V a l i k v õ i s t l u s

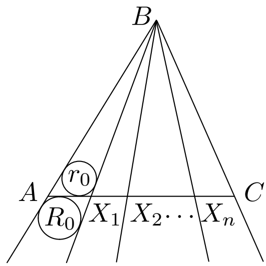
Eesti IMO'94 võistkonna kandidaatidele

Tartus, 18.–19. mail 1994. a.

Lahendamisaega on kummalgi päeval 4 tundi 30 minutit.
Selgitusi ülesannete tekstide kohta antakse esimese 30 minuti jooksul.
Iga ülesande õige ja korrektselt vormistatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvuteid kasutada ei lubata.

Esimene päev

1. Kolmnurga ABC tipust B tõmmatakse n kiirt, mis lõikavad kolmnurga külge AC vastavalt punktides $X_1, X_2, \ldots, X_n$ (punktid $A, X_1, \ldots, X_n, C$ paiknevad sirgel AC näidatud järjekorras). Olgu $r_0, r_1, \ldots, r_n$ ning $R_0, R_1, \ldots, R_n$ vastavalt kolmnurkade $ABX_1, X_1BX_2, \ldots, X_nBC$ siseringjoonte ja "välisringjoonte" raadiused (vt. joonist). Tõesta, et arv $\dfrac{r_0 r_1 \ldots r_n}{R_0 R_1 \ldots R_n}$ ei sõltu kiirte arvust n ega punktide $X_1, X_2, \ldots, X_n$ valikust.



2. Leia kõik ühest suuremate naturaalarvude paarid (x, y), mille korral arv $2^x + 3^y$ on mingi naturaalarvu ruut.

3. Laual on 32 ühesuguse välimusega münti, mis võivad olla kahe erineva kaaluga (on teada, et müntide seas leidub nii kergemaid kui ka raskemaid). Kuidas leida viie kaalumisega vihtideta kangkaaludel üks kergem ja üks raskem münt?

V a l i k v õ i s t l u s

Eesti IMO'94 võistkonna kandidaatidele

Tartus, 18.–19. mail 1994. a.

Lahendamisaega on kummalgi päeval 4 tundi 30 minutit.
Selgitusi ülesannete tekstide kohta antakse esimese 30 minuti jooksul.
Iga ülesande õige ja korrektselt vormistatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvuteid kasutada ei lubata.

Teine päev

4. Kaks ringjoont puutuvad teineteist väliselt. Üks neist on ümberringjooneks võrdkülgsele kolmnurgale, mille ükski tipp ei asu ringjoonte puutepunktis. Selle kolmnurga igast tipust tõmmatakse puutuja teisele ringjoonele. Tõesta, et ühe tekkiva puutujalõigu pikkus on võrdne kahe ülejäänud puutujalõigu pikkuste summaga.

5. Tõesta, et mistahes positiivsete arvude a, b, c, d, e korral kehtib võrratus

$$(a+b+c+d+e)^2 \geqslant 4(ab+bc+cd+de+ea) .$$

6. Kahe ühisosata arvuhulga A ja B korral, mis kumbki sisaldavad $2n$ elementi, kirjutame $A \xrightarrow{x} B$, kui $4n^2$ formaalse võrratuse $a > b$ hulgas, kus $a \in A$ ja $b \in B$, on tõeseid võrratusi vähemalt x korda rohkem kui vääri. Tõesta, et:

   a) ei leidu arvuhulki A_1, A_2, $\ldots$, A_k, mille korral

   $$A_1 \xrightarrow{3} A_2 \xrightarrow{3} \ldots \xrightarrow{3} A_{k-1} \xrightarrow{3} A_k \xrightarrow{3} A_1 ;$$

   b) mistahes reaalarvu $x < 3$ korral leiduvad arvuhulgad A_1, A_2, $\ldots$, A_k, nii et

   $$A_1 \xrightarrow{x} A_2 \xrightarrow{x} \ldots \xrightarrow{x} A_{k-1} \xrightarrow{x} A_k \xrightarrow{x} A_1 .$$