Valikvõistlus

IMO'94 Eesti võistkonna kandidaatidele

Tartus, 18.–19. mail 1994. a.

Ülesannete lahendused

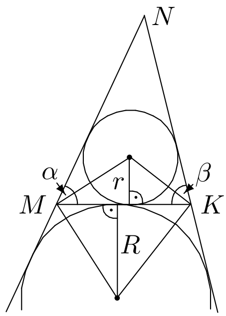
Esimene päev.

1. Arvutame ühe kolmnurga MNK siseringjoone ja küljele MK konstrueeritud "välisringjoone" raadiuste suhte $\frac{r}{R}$. Olgu $\angle NMK = \alpha$ ja $\angle NKM = \beta$ (vt. joonist), siis ilmselt

$$|MK| = r\left(\cot\frac{\alpha}{2} + \cot\frac{\beta}{2}\right)$$

ja

$$|MK| = R\left(\cot\frac{\pi-\alpha}{2} + \cot\frac{\pi-\beta}{2}\right) = R\left(\tan\frac{\alpha}{2} + \tan\frac{\beta}{2}\right).$$



Neist seostest saame

$$\frac{r}{R} = \frac{\tan\frac{\alpha}{2} + \tan\frac{\beta}{2}}{\cot\frac{\alpha}{2} + \cot\frac{\beta}{2}} = \tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}.$$

Rakendades seda valemit kolmnurkade ABX_1, X_1BX_2, ..., $X_{n-1}BX_n$, X_nBC korral ja arvestades seost $\tan\frac{\gamma}{2}\cdot\tan\frac{\pi-\gamma}{2}=1$, saame

$$\frac{r_0r_1\dots r_n}{R_0R_1\dots R_n}=\tan\frac{\angle A}{2}\cdot\tan\frac{\angle C}{2}\,.$$

2. Vastus: ainus selline paar on $x=4$, $y=2$. Olgu $2^x+3^y=z^2$, siis arv z on ilmselt paaritu. Et $x\geqslant 2$, peab arv $2^x=z^2-3^y$ jaguma neljaga. Kuna $z^2\equiv 1 \pmod 4$, peab olema $3^y\equiv 1 \pmod 4$, seega y on paarisarv. Olgu $y=2y_1$, siis $2^x=z^2-3^y=(z+3^{y_1})(z-3^{y_1})$. Et $y_1\geqslant 1$, siis on z ja 3^{y_1} mõlemad paaritud ning seega $z-3^{y_1}=2^a$, $z+3^{y_1}=2^b$, kus $a,b\geqslant 1$. Paneme tähele, et arvud $z-3^{y_1}$, $z+3^{y_1}$ ei saa mõlemad jaguda neljaga (vastasel juhul peaks nende summa $2z$ jaguma neljaga ja z peaks seega olema paarisarv). Seepärast $z-3^{y_1}=2$ ja $z+3^{y_1}=2^{x-1}$. Lahutades esimese võrduse teisest, saame $3^{y_1}=2^{x-2}-1$, s.t. x peab olema paarisarv. Olgu $x=2x_1$, siis $3^{y_1}=2^{2(x_1-1)}-1=(2^{x_1-1}+1)(2^{x_1-1}-1)$, s.t. $2^{x_1-1}+1=3^c$, $2^{x_1-1}-1=3^d$. Et $3^c-3^d=2$, peab olema $d=0$. Seega $2^{x_1-1}-1=1$, kust leiame $x_1=2$, $x=4$ ning $y_1=1$, $y=2$.

3. Tõestame paralleelselt (induktsiooniga n järgi) kaks väidet:
   a) 2^n ülesande tingimusi rahuldava mündi hulgast on n kaalumisega võimalik leida üks raskem ja üks kergem münt;
   b) kui kahes kuhjas on kummaski 2^n münti ja on teada, kumb kuhi on teisest kergem, siis on n kaalumise abil võimalik leida üks raskem ja üks kergem münt.

   Tõepoolest: kui $n=1$, siis on väide a) ilmne; väite b) tõestuseks võtame kummastki kuhjast ühe mündi ja asetame need kaaludele. Kui kaalud jäävad tasakaalu, on raskem ja kergem münt laual, vastasel juhul on sellised mündid kaalukaussidel.

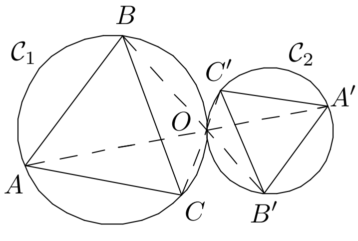
   Oletame nüüd, et väide on õige $n\leqslant k$ korral ja vaatleme olukorda, kui $n=k+1$.
   a) Asetame kummalegi kaalukausile 2^k münti. Kui kaalud jäävad tasakaalu, siis peab kummalgi kaalukausil olema nii kergeid kui ka raskeid münte ja saame kasutada väidet a) $n=k$ korral; vastasel juhul saame kasutada väidet b).
   b) Sisaldagu kumbki kuhjadest A ja B 2^{k+1} münti ja olgu kuhi A raskem kuhjast B. Asetame ühele kaalukausile 2^k münti kuhjast A ja

teisele 2^k münti kuhjast B. Kui kaalud jäävad tasakaalu, siis on kuhja A lauale jäänud osa raskem kuhja B vastavast osast ning saame kasutada induktsiooni eeldust $n = k$ korral. Vastasel korral kasutame sama eeldust kaalukaussidel olevate mündikuhjade jaoks.

Sellega on väited a) ja b) tõestatud ning ühtlasi konstrueeritud nõutav protseduur kergema ja raskema mündi eraldamiseks $32 = 2^5$ ülesande nõudeid rahuldava mündi hulgast.

Teine päev.

4. Olgu vaadeldavad ringjooned $\mathcal{C}_1$ ja $\mathcal{C}_2$ vastavalt raadiustega R ja r, puutugu nad teineteist punktis O ja asugu võrdkülgse kolmnurga ABC tipud ringjoonel $\mathcal{C}_1$ (vt. joonist). Vaatleme homoteetiat keskpunktiga O ja homoteetsusteguriga $k = -\dfrac{r}{R}$. Kolmnurga ABC homoteetseks kujutiseks on sel juhul võrdkülgne kolmnurk $A'B'C'$, mille tipud asuvad ringjoonel $\mathcal{C}_2$. Vastavalt teoreemile ringjoone lõikaja ja puutuja kohta on tippudest A, B ja C ringjoonele $\mathcal{C}_2$ tõmmatud puutujalõikude pikkused vastavalt $\sqrt{|AO| \cdot |AA'|} = |AO| \cdot \sqrt{1-k}$, $\sqrt{|BO| \cdot |BB'|} = |BO| \cdot \sqrt{1-k}$ ja $\sqrt{|CO| \cdot |CC'|} = |CO| \cdot \sqrt{1-k}$. Niisiis piisab näidata, et üks arvudest $|AO|$, $|BO|$ ja $|CO|$ on võrdne ülejäänud kahe summaga. Tõepoolest, kui punkt O asub näiteks ringjoone $\mathcal{C}_1$ kaarel BC (nagu joonisel näidatud), siis vastavalt Ptolemaiose teoreemile $|AB| \cdot |CO| + |AC| \cdot |BO| = |BC| \cdot |AO|$ ning seega $|CO| + |BO| = |AO|$.



5. Paneme tähele, et

$$\begin{aligned}(a+b+c+d+e)^2 - 4(ab+bc+cd+de+ea) &= \\ &= (a-b+c-d+e)^2 + 4ad + 4be - 4ae = \\ &= (a-b+c-d+e)^2 + 4ad + 4e(b-a)\ .\end{aligned}$$

See avaldis ei muutu arvude a, b, c, d, e mistahes *tsüklilisel* ümbernimetamisel. Seetõttu võime üldsust kitsendamata eeldada, et $b \geqslant a$. Sellisel juhul aga on antud avaldise väärtus ilmselt positiivne.

6. a) Olgu iga $i = 1, 2, \ldots, k$ korral $A_i = \{ a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, \ldots, a_{2n}^{(i)} \}$, kusjuures $a_1^{(i)} < a_2^{(i)} < \ldots < a_{2n}^{(i)}$. Seostest

$$A_1 \xrightarrow{3} A_2 \xrightarrow{3} \ldots \xrightarrow{3} A_{k-1} \xrightarrow{3} A_k \xrightarrow{3} A_1$$

saame siis kergesti järeldada

$$A_{n+1}^{(1)} > A_{n+1}^{(2)} > \ldots > A_{n+1}^{(k)} > A_{n+1}^{(1)} ,$$

mis annab vastuolu. (Tõepoolest, kui $a_{n+1}^{(s)} \leqslant a_{n+1}^{(s+1)}$, siis on hulga A_s elemendid $a_1^{(s)}, \ldots, a_{n+1}^{(s)}$ *kõik* mitte suuremad hulga A_{s+1} elementidest $a_{n+1}^{(s+1)}, \ldots, a_{2n}^{(s+1)}$, s.t. $4n^2$ võrratuse $a > b$ hulgas, kus $a \in A_s$ ja $b \in A_{s+1}$, on vähemalt $(n+1) \cdot n > n^2$ väära.)

b) Loobume esialgu nõudest, et hulkade $A_1, \ldots, A_k$ elemendid peavad olema paarikaupa erinevad, ja vaatleme järgmisel leheküljel toodud tabelit, kus esimeses, teises, ..., k. reas on loetletud vastavalt hulkade A_1, A_2, ..., A_k elemendid (igaüks neist hulkadest sisaldab $k = 2n$ elementi).

Ilmselt on iga $s = 1, 2, \ldots, k-1$ korral k^2 võrratuse $a > b$ (kus $a \in A_s$ ja $b \in A_{s+1}$) seas tõeseid võrratusi vähemalt

$$\begin{aligned} s \cdot k + (k-s) \cdot (k-s-1) &= k^2 - (s+1)(k-s) \geqslant \\ &\geqslant k^2 - \Big(\frac{(k-s)+(s+1)}{2}\Big)^2 = k^2 - \Big(\frac{k+1}{2}\Big)^2 = \\ &= \frac{3k^2 - 2k - 1}{4} , \end{aligned}$$

võrratuste $c > d$ (kus $c \in A_k$ ja $d \in A_1$) seas aga vähemalt $(k-1) \cdot k$. Valides k piisavalt suure, saame arvude $\frac{3}{4}k^2$ ja $\frac{3k^2 - 2k - 1}{4}$ vahe muuta kuitahes väikeseks; võrratus $(k-1) \cdot k \geqslant \frac{3}{4}k^2$ kehtib mistahes $k \geqslant 4$ korral.

	$k-s$					s				
A_1	k	k	k		k	k		k	k	$2k$
A_2	$k-1$	$k-1$	$k-1$		$k-1$	$k-1$		$k-1$	$2k-1$	$2k-1$
A_3	$k-2$	$k-2$	$k-2$		$k-2$	$k-2$		$2k-2$	$2k-2$	$2k-2$
A_s	$k-s+1$	$k-s+1$	$k-s+1$	$k-s+1$	$k-s+1$	$2k-s+1$		$2k-s+1$	$2k-s+1$	$2k-s+1$
A_{s+1}	$k-s$	$k-s$	$k-s$	$k-s$	$2k-s$	$2k-s$		$2k-s$	$2k-s$	$2k-s$
A_{k-1}	2	$k+2$	$k+2$		$k+2$	$k+2$		$k+2$	$k+2$	$k+2$
A_k	$k+1$	$k+1$	$k+1$		$k+1$	$k+1$		$k+1$	$k+1$	$k+1$

Lõpuks paneme tähele, et tabelis toodud täisarvude asemel võime hulkade $A_1, \ldots, A_k$ elementideks võtta suvalised reaalarvud, mille täisosad on vastavalt võrdsed tabelis näidatud arvudega. Sel viisil saame kergesti tagada, et nende hulkade kõik k^2 elementi on paarikaupa erinevad.