О т б о р н ы й к о н к у р с

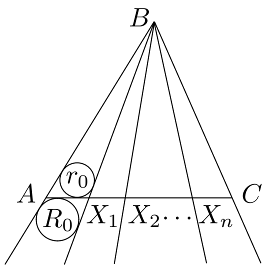
кандидатам в команду Эстонии на ММО'94

Тарту, 18–19 мая 1994 г.

Время для решения в каждый день 4 часа 30 минут.
Пояснения по текстам задач даются в течение первых 30 минут.
Верное и корректно оформленное решение каждой задачи дает 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

Первый день

1. Из вершины B треугольника ABC проведены n лучей, пересекающие сторону AC треугольника соответственно в точках $X_1, X_2, \ldots, X_n$ (точки $A, X_1, \ldots, X_n, C$ расположены на прямой AC в указанном порядке). Пусть $r_0, r_1, \ldots, r_n$ и $R_0, R_1, \ldots, R_n$ — соответственно радиусы вписанных и "вневписанных" окружностей треугольников ABX_1, X_1BX_2, $\ldots$, X_nBC (см. рисунок). Доказать, что число $\dfrac{r_0 r_1 \ldots r_n}{R_0 R_1 \ldots R_n}$ не зависит от числа проведенных лучей n и от выбора точек $X_1, X_2, \ldots, X_n$.



2. Найти все пары (x, y) натуральных чисел, бо́льших единицы, при которых число $2^x + 3^y$ является квадратом некоторого натурального числа.

3. На столе 32 внешне одинаковых монет, весы которых могут иметь два различных значения (известно, что имеются монеты как одного, так и другого веса). Как за пять взвешиваний на чашечных весах без гирь найти по одной монете каждого веса?

О т б о р н ы й   к о н к у р с

кандидатам в команду Эстонии на ММО'94

Тарту, 18–19 мая 1994 г.

Время для решения в каждый день 4 часа 30 минут.
Пояснения по текстам задач даются в течение первых 30 минут.
Верное и корректно оформленное решение каждой задачи дает 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

Второй день

4. Две окружности внешне касаются друг друга. В одну из них вписан правильный треугольник, ни одна вершина которого не совпадает с точкой касания окружностей. Из каждой вершины этого треугольника проведена касательная к другой окружности. Доказать, что длина одной из этих касательных равна сумме длин двух остальных.

5. Доказать, что при любых положительных числах a, b, c, d, e имеет место неравенство

$$(a+b+c+d+e)^2 \geqslant 4(ab+bc+cd+de+ea)\ .$$

6. При двух непересекающихся числовых множествах A и B, каждое из которых содержит по $2n$ элементов, пишем $A \xrightarrow{x} B$, если среди $4n^2$ формальных неравенств $a > b$, где $a \in A$ и $b \in B$, имеется по крайней мере x раз больше верных неравенств чем неверных. Доказать, что:

   а) не существует таких множеств A_1, A_2, $\ldots$, A_k, чтобы

   $$A_1 \xrightarrow{3} A_2 \xrightarrow{3} \ldots \xrightarrow{3} A_{k-1} \xrightarrow{3} A_k \xrightarrow{3} A_1\ ;$$

   б) при любом вещественном $x < 3$ существуют множества A_1, A_2, $\ldots$, A_k такие, что

   $$A_1 \xrightarrow{x} A_2 \xrightarrow{x} \ldots \xrightarrow{x} A_{k-1} \xrightarrow{x} A_k \xrightarrow{x} A_1\ .$$