# Valikvõistlus matemaatikas

## (rahvusvahelisest olümpiaadist osavõtjate selgitamiseks)

15.–16. mai 1993. a.

Ülesannete lahendused

### Esimene päev

1. Olgu $d_k$ paaride arv, milles esineb tennisist $a_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Et paare on kokku $n$, siis $d_1 + d_2 + \ldots + d_n = 2n$. Seejuures on tennisist $a_k$ "ühine" $C_{d_k}^2 = \dfrac{d_k(d_k-1)}{2}$ "paaride paari" $(K_i, K_j)$ jaoks. Vastavalt ülesande tingimusele peab arvude $C_{d_k}^2$ summa olema võrdne paaride koguarvuga, s.t.

$$C_{d_1}^2 + C_{d_2}^2 + \ldots + C_{d_n}^2 = n ,$$

ehk

$$d_1^2 + d_2^2 + \ldots + d_n^2 = (d_1 + d_2 + \ldots + d_n) + 2n = 4n .$$

Niisiis,

$$n(d_1^2 + d_2^2 + \ldots + d_n^2) = (d_1 + d_2 + \ldots + d_n)^2 ,$$

millest saame

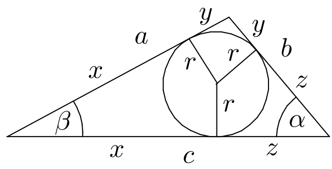
$$(d_1 - d_2)^2 + \ldots + (d_1 - d_n)^2 + \ldots + (d_{n-1} - d_n)^2 = 0$$

ja $d_1 = d_2 = \ldots = d_n = 2$.

2. Et $x + y + z = p$, $x + y = a$, $y + z = b$ ja $x + z = c$ (vt. joonist), siis $\tan\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{r}{z} = \dfrac{r}{p-a}$, $\tan\dfrac{\beta}{2} = \dfrac{r}{p-b}$, $\tan\dfrac{\gamma}{2} = \dfrac{r}{p-c}$ ning $S = pr$. Heroni valemist $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ saame

$$\frac{r}{p-a} = \frac{pr(p-b)(p-c)}{S^2} = \frac{(p-b)(p-c)}{S}$$

ning analoogiliselt $\dfrac{r}{p-b} = \dfrac{(p-a)(p-c)}{S}$ ja $\dfrac{r}{p-c} = \dfrac{(p-b)(p-c)}{S}$.




Asendades veel $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ ning avades sulud, saame esialgsega samaväärse võrratuse

$$a^2+b^2+c^2-(a-b)^2-(b-c)^2-(a-c)^2 \leqslant 9R^2\,.$$

Selle tõestamiseks piisab näidata, et $a^2+b^2+c^2 \leqslant 9R^2$, ehk (rakendades siinusteoreemi) $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma \leqslant \dfrac{9}{4}$.

Tähistame $\delta = \alpha+\beta$, $\varepsilon = \alpha-\beta$. Üldsust kitsendamata võime eeldada, et $\alpha \geqslant \beta \geqslant \gamma$, siis $\dfrac{2\pi}{3} \leqslant \delta < \pi$ ja $\cos\delta < 0$. Teisendades võrratuse vasakut poolt, saame:

$$\begin{aligned}
\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma &= \frac{1}{2}(3-\cos 2\alpha-\cos 2\beta-\cos(2\alpha+2\beta)) = \\
&= \frac{1}{2}(3-\cos(\delta+\varepsilon)-\cos(\delta-\varepsilon)-\cos 2\delta) = \\
&= 2-\cos^2\delta-\cos\delta\cos\varepsilon \leqslant 2-\cos^2\delta-\cos\delta = \\
&= \frac{9}{4}-\left(\cos\delta+\frac{1}{2}\right)^2 \leqslant \frac{9}{4}\,.
\end{aligned}$$

3. Tähistame $m_1 = \dfrac{m}{d}$, $n_1 = \dfrac{n}{d}$, ja $\delta = \mathrm{SÜT}(x,y)$, $k = \dfrac{x}{\delta}$, $l = \dfrac{y}{\delta}$. Siis

$$(k\delta+1)^{n_1} = 2^{mn_1} = 2^{m_1n_1d} = 2^{nm_1} = (l\delta-1)^{m_1}.$$

Kuna $m_1$ on paaritu arv, siis Newtoni binoomvalemi kohaselt saame $(k\delta+1)^{n_1} = K\delta+1$ ja $(l\delta-1)^{m_1} = L\delta-1$, kus $K$ ja $L$ on mingid naturaalarvud. Et $K\delta+1 = L\delta-1$, siis $\delta(L-K) = 2$, ning $\delta = 1$ ($\delta = 2$ pole võimalik, sest $x$ ja $y$ on paaritud arvud).

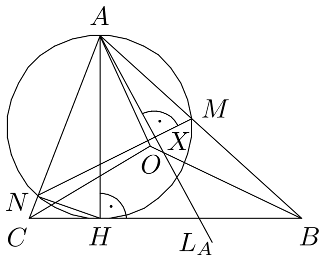
## Teine päev

4. Leiame (vt. joonist)

$$\angle AMN = \angle AHN = \frac{\pi}{2} - \angle CHN = \angle C$$

(kuna $\angle ANH = \frac{\pi}{2}$ kui diameetrile toetuv piirdenurk) ja analoogiliselt $\angle ANM = \angle B$. Seega on kolmnurgad $ABC$ ja $ANM$ sarnased, s.t. kolmnurk $ANM$ on teravnurkne ning sirge $L_A$ lõikab lõiku $MN$ (mitte selle pikendust). Olgu see lõikepunkt $X$. Näitame nüüd, et sirged $L_A$, $L_B$ ja $L_C$ lõikuvad kolmnurga $ABC$ ümberringjoone keskpunktis $O$. Tõepoolest, liites ilmsed võrdused $\angle BAO = \angle ABO$, $\angle ACO = \angle CAO$, $\angle BCO = \angle CBO$ saame

$$\angle BAO = \frac{\pi}{2} - \angle C = \frac{\pi}{2} - \angle AMN = \angle MAX = \angle BAX\,.$$




Et punktid $X$ ja $O$ asuvad mõlemad kolmnurga $ABC$ sees, järeldame siit, et punkt $O$ asub sirgel $L_A$. Kuna sama kehtib ka sirgete $L_B$ ja $L_C$ jaoks, lõikuvad need kolm sirget punktis $O$.

5. Nimetame arvu *ümbruseks* kõikide selliste nullidest ja ühtedest koosnevate seitsmekohaliste arvude hulka, mis erinevad antud arvust ülimalt ühe kümnendkoha poolest. Siis vastavalt ülesande tingimusele mistahes kahe väljavalitud arvu ümbrused ei lõiku (s.t. nende ühisosa on tühi). Et iga arvu ümbrus koosneb täpselt 8 arvust, siis ei saa väljavalitud arve olla rohkem kui $\frac{2^7}{8} = 16$. Jääb veel tuua näide 16 väljavalitud arvu kohta, mis rahuldavad ülesande tingimusi:

0000000, 1111111,
1101000, 0110100, 0011010, 0001101, 1000110, 0100011, 1010001,
0010111, 1001011, 1100101, 1110010, 0111001, 1011100, 0101110.

6. Üldsust kitsendamata võime eeldada, et $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$. Et mistahes fikseeritud $i$ korral $(1 \leqslant i \leqslant n)$ saame arvudest $a_1$, $a_2$, …, $a_i$ moodustada $2^i - 1$ summat, mis kõik peavad olema erinevad, ning $a_1 + \ldots + a_i$ on neist summadest suurim, siis $a_1 + \ldots + a_i \geqslant 2^i - 1 = 1 + 2 + \ldots + 2^{i-1}$ iga $i = 1, 2, \ldots, n$ korral. Tähistame nüüd $s_i = a_1 + \ldots + a_i - (1 + \ldots + 2^{i-1})$ ja $z_i = \dfrac{1}{a_i \cdot 2^{i-1}}$. Siis

$$\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) - \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) =$$
$$= \frac{a_1 - 1}{a_1 \cdot 1} + \frac{a_2 - 2}{a_2 \cdot 2} + \ldots + \frac{a_n - 2^{n-1}}{a_n \cdot 2^{n-1}} =$$
$$= s_1(z_1 - z_2) + \ldots + s_{n-1}(z_{n-1} - z_n) + s_n z_n \geqslant 0\,,$$

kuna $s_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, ja $0 < z_n < z_{n-1} < \ldots < z_1$. Seega

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} \leqslant 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} < 2\,.$$