S_{n-1} + 4t \cdot S_{n-2}$. Et $S_1 = 1$ jagub ilmselt arvuga $2^0 = 1$ ning $S_2 = 2$ arvuga $2^1 = 2$, saame nüüd induktsiooni abil kergesti veenduda, et mistahes naturaalarvu n korral jagub S_n arvuga 2^{n-1}.

5. Et iga võistkond mängib 17 mängu ning kõikide võistkondade peale kokku on võite samapalju kui kaotusi, peab leiduma võistkond V_1, kes turniiri lõppedes on kaotanud mitte rohkem kui 8 võistkonnale. Olgu G_1 nende võistkondade hulk, kellele V_1 on turniiril kaotanud. Kui hulk G_1 sisaldab ülimalt kaks võistkonda, saame ülesande tingimusi rahuldava kolmiku moodustada võistkonnast V_1 ning hulka G_1 kuuluvatest võistkondadest (lisades neile vajadusel ühe või kaks suvalist võistkonda). Vastasel juhul leiame hulgas G_1 võistkonna V_2, kes on kaotanud mitte rohkem kui 3 samasse hulka kuuluvale võistkonnale. Olgu G_2 nende võistkondade hulk (s.t. võistkondade hulk, kellele on turniiril kaotanud nii V_1 kui ka V_2). Kui nüüd leidub võistkond V_3, kes on võitnud kõiki hulka G_2 kuuluvaid võistkondi, siis saame sobiva kolmiku moodustada võistkondadest

V_1, V_2 ja V_3. Vastasel juhul on vajaliku omadusega hulka G_2 kuuluvad võistkonnad (kui neid on vähem kui kolm, lisame neile vajalikul arvul suvalisi võistkondi).

Märkus: Samal viisil on mistahes naturaalarvu n korral võimalik $(n+2)\cdot 2^{n-1}-2$ võistkonnaga turniiri järel leida n niisugust võistkonda, et kõik ülejäänud võistkonnad on kaotanud vähemalt ühele neist (antud ülesandes $n=3$).

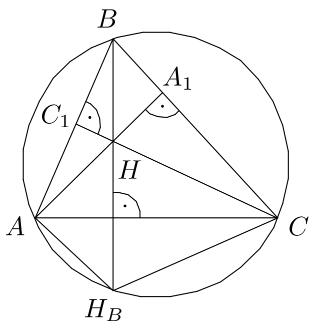
6. Tõestame kõigepealt kaks lemmat:

Lemma 1. *Punktid, mis on sümmeetrilised teravnurkse kolmnurga ABC kõrguste lõikepunktiga H selle kolmnurga külgede suhtes, asuvad kolmnurga ABC ümberringjoonel.*

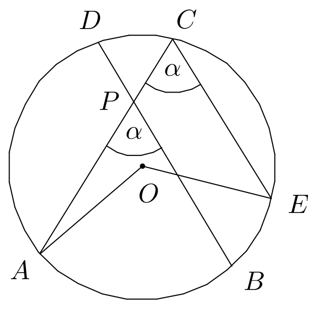
Tõepoolest, olgu H_B punktiga H kolmnurga külje AC suhtes sümmeetriline punkt ning olgu A_1 ja C_1 vastavalt tippudest A ja C tõmmatud kõrguste aluspunktid (vt. joonist 3). Siis kolmnurgad BC_1C ja HA_1C on sarnased, mistõttu

$$\begin{aligned}\angle ABC+\angle AH_BC &= \angle ABC+\angle AHC= \\ &= \angle C_1BC+180^\circ-\angle A_1HC=180^\circ ,\end{aligned}$$

s.t. $ABCH_B$ on kõõlnelinurk, mida oligi tarvis tõestada.



Joonis 3



Joonis 4

Lemma 2. *Olgu $ABCD$ kõõlnelinurk, P selle disgonaalide lõikepunkt ning $\mathcal{C}$ nelinurga $ABCD$ ümberringjoon. Siis* $\angle APB=\dfrac{1}{2}(\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{CD})$, *kus* $\overset{\frown}{AB}$ *ja* $\overset{\frown}{CD}$ *on ringjoone* $\mathcal{C}$ *kaared.*

Tõestuseks võtame ringjoone $\mathcal{C}$ kaarel $\overset{\frown}{BC}$ punkti E nii, et $CE \parallel BD$ (vt. joonist 4). Olgu O ringjoone $\mathcal{C}$ keskpunkt, siis

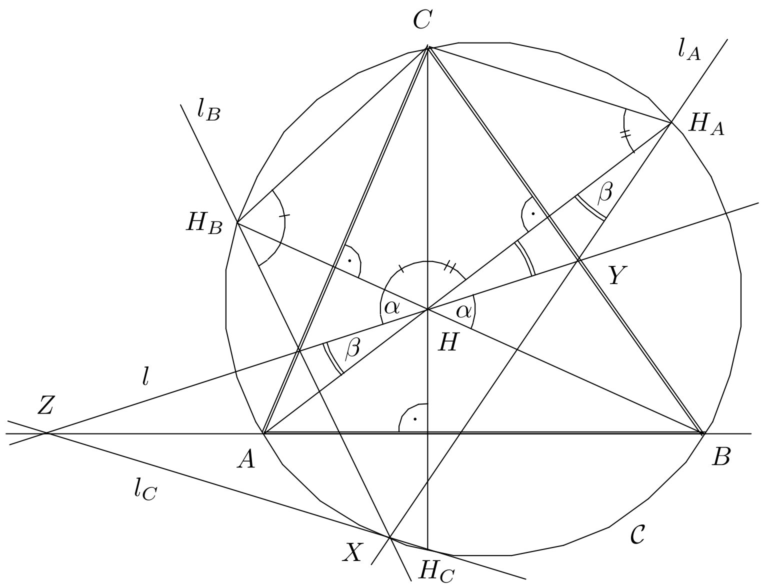
$$\begin{aligned}\angle APB = \angle ACE = \frac{1}{2}\angle AOE = \\ = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BE}) = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD})\ .\end{aligned}$$

Asume nüüd ülesandes esitatud väite tõestamise juurde. Olgu H kolmnurga ABC kõrguste lõikepunkt ning H_A, H_B ja H_C sellega vastavalt kolmnurga külgede BC, CA ja AB suhtes sümmeetrilised punktid. Vastavalt lemmale 1 asuvad need kolm punkti kolmnurga ABC ümberringjoonel $\mathcal{C}$. Sirged l_A, l_B ja l_C, mis on sümmeetrilised ülesandes antud sirgega l vastavalt külgedega BC, CA ja AB määratud sirgete suhtes, läbivad vastavalt punkte H_A, H_B ja H_C.

Sirge l lõikab parajasti kahte kolmnurga ABC külge — olgu need AC ja BC. Olgu X sirgete l_A ja l_B lõikepunkt ning Z sirgete l, l_C ning kolmnurga küljega AB määratud sirge ühine lõikepunkt (juhul kui sirge l on paralleelne kolmnurga küljega AB, võtame punkti Z asemel kaks punkti Z_1 ja Z_2 vastavalt sirgetel l ja l_C; järgnev arutlus sellest ei muutu). Kui punktid X ja H_C langevad kokku, on ülesande väide tõestatud. Vastasel juhul võime üldisust kitsendamata eeldada, et punkt A paikneb punktide Z ja B vahel (nagu joonisel 5 kujutatud). Olgu Y sirge l lõikepunkt küljega BC ning $\alpha = \angle HH_BX = \angle H_BHZ = \angle YHB$, $\beta = \angle XH_AH = \angle H_AHY = \angle AHZ$, siis

$$\begin{aligned}\angle CH_BX + \angle CH_AX &= \alpha + \angle CH_BB + \angle CH_AA + \beta = \\ &= \alpha + \angle CHH_B + \angle CHH_A + \beta = \\ &= \angle ZHY = 180^\circ\end{aligned}$$

ning CH_BXH_A on kõõlnelinurk. Seega asub punkt X kolmnurga ABC ümberringjoonel $\mathcal{C}$ ning jääb vaid tõestada, et see asub ka sirgel l_C, s.t. et punktid Z, X ja H_C asuvad ühel sirgel.



Joonis 5

Oletame, et punkt X asub ringjoone $\mathcal{C}$ kaarel $\overset{\frown}{AH_C}$, siis lemmat 2 kasutades saame

$$\begin{aligned}\angle ZH_CH &= \angle ZHH_C = \beta + \angle AHH_C = \beta + \frac{1}{2}(\overset{\frown}{AH_C} + \overset{\frown}{CH_A}) = \\ &= \beta + \frac{1}{2}\overset{\frown}{AH_C} + \frac{1}{2}\overset{\frown}{CH_A} = \beta + \angle ACH_C + \angle CAH_A = \\ &= \beta + 90^\circ - \angle A + 90^\circ - \angle C = \angle B + \beta = \\ &= \frac{1}{2}\overset{\frown}{AC} + \frac{1}{2}\overset{\frown}{AX} = \angle XH_CC\,.\end{aligned}$$

Juhul, kui punkt X asub kaarel $\overset{\frown}{BH_C}$, saame analoogiliselt

$$\angle ZH_CH = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AC} + \frac{1}{2}\overset{\frown}{AX} = 180^\circ - \angle XH_CC\,.$$

Seega asuvad mõlemal juhul punktid Z, X ja H_C ühel sirgel.