Valikvõistlus matemaatikas

(rahvusvahelisest olümpiaadist osavõtjate selgitamiseks)

Esimene päev: 15. mai 1993. a.

Lahendamisaega on 4 tundi 30 minutit.
Selgitusi ülesannete tekstide kohta antakse esimese 30 minuti jooksul.
Taskuarvuti kasutamine ei ole lubatud.

1. Tenniseklubis on n tennisisti $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Võistlusteks paarismängus moodustatakse neist n erinevat paari $K_1, K_2, \ldots, K_n$. On teada, et nende paaride hulgas leidub paar (a_i, a_j) parajasti siis, kui paarides K_i ja K_j esineb üks ühine tennisist. Tõesta, et iga tennisist esineb täpselt kahes paaris.

2. Olgu α, β ja γ mingi kolmnurga nurgad, R selle kolmnurga ümberringjoone raadius ja S tema pindala. Tõesta, et
$$\tan\frac{\alpha}{2} + \tan\frac{\beta}{2} + \tan\frac{\gamma}{2} \leqslant \frac{9R^2}{4S}\,.$$

3. On teada, et arv d on naturaalarvude m ja n suurim ühistegur, ning jagatis $\dfrac{m}{d}$ on paaritu arv. Tõesta, et arvud $x = 2^m - 1$ ja $y = 2^n + 1$ on ühisteguriteta.

Valikvõistlus matemaatikas

(rahvusvahelisest olümpiaadist osavõtjate selgitamiseks)

Teine päev: 16. mai 1993. a.

Lahendamisaega on 4 tundi 30 minutit.
Selgitusi ülesannete tekstide kohta antakse esimese 30 minuti jooksul.
Taskuarvuti kasutamine ei ole lubatud.

4. Läbi teravnurkse kolmnurga ABC tippude A, B, C tõmmatakse vastavalt sirged L_A, L_B, L_C järgmisel viisil:

   Olgu H tipust A tõmmatud kõrguse aluspunkt küljel BC ning lõigaku ringjoon S_A, mille diameetriks on lõik AH, kolmnurga külgi AB ja AC vastavalt punktides M ja N ($M \neq A$ ja $N \neq A$); siis tõmbame sirge L_A läbi punkti A risti lõiguga MN. Sirged L_B ja L_C konstrueerime analoogiliselt.

   Tõesta, et sirged L_A, L_B ja L_C lõikuvad ühes punktis.

5. Numbritest 0 ja 1 koostatakse kõikvõimalikud seitsmekohalised arvud, sealhulgas ka sellised, mis algavad nulli(de)ga. Kui palju arve (maksimaalselt) saame nende hulgast välja valida, nii et mistahes kahes väljavalitud arvus oleksid vähemalt kolmel kohal erinevad numbrid?

6. Olgu a_1, a_2, $\ldots$, a_n sellised paarikaupa erinevad positiivsed täisarvud, et kõikvõimalikud summad neist ($1, 2, \ldots, n$ kaupa — kokku $2^n - 1$ summat) on kõik erinevad. Tõesta, et

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} < 2 .$$