Отборный конкурс по математике

(для определения участников международной олимпиады)

Первый день: 15 мая 1993 г.

Время для решения 4 часа 30 минут.
Пояснения по текстам задач даются в течение первых 30 минут.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. В теннисном клубе имеется n теннисистов $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Для участия в парных состязаниях из них образуются n пар $K_1, K_2, \ldots, K_n$. Известно, что среди этих пар имеется пара (a_i, a_j) тогда и только тогда, когда в парах K_i и K_j есть один общий теннисист. Доказать, что каждый теннисист участвует ровно в двух парах.

2. Пусть α, β и γ — углы некоторого треугольника, R — радиус описанной окружности и S — площадь этого треугольника. Доказать, что
$$\tan\frac{\alpha}{2} + \tan\frac{\beta}{2} + \tan\frac{\gamma}{2} \leqslant \frac{9R^2}{4S}\,.$$

3. Известно, что число d — наибольший общий делитель натуральных чисел m и n, и частное $\dfrac{m}{d}$ является нечетным числом. Доказать, что числа $x = 2^m - 1$ ja $y = 2^n + 1$ взаимно просты.

Отборный конкурс по математике

(для определения участников международной олимпиады)

Второй день: 16 мая 1993 г.

Время для решения 4 часа 30 минут.
Пояснения по текстам задач даются в течение первых 30 минут.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

4. Через вершины A, B, C остроугольного треугольника ABC проводят соответственно прямые L_A, L_B, L_C следующим образом:

   Пусть H — основание высоты треугольника, опущенной из вершины A, и пусть окружность S_A, имеющий своим диаметром отрезок AH, пересекает стороны AB и AC треугольника соответственно в точках M и N ($M \neq A$ и $N \neq A$); тогда прямую L_A проведем через точку A перпендикулярно отрезку MN. Прямые L_B и L_C строятся аналогично.

   Доказать, что прямые L_A, L_B и L_C пересекаются в одной точке.

5. Из цифр 0 и 1 составляются всевозможные семизначные числа (включая числа, начинающиеся одним или несколькими нулями). Какое наибольшее количество таких чисел можно выбирать, так чтобы любые два выбранных числа отличались друг от друга в не менее чем трех разрядах?

6. Пусть a_1, a_2, $\ldots$, a_n — такие целые положительные числа, что всевозможные суммы из них (по одному, по два, $\ldots$, по n — всего $2^n - 1$ сумм) все различны. Доказать, что

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} < 2\,.$$