Valikvõistlus

IMO'95 Eesti võistkonna kandidaatidele

Tartus, 5.–6. mail 1995. a.

Esimene päev

Lahendamisaega on kummalgi päeval 4 tundi 30 minutit.
Selgitusi ülesannete tekstide kohta antakse esimese 30 minuti jooksul.
Iga ülesande õige ja korrektselt vormistatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvuteid kasutada ei lubata.

1. Leia kõik niisugused funktsioonid $f(n)$, mis on määratud kõikide mittenegatiivsete täisarvude n korral, omandavad ainult mittenegatiivseid täisarvulisi väärtusi ning rahuldavad iga mittenegatiivse täisarvu n korral tingimust $f(f(n)) + f(n) = 2n + 3$.

2. Tasandil on antud rööpküliku $ABCD$ kolm tippu A, B, C. Kuidas on võimalik konstrueerida selle rööpküliku neljas tipp D, kasutades ainult fikseeritud haarade vahekaugusega sirklit? (Sirkli haarade vahekaugus pole eelnevalt teada; joonlauda ega muid instrumente kasutada ei saa.)

3. Viie reaalarvu a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 ruutude summa on 1. Tõesta, et nende hulgas leiduvad niisugused kaks arvu a_i ja a_j $(i \neq j)$, et $|a_i - a_j| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

Valikvõistlus

IMO'95 Eesti võistkonna kandidaatidele

Tartus, 5.–6. mail 1995. a.

Teine päev

Lahendamisaega on kummalgi päeval 4 tundi 30 minutit.
Selgitusi ülesannete tekstide kohta antakse esimese 30 minuti jooksul.
Iga ülesande õige ja korrektselt vormistatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvuteid kasutada ei lubata.

4. Olgu n suvaline positiivne täisarv ning k selline positiivne täisarv, mis annab neljaga jagamisel jäägi 1. Tõesta, et arv

   $$C_n^1 + C_n^3 k + C_n^5 k^2 + C_n^7 k^3 + \dots$$

   jagub arvuga 2^{n-1}. (Siin C_n^m tähistab kombinatsioonide arvu n elemendist m kaupa ning liidetavate arv vaadeldavas summas on $\left[\frac{n+1}{2}\right]$.)

5. Korvpalliturniiril osaleb 18 võistkonda. Iga võistkond mängib iga vastasvõistkonnaga ühe mängu; korvpallimäng viigiga lõppeda ei saa. Tõesta, et turniiri lõppedes leiduvad kindlasti niisugused kolm võistkonda A, B ja C, et ülejäänud võistkondadest igaüks on turniiril kaotanud vähemalt ühele neist kolmest.

6. Läbi teravnurkse kolmnurga ABC kõrguste lõikepunkti tõmmatakse sirge l, mis ei läbi selle kolmnurga tippe. Tõesta, et kolm sirget, mis on sümmeetrilised sirgega l kolmnurga ABC külgedega määratud sirgete suhtes, lõikuvad ühes punktis ning see punkt asub kolmnurga ABC ümberringjoonel.