Piirkonnavoor 2018

Võistluskomplekti valmimisse panustasid:

Elts Abel
Kaarel Hänni
Maksim Ivanov
Joonas Jürgen Kisel
Oleg Košik
Aleksei Lissitsin
Härmel Nestra
Uve Nummert
Markus Rene Pae
Erik Paemurru
Kaur Aare Saar
Sandra Schumann
Kati Smotrova
Laur Tooming
Raili Vilt

Eesti LXV matemaatikaolümpiaad

7. veebruar 2018 Piirkonnavoor **7. klass**

I osa. *Lahendamisaega on 40 minutit.*
Sellele lehele kirjuta ainult vastused, lahendamiseks võid kasutada lisapaberit.
Iga ülesande õige vastus annab 2 punkti.
Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.

1. Arvuta:

$$2{,}018 : 0,2 \cdot 10 = \quad ....$$

2. Kallel ja Mallel on kommikarbid, kus on ühepalju komme. Kui Kalle annab oma karbist 8 kommi Mallele, siis on Mallel kaks korda rohkem komme kui Kallel. Mitu kommi on algselt kummagi lapse karbis?

....

3. Kui asendada viiekohalises arvus $\overline{20a18}$ täht a järjest kõikvõimalike numbritega, saame kümme erinevat arvu. Leia vähim selline positiivne täisarv, millega ükski neist kümnest arvust ei jagu.

....

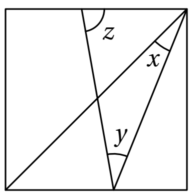
4. Arvud x ja y on sellised, et $x(y+1)-y(x+1)=7$. Leia vahe $y(x+2)-x(y+2)$ väärtus selliste x ja y korral.

....

5. Roberti ehitatud robot läbib ühe sekundiga 5 sentimeetrit. Mitu meetrit läbiks see robot ühe tunniga?

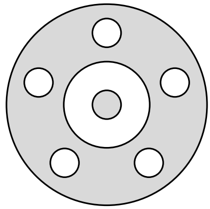
....

6. Leia nurga z suurus, kui joonisel kujutatud nelinurk on ruut ning nurga x suurus on 23° ja nurga y suurus on 32°.



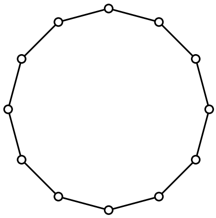
....

7. Joonisel on üks ring raadiusega 7, üks ring raadiusega 3 ja kuus ringi raadiusega 1. Suure ringi sees halliks värvitud osa pindala on kokku $k \cdot \pi$ pindalaühikut. Leia arv k.



. . . .

8. Korrapärane 12-nurk lõigatakse ühe sirge lõikega kaheks võrdseks kujundiks (kujundid loeme võrdseteks, kui neid saab nihutamise, pööramise ja ümberpööramise abil teineteisega täpselt katta). Iga saadud tükk lõigatakse veelkord ühe sirge lõikega kaheks võrdseks kujundiks. Sellist lõikamist kaheks võrdseks kujundiks jätkatakse iga uue tükiga seni, kuni see on võimalik. Leia suurim tükkide arv, mis on niimoodi võimalik saada.



. . . .

9. Lõigul AB pikkusega 100 cm asub punkt C. Sitikas jookseb mööda seda lõiku ühest punktist teise skeemi $A \to B \to A \to C \to A$ järgi ja läbib kokku 250 cm. Kui pikk oleks sitika jooksumaa siis, kui ta jookseks skeemi $B \to A \to B \to C \to B$ järgi?

. . . .

10. Risttahuka ühte külgtahku saab jaotada kaheks ristkülikuks mõõtmetega 2×4 ühikut ja teist külgtahku kolmeks 2×4 ristkülikuks. Leia vähim võimalik 2×4 ristkülikute arv, milleks saab jaotada selle risttahuka põhitahu.

. . . .

Eesti LXV matemaatikaolümpiaad

7. veebruar 2018 Piirkonnavoor **8. klass**

I osa. *Lahendamisaega on 40 minutit.*
Sellele lehele kirjuta ainult vastused, lahendamiseks võid kasutada lisapaberit.
Iga ülesande õige vastus annab 2 punkti.
Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.

1. Arvuta:

$$3 \cdot \left(\frac{1}{3} + 3 \cdot \left(\frac{1}{3} + 3 \cdot \left(\frac{1}{3} + 3\right)\right)\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

2. Kommikarbis on rohkem kui 5 ja vähem kui 25 kommi. Kui jaotada kõik kommid kas 4 kaupa või 6 kaupa, jääb mõlemal juhul üle 3 kommi. Mitu kommi on selles karbis?

. . . .

3. Arvuta:

$$\frac{2017 \cdot 0{,}2018}{2{,}017 \cdot 20{,}18} = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

4. Leia viiekohalise arvu $\overline{2018a}$ lõpunumbri a kõik võimalikud väärtused, mille korral see arv jagub arvuga 6.

. . . .

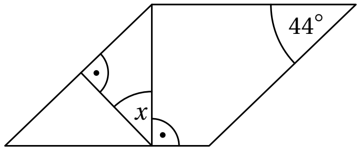
5. Arvud x ja y on sellised, et $x - y = 4$ ja $x \cdot y = 3$. Leia korrutise $(x+1)(y-1)$ väärtus selliste x ja y korral.

. . . .

6. Kolmnurga külgede pikkused on a cm, b cm ja c cm, kusjuures a, b ja c on naturaalarvud ning $a + b + c = 25$ ja $a \cdot b = 24$. Leia selle kolmnurga pikima külje pikkus.

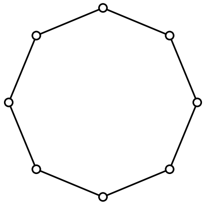
. . . .

7. Leia nurga x suurus, kui joonisel kujutatud nelinurk on rööpkülik.



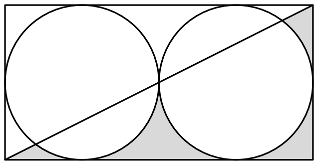
. . . .

8. Korrapärane kaheksanurk lõigatakse ühe sirge lõikega kaheks võrdseks kujundiks (kujundid loeme võrdseteks, kui neid saab nihutamise, pööramise ja ümberpööramise abil teineteisega täpselt katta). Iga saadud tükk lõigatakse veelkord ühe sirge lõikega kaheks võrdseks kujundiks. Sellist lõikamist kaheks võrdseks kujundiks jätkatakse iga uue tükiga seni, kuni see on võimalik. Leia suurim tükkide arv, mis on niimoodi võimalik saada.



. . . .

9. Ristkülikus küljepikkustega 10 cm ja 20 cm on kaks ringjoont, mis puutuvad teineteist ja ristküliku külgi. Ristküliku diagonaalist allpool on ringidega katmata ristküliku osad värvitud halliks. Leia halliks värvitud osade täpne kogupindala.



. . . .

10. Risttahuka ühte külgtahku saab jaotada kaheks ristkülikuks mõõtmetega 2×4 ühikut ja teist külgtahku kolmeks 2×4 ristkülikuks. Leia suurim võimalik 2×4 ristkülikute arv, milleks saab jaotada selle risttahuka põhitahu.

. . . .

Eesti LXV matemaatikaolümpiaad

7. veebruar 2018 Piirkonnavoor **9. klass**

I osa. *Lahendamisaega on 40 minutit.*
Sellele lehele kirjuta ainult vastused, lahendamiseks võid kasutada lisapaberit.
Iga ülesande õige vastus annab 2 punkti.
Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.

1. Leia arv x, kui $2 \cdot \left(\frac{1}{2} + 2 \cdot \left(\frac{1}{2} + 2 \cdot \left(\frac{1}{2} + 2x\right)\right)\right) = 111$.

. . . .

2. Kui palju on selliseid naturaalarvude paare (m, n), mille korral kehtivad samaaegselt võrratused $5 < m + n < 10$ ja $3 < m - n < 6$?

. . . .

3. Kui kolm sõpra Martin, Gregor ja Allan oma pangaarvetel olevad summad kokku liitsid, said nad kokku 2018 eurot. Pärast seda, kui neist igaühe pangaarvelt oli maha võetud üks ja sama summa puhkusepaketi eest, jäi Martinil arvele 180 eurot, Gregoril 208 eurot ja Allanil 820 eurot. Mitu eurot oli algul Allani pangaarvel?

. . . .

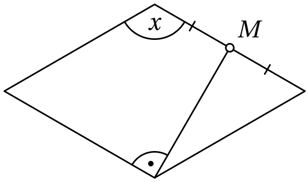
4. Kolme naturaalarvu a, b ja c kohta on teada, et $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$, $\frac{b}{c} = \frac{5}{4}$ ja $c - a = 6$. Leia arv c.

. . . .

5. Leia vähim naturaalarv n, mille korral summa $2018 + 4n$ jagub arvuga 9.

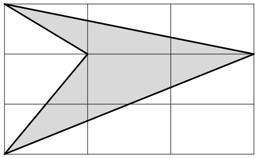
. . . .

6. Leia nurga x suurus, kui joonisel kujutatud nelinurk on romb ning M on selle külje keskpunkt.



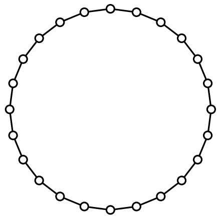
. . . .

7. Ristkülik on jaotatud külgedega paralleelsete joontega üheksaks võrdseks ristkülikuks nagu joonisel näidatud. Halliks värvitud nelinurga pindala on 9 cm^2. Leia suure ristküliku pindala.



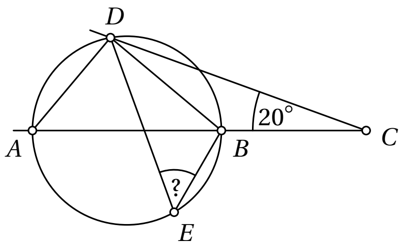
. . . .

8. Korrapärane 24-nurk lõigatakse ühe sirge lõikega kaheks võrdseks kujundiks (kujundid loeme võrdseteks, kui neid saab nihutamise, pööramise ja ümberpööramise abil teineteisega täpselt katta). Iga saadud tükk lõigatakse veelkord ühe sirge lõikega kaheks võrdseks kujundiks. Sellist lõikamist kaheks võrdseks kujundiks jätkatakse iga uue tükiga seni, kuni see on võimalik. Leia suurim tükkide arv, mis on niimoodi võimalik saada.



. . . .

9. Ringjoonele on punktist C tõmmatud lõikajad CA ja CD nii, et lõikajal CA asub ringjoone diameeter AB ning $|BC| = |BD|$ ja $\angle BCD = 20^\circ$ (vt joonist). Punkt E asub sellel ringjoonel. Leia nurga DEB suurus.



. . . .

10. Risttahuka ühte külgtahku saab jaotada kaheks ristkülikuks mõõtmetega 2×4 ühikut ja teist külgtahku neljaks 2×4 ristkülikuks. Leia vähim võimalik 2×4 ristkülikute arv, milleks saab jaotada selle risttahuka põhitahu.

. . . .

Eesti LXV matemaatikaolümpiaad

7. veebruar 2018 Piirkonnavoor **7. klass**

II osa. *Lahendamisaega on 2 tundi.*
Ülesannete lahendused kirjuta eraldi lehele.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti. Ainult vastusest ei piisa!
Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.

1. Jüril oli teatud rahasumma, mille eest ta ostab ainult kahte sorti jooke. Kogu summa eest saanuks ta osta kas 24 spordijooki või 18 smuutit.

a) Kui suur osa rahast on Jüril alles, kui ta on juba ostnud 14 spordijooki ja 3 smuutit?

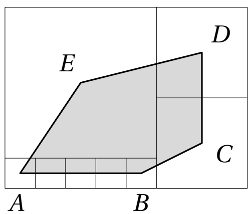
b) Mitu spordijooki ja mitu smuutit saab Jüri veel osta, et kogu ülejäänud raha täpselt ära kulutada? Leia kõik võimalused.

2. Registris on ainult kõik sellised numbriga 5 algavad seitsmekohalised telefoninumbrid, mis vastavad järgmistele tingimustele:

1) telefoninumber koosneb ainult numbritest 1 kuni 7;
2) telefoninumbris ei ole korduvaid numbreid;
3) kui kustutada numbrid 4, 5, 6 ja 7, siis jääb alles arv 123;
4) kui kustutada numbrid 1, 2, 3 ja 4, siis allesjääv arv ei ole 567.

Kui palju on selles registris telefoninumbreid?

3. Ristkülik on jaotatud viieks võrdseks väikeseks ruuduks küljepikkusega 2 cm, kaheks võrdseks keskmise suurusega ruuduks ja üheks suuremaks ruuduks. Nende ruutude diagonaalide lõikepunktid on ühendatud sirglõikudega joonisel näidatud viisil. Leia halliks värvitud viisnurga $ABCDE$ pindala.



Eesti LXV matemaatikaolümpiaad

7. veebruar 2018 Piirkonnavoor **8. klass**

II osa. *Lahendamisaega on 2 tundi.*
Ülesannete lahendused kirjuta eraldi lehele.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti. Ainult vastusest ei piisa!
Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.

1. Mälumängu võitjaile osteti kokku 300 euro eest kolme liiki meeneid hinnaga 5 eurot, 8 eurot ja 10 eurot, kusjuures igat liiki meeneid osteti vähemalt 6. Kõige odavamaid meeneid osteti seejuures kaks korda rohkem kui 8 eurot maksvaid meeneid. Mitu meenet igast liigist osteti?

2. Moekunstnikul on kasutada hulk Swarovski kristalle kaaluga 10, 12, 14, 16, . . . , 88 ja 90 grammi. Neist tuleb kostüümi kaunistuseks valida komplekt, kus kõik kristallid on erineva kaaluga ja nende kogukaal on täpselt 2018 grammi. Mitu erinevat sellist kristallide komplekti on võimalik valida?

3. Ristkülik on tema ühe küljega paralleelsete sirglõikudega jaotatud kolmeks osaks nii, et keskmine osa on ruut ja äärmised osad on ristkülikud ümbermõõduga 20 cm ja 18 cm. Keskmine ruudukujuline osa on jaotatud kaheks ristkülikuks, mille ümbermõõdud on 21 cm ja 24 cm. Leia algse ristküliku pindala.

II osa. *Lahendamisaega on 4 tundi.*
Ülesannete lahendused kirjuta eraldi lehele.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti. Ainult vastusest ei piisa!
Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.

1. Leia kõik positiivsete täisarvude paarid (n, m), mille korral on rohkem kui pooled järgmistest väidetest tõesed.

1) Arv $n + 6m$ on algarv.
2) Arv $n + m$ jagub 5-ga.
3) Arv n jagub arvuga m.
4) Arvud n ja $4m - 3$ on võrdsed.

2. Tõesta, et kui a, b ja c on sellised positiivsed arvud, et $abc = 1$, siis

$$\frac{a}{1+a+ab} + \frac{b}{1+b+bc} + \frac{c}{1+c+ca} = 1.$$

3. Mudilane magab võrgust külgedega reisivoodis, mis on ühtlaselt 60 cm lai. Selle kõrval kušetil lesib vanem vend ja lahendab matemaatikaülesandeid. Pilku kõrvale heites märkab poiss, et läbi ristkülikukujulise võrgusilma paistab täpselt neli sama suuruse ja kujuga vastaskülje võrgusilma. Kui kaugel reisivoodist asub vanema venna silm?

4. Mitu võimalust on värvida 8×8 ruudustikul täpselt kolm ruutu üleni mustaks nii, et igal mustal ruudul leidub ühine külg mingi teise musta ruuduga?

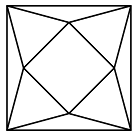
Eesti LXV matemaatikaolümpiaad

7. veebruar 2018 Piirkonnavoor **10. klass**

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.

1. Juveliiril on kolm hõbeda ja kulla sulamit. Esimeses on hõbeda ja kulla vahekord $1:2$, teises $2:3$ ja kolmandas $3:1$. Juveliir segas esimese, teise ja kolmanda sulami kokku vahekorras $1:2:3$. Kas saadud sulamis on rohkem hõbedat või kulda?

2. Ruudu külgedele on konstrueeritud võrdkülgsed kolmnurgad, nagu näidatud joonisel. Ühendades nende kolmnurkade välimised tipud, saame suurema ruudu. Leia suurema ruudu pindala, kui väikese ruudu küljepikkus on 1.



3. Mari mõtles ühe naturaalarvu. Kui ta korrutas selle arvu 4-ga, sai ta tulemuseks mingi kolmekohalise arvu. Kui ta korrutas algse arvu aga 3-ga ja tõstis saadud tulemuses viimase numbri ümber arvu ette, sai ta üllataval kombel sama kolmekohalise arvu. Leia kõik võimalused, millise arvu võis mõelda Mari.

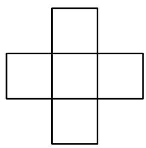
4. Leia võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} x^2 + y - 2 = 0, \\ y^2 + x - 2 = 0 \end{cases}$$

kõik reaalarvulised lahendid.

5. Kolmnurga ABC külgede BC, CA ja AB keskpunktid on vastavalt D, E ja F. Punkti P peegeldused punktidest D, E ja F on vastavalt X, Y ja Z. Tõesta, et kolmnurgad ABC ja XYZ on võrdsed (st sarnased teguriga 1).

6. Leia suurim joonisel kujutatud 5 ühikruudust koosnevate ristikujuliste pusletükkide arv, mida saab asetada ruudustikule mõõtmetega 8×8 nii, et tükid ei kata üksteist ega ulatu üle ruudustiku ääre.



Eesti LXV matemaatikaolümpiaad

7. veebruar 2018 Piirkonnavoor **11. klass**

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.

1. Majandi A karjas annab 2 lehma 3 päevaga 140 liitrit piima, majandi B karjas aga 4 lehma 6 päevaga 625 liitrit. Jõudluskontroll lüpsis testiks majandi A karjast 9 lehma rohkem kui majandi B karjast ja sai päevaga kõigilt testitud lehmadelt kokku 1000 liitrit piima. Mitut lehma lüpsis jõudluskontroll kahes majandis kokku? Eeldame, et ühes ja samas majandis on kõigi lehmade päevatoodangud võrdsed.

2. Mitu võimalust on värvida 20×18 ruudustikus kaks naaberruutu (st ühise küljega ruutu) mustaks?

3. Keraamik valmistab risttahukakujulise tellise, mille servapikkused on täisarvud a, b ja c, kusjuures $\text{SÜT}(a, b) = \text{SÜT}(b, c) = \text{SÜT}(c, a) = 1$. Kas selle tellise vastastippe ühendava diagonaali pikkus saab olla täisarv?

4. Tõesta, et kõigi reaalarvude x, y ja z korral kehtib võrratus

$$2x^2 + y^2 + 2z^2 \geqslant 2y(x + z).$$

5. Teravnurkses kolmnurgas ABC on $|AB| = 26$ m, $|AC| = 30$ m ja tipust A tõmmatud kõrguse pikkus 24 m. Külgede AB ja AC keskpunkte läbiv ringjoon puutub külge BC punktis P. Leia lõigu BP pikkus.

6. Naturaalarvudest 1 kuni 100 moodustatakse mõned paarid. Paaris on alati üks arv teisest kaks korda suurem. Ükski arv ei esine mitmes paaris. Leia suurim võimalik paaride arv.

Eesti LXV matemaatikaolümpiaad

7. veebruar 2018 Piirkonnavoor **12. klass**

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.

1. Toomas seisab lõpmatul teel ja viskab münti. Iga kord, kui ta saab kulli, liigub ta 2^n meetrit tagasi, kui aga kirja, siis $0{,}999 \cdot 2^n$ meetrit edasi, kus n on mõlemal juhul kordade arv, kui palju ta on juba enne münti visanud (st esimesel viskel 0, teisel 1 jne). Pärast esimest kirjasaamisele vastavat käiku lõpetab Toomas mündiviskamise ja läheb koju. Leia kõik sellised naturaalarvud n, et kui Toomas saab esmalt järjest n kulli ja seejärel kirja, asub ta pärast viimasele mündiviskele vastavat käiku alguspunktist tagapool.

2. Koordinaatide alguspunkti läbiva ruutparabooli haripunkti koordinaadid on $(10; 3{,}5)$. Leia selle parabooli puutuja tõus koordinaatide alguspunktis.

3. Kas vastab tõele, et arv $6a + b$ jagub 15-ga alati, kui

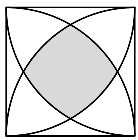
a) a ja b on sellised täisarvud, et $6a + 6b$ jagub 15-ga?

b) a ja b on sellised täisarvud, et $6a + 11b$ jagub 15-ga?

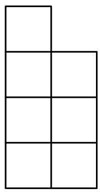
4. Olgu x, y ja z kolmnurga külgede pikkused. Tõesta, et

$$z(z-1) < x(x+1) + y(y-1) + 2xy.$$

5. Joonisel on ruut küljepikkusega 1 ja neli veerandringi raadiusega 1 keskpunktidega ruudu tippudes. Leia halliks värvitud kujundi pindala.



6. Mitu joonisel kujutatud 7 ühikruudust koosnevat kujundit saab maksimaalselt paigutada 7×7 ruudustikule nii, et nad üksteist ei kataks ega ulatuks üle ruudustiku ääre? Kujundeid tohib pöörata ja peegeldada (ümber pöörata).



LXV Олимпиада Эстонии по математике

7 февраля 2018 г. Региональный тур **7 класс**

I часть. *Время, отводимое для решения: 40 минут.*
На этом листке написать только ответы, для решения можно использовать дополнительную бумагу.
Верный ответ каждой задачи даёт 2 балла.
Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.

1. Вычислить:

$$2{,}018 : 0,2 \cdot 10 = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

2. У Кати и Маши было по коробке конфет, в каждой из которых было равное количество конфет. Когда Катя из своей коробки отдала Маше 8 конфет, то у Маши стало в два раза больше конфет, чем у Кати. Сколько конфет изначально было в одной коробке?

. . . .

3. Если заменим в пятизначном числе $\overline{20a18}$ букву a всевозможными цифрами, то получим десять различных чисел. Найти такое наименьшее положительное целое число, на которое не делится ни одно из полученных десяти чисел.

. . . .

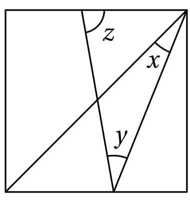
4. Пусть x и y такие числа, при которых $x(y+1) - y(x+1) = 7$. Найти значение разности $y(x+2) - x(y+2)$ при таких же числах x и y.

. . . .

5. Руслан построил робот, который за одну секунду проходит 5 сантиметров. Сколько метров пройдет этот робот за один час?

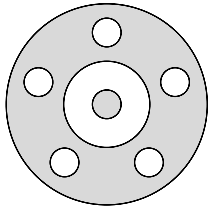
. . . .

6. Найти величину угла z, если изображенный на рисунке четырехугольник является квадратом, величина угла x равна 23°, а величина угла y равна 32°.



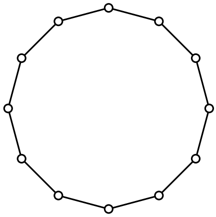
. . . .

7. На рисунке радиус одного круга равен 7, радиус одного круга равен 3 и радиусы шести кругов равны 1. Суммарная площадь частей, покрашенных внутри большого круга в серый цвет, равна $k \cdot \pi$ квадратным единицам. Найти число k.



. . . .

8. Правильный 12-угольник разрезают одним прямолинейным разрезом на две равные фигуры (фигуры считаем равными, если их можно при помощи перемещения, поворота или переворота совместить наложением). Каждую из полученных частей снова разрезают одним прямолинейным разрезом на две равные фигуры. Такое разрезание на две равные фигуры продолжают с каждой полученной частью до тех пор, пока это возможно. Найти наибольшее возможное количество частей, которые таким образом можно получить.



. . . .

9. На отрезке AB длиной 100 см лежит точка C. Букашка бежит вдоль этого отрезка от одной точки к другой по схеме $A \to B \to A \to C \to A$ и в результате пробегает всего 250 см. Какое расстояние пробежала бы букашка, если бы она бежала по схеме $B \to A \to B \to C \to B$?

. . . .

10. Одну боковую грань прямоугольного параллелепипеда можно поделить на два прямоугольника размером 2×4 единицы, а другую его боковую грань можно поделить на три прямоугольника размером 2×4 единицы. Найти наименьшее возможное количество прямоугольников размером 2×4 единицы, на которые можно поделить основание этого параллелепипеда.

. . . .

LXV Олимпиада Эстонии по математике

7 февраля 2018 г. Региональный тур **8 класс**

I часть. *Время, отводимое для решения: 40 минут.*
На этом листке написать только ответы, для решения можно использовать дополнительную бумагу.
Верный ответ каждой задачи даёт 2 балла.
Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.

1. Вычислить:

$$3 \cdot \left(\frac{1}{3} + 3 \cdot \left(\frac{1}{3} + 3 \cdot \left(\frac{1}{3} + 3\right)\right)\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

2. В коробке всего больше чем 5 и меньше чем 25 конфет. Если все конфеты начать раскладывать либо по 4 штуки, либо по 6 штук, то в обоих случаях 3 конфеты останутся лишними. Сколько всего конфет в этой коробке?

. . . .

3. Вычислить:

$$\frac{2017 \cdot 0{,}2018}{2{,}017 \cdot 20{,}18} = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

4. Найти все возможные значения последней цифры a пятизначного числа $\overline{2018a}$, при которой это число делится на число 6.

. . . .

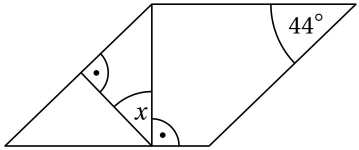
5. Пусть x и y такие числа, при которых $x - y = 4$ и $x \cdot y = 3$. Найти значение произведения $(x+1)(y-1)$ при таких же числах x и y.

. . . .

6. Длины сторон треугольника равны a см, b см и c см, причем a, b и c являются натуральными числами, $a + b + c = 25$ и $a \cdot b = 24$. Найти длину наибольшей стороны этого треугольника.

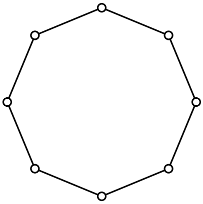
. . . .

7. Найти величину угла x, если изображенный на рисунке четырехугольник является параллелограммом.



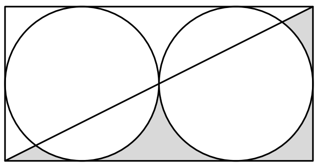
. . . .

8. Правильный восьмиугольник разрезают одним прямолинейным разрезом на две равные фигуры (фигуры считаем равными, если их можно при помощи перемещения, поворота или переворота совместить наложением). Каждую из полученных частей снова разрезают одним прямолинейным разрезом на две равные фигуры. Такое разрезание на две равные фигуры продолжают с каждой полученной частью до тех пор, пока это возможно. Найти наибольшее возможное количество частей, которые таким образом можно получить.



. . . .

9. Внутри прямоугольника с длинами сторон 10 см и 20 см нарисованы две окружности, которые касаются друг друга и сторон прямоугольника. Под диагональю прямоугольника в серый цвет закрашены все части прямоугольника, которые не покрыты кругами. Найти точное значение суммарной площади всех частей, закрашенных в серый цвет.



. . . .

10. Одну боковую грань прямоугольного параллелепипеда можно поделить на два прямоугольника размером 2×4 единицы, а другую его боковую грань можно поделить на три прямоугольника размером 2×4 единицы. Найти наибольшее возможное количество прямоугольников размером 2×4 единицы, на которые можно поделить основание этого параллелепипеда.

. . . .

LXV Олимпиада Эстонии по математике

7 февраля 2018 г. Региональный тур **9 класс**

I часть. *Время, отводимое для решения: 40 минут.*
На этом листке написать только ответы, для решения можно использовать дополнительную бумагу.
Верный ответ каждой задачи даёт 2 балла.
Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.

1. Найти число x, если $2 \cdot \left(\frac{1}{2} + 2 \cdot \left(\frac{1}{2} + 2 \cdot \left(\frac{1}{2} + 2x\right)\right)\right) = 111$.

. . . .

2. Сколько всего существует таких пар натуральных чисел (m, n), при которых одновременно действуют неравенства $5 < m+n < 10$ и $3 < m-n < 6$?

. . . .

3. Однажды трое друзей Миша, Гриша и Андрей сложили имеющиеся на их банковских счетах денежные суммы и получили всего 2018 евро. После того, как с банковского счета каждого из них была снята одинаковая денежная сумма за туристическую путевку, на счету Миши осталось 180 евро, на счету Гриши 208 евро, а на счету Андрея 820 евро. Сколько евро было изначально на банковском счету Андрея?

. . . .

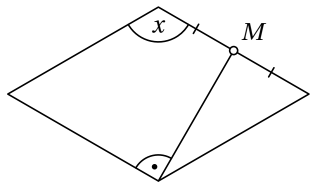
4. Про три натуральных числа a, b и c известно, что $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$, $\frac{b}{c} = \frac{5}{4}$ и $c - a = 6$. Найти число c.

. . . .

5. Найти наименьшее натуральное число n, при котором сумма $2018 + 4n$ делится на число 9.

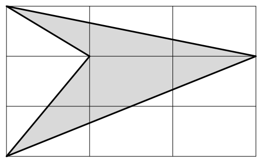
. . . .

6. Найти величину угла x, если изображенный на рисунке четырехугольник является ромбом и точка M является серединой его стороны.



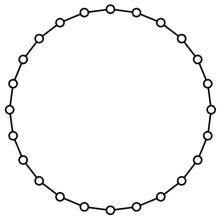
. . . .

7. Большой прямоугольник поделен параллельными его сторонам линиями на девять равных прямоугольников так, как показано на рисунке. Площадь четырехугольника, покрашенного в серый цвет, равна 9 см^2. Найти площадь большого прямоугольника.



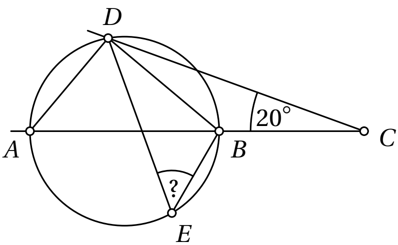
. . . .

8. Правильный 24-угольник разрезают одним прямолинейным разрезом на две равные фигуры (фигуры считаем равными, если их можно при помощи перемещения, поворота или переворота совместить наложением). Каждую из полученных частей снова разрезают одним прямолинейным разрезом на две равные фигуры. Такое разрезание на две равные фигуры продолжают с каждой полученной частью до тех пор, пока это возможно. Найти наибольшее возможное количество частей, которые таким образом можно получить.



. . . .

9. Из точки C к окружности проведены секущие CA и CD так, что на секущей CA лежит диаметр окружности AB, $|BC| = |BD|$ и $\angle BCD = 20^\circ$ (см. рисунок). Точка E также лежит на этой окружности. Найти величину угла DEB.



. . . .

10. Одну боковую грань прямоугольного параллелепипеда можно поделить на два прямоугольника размером 2×4 единицы, а другую его боковую грань можно поделить на четыре прямоугольника размером 2×4 единицы. Найти наименьшее возможное количество прямоугольников размером 2×4 единицы, на которые можно поделить основание этого параллелепипеда.

. . . .

LXV Олимпиада Эстонии по математике

7 февраля 2018 г. Региональный тур **7 класс**

II часть. *Время, отводимое для решения: 2 часа.*
Решения задач написать на отдельном листе.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов. Написать только ответ недостаточно!
Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.

1. У Гриши была определённая сумма денег, за которые он покупает только напитки двух типов. На всю сумму он смог бы купить либо 24 спортивных напитка, либо 18 смути.

а) Какая часть денег осталась у Гриши, если он уже купил 14 спортивных напитков и 3 смути?

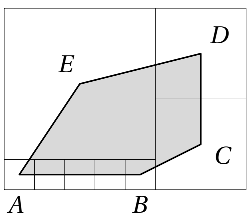
б) Сколько спортивных напитков и сколько смути может Гриша купить ещё, чтобы потратить точно все оставшиеся деньги? Найти все варианты.

2. Регистр состоит из всех таких начинающихся на цифру 5 семизначных телефонных номеров, которые отвечают следующим условиям:

1) телефонный номер состоит только из цифр от 1 до 7;
2) в телефонном номере нет повторяющихся цифр;
3) если стереть цифры 4, 5, 6 и 7, то останется число 123;
4) если стереть цифры 1, 2, 3 и 4, то оставшееся число не будет 567.

Сколько телефонных номеров в этом регистре?

3. Прямоугольник разбит на пять равных маленьких квадратов со стороной 2 см, два равных средних квадрата и один большой квадрат. Точки пересечения диагоналей этих квадратов соединены отрезками так, как показано на рисунке. Найти площадь закрашенного в серый цвет пятиугольника $ABCDE$.



LXV Олимпиада Эстонии по математике

7 февраля 2018 г. Региональный тур **8 класс**

II часть. *Время, отводимое для решения: 2 часа.*
Решения задач написать на отдельном листе.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов. Написать только ответ недостаточно!
Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.

1. Для победителей викторины ровно на 300 евро закупили призы трёх видов: за 5 евро, 8 евро и 10 евро, причём призов каждого вида закупили не меньше 6. При этом самых дешёвых призов купили в два раза больше, чем призов по 8 евро. Сколько призов каждого вида купили?

2. Дизайнеру доступны кристаллы Сваровски весом 10, 12, 14, 16, ..., 88 и 90 грамм. Для украшения костюма из них надо выбрать комплект, в котором все кристаллы были бы разного веса, а общий их вес был бы ровно 2018 грамм. Сколько таких разных комплектов можно выбрать?

3. Прямоугольник разбит на три части отрезками, параллельными одной из его сторон, так, что средняя часть – квадрат, а боковые части – прямоугольники с периметрами 20 см и 18 см. Среднюю квадратную часть можно затем разбить на два прямоугольника с периметрами 21 см и 24 см. Найти площадь первоначального прямоугольника.

LXV Олимпиада Эстонии по математике

7 февраля 2018 г. Региональный тур **9 класс**

II часть. *Время, отводимое для решения: 4 часа.*
Решения задач написать на отдельном листе.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов. Написать только ответ недостаточно!
Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.

1. Найти все пары целых положительных чисел (n, m), при которых более половины следующих утверждений верны.

1) Число $n + 6m$ простое.
2) Число $n + m$ делится на 5.
3) Число n делится на m.
4) Числа n и $4m - 3$ равны.

2. Доказать, что если a, b и c такие положительные числа, что $abc = 1$, то

$$\frac{a}{1+a+ab} + \frac{b}{1+b+bc} + \frac{c}{1+c+ca} = 1.$$

3. Карапуз спит в детской кроватке, которая по всей длине имеет равномерную ширину 60 см, а её боковые стенки сделаны из сетки. Рядом с кроваткой на кушетке валяется старший брат и решает математические задачки. Бросив взгляд вбок, мальчик замечает, что через одно прямоугольное отверстие между узлами сетки видны ровно четыре отверстия такого же размера и формы на противоположной стенке кроватки. Как далеко от кроватки находится глаз старшего брата?

4. Сколько есть способов раскрасить ровно три клетки на поле 8×8 в чёрный цвет так, чтобы у каждой чёрной клетки была по крайней мере одна общая сторона с какой-либо другой чёрной клеткой?

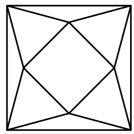
LXV Олимпиада Эстонии по математике

7 февраля 2018 г. Региональный тур **10 класс**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.

1. У ювелира есть три сплава серебра и золота. В первом соотношение серебра к золоту $1:2$, во втором – $2:3$, а в третьем – $3:1$. Ювелир сплавил первый, второй и третий сплав вместе в соотношении $1:2:3$. Чего в полученном сплаве больше, серебра или золота?

2. На сторонах квадрата построены равносторонние треугольники так, как показано на рисунке. Соединяя внешние вершины этих треугольников, получим больший квадрат. Найти площадь большего квадрата, если длина стороны меньшего квадрата равна 1.



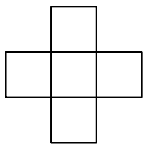
3. Маша задумала одно натуральное число. Умножив это число на 4, она получила какое-то трёхзначное число. А когда она умножила первоначальное число на 3 и переставила последнюю цифру результата в его начало, то неожиданно получила то же самое трёхзначное число. Найти все возможные значения задуманного Машей числа.

4. Найти все действительные решения системы уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y - 2 = 0, \\ y^2 + x - 2 = 0. \end{cases}$$

5. В треугольнике ABC середины сторон BC, CA и AB обозначены соответственно как D, E и F. Точка P зеркально отражается относительно точек D, E и F соответственно в точки X, Y и Z. Доказать, что треугольники ABC и XYZ равны (т.е. подобны с коэффициентом 1).

6. Найти наибольшее количество изображённых на рисунке фрагментов мозаики, состоящих из 5 единичных квадратов, которые можно расположить на поле 8×8 так, чтобы фрагменты не перекрывали друг друга и не вылезали за границы поля.



LXV Олимпиада Эстонии по математике

7 февраля 2018 г. Региональный тур **11 класс**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.

1. В хозяйстве А две коровы за 3 дня выдают 140 литров молока, а в хозяйстве Б четыре коровы за 6 дней 625 литров. В ходе проверки молочной продуктивности из хозяйства А выбрали на 9 коров больше, чем из хозяйства Б, и за день надоили от всех проверяемых коров всего 1000 литров молока. Сколько всего коров из обоих хозяйств выбрали для проверки? Будем считать, что дневные надои молока у всех коров одного хозяйства равны.

2. Сколько существует способов раскрасить две соседние клетки (т. е. имеющие общую сторону) в чёрный цвет на клетчатой доске 20×18?

3. Гончар изготавливает кирпич в форме прямоугольного параллелепипеда, длины рёбер которого – целые числа a, b и c, причём $\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(b, c) = \text{НОД}(c, a) = 1$. Может ли длина диагонали, соединяющей противоположные вершины этого кирпича, оказаться целым числом?

4. Доказать, что для всех действительных чисел x, y и z выполняется неравенство

$$2x^2 + y^2 + 2z^2 \geqslant 2y(x + z).$$

5. Треугольник ABC – остроугольный, причём $|AB| = 26$ м, $|AC| = 30$ м, а длина высоты, проведённой из вершины A, равна 24 м. Окружность, проходящая через середины сторон AB и AC, касается стороны BC в точке P. Найти длину отрезка BP.

6. Из натуральных чисел от 1 до 100 составляются некоторые пары. В паре всегда одно число в два раза больше другого. Ни одно число не повторяется в разных парах. Найти наибольшее возможное количество пар.

LXV Олимпиада Эстонии по математике

7 февраля 2018 г. Региональный тур **12 класс**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.

1. Дима стоит на бесконечной дороге и бросает монету. Каждый раз, когда выпадает орёл, он переходит на 2^n метров назад, а когда решка, то на $0{,}999\cdot 2^n$ метров вперёд, где в обоих случаях n обозначает число ранее совершённых бросков монеты (т. е. на первом броске 0, на втором 1 и т. д.). После первого выпадения решки и соответствующего перехода Дима заканчивает бросать монету и идёт домой. Найти все такие натуральные числа n, что если сначала n раз подряд выпадает орёл, а затем решка, то Дима после последнего соответствующего решке перехода оказывается позади начальной позиции.

2. Вершина параболы, проходящей через начало координат, имеет координаты $(10; 3{,}5)$. Найти угловой коэффициент касательной к этой параболе в начале координат.

3. Верно ли, что $6a + b$ всегда делится на 15, когда

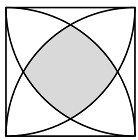
а) a и b такие целые числа, что $6a + 6b$ делится на 15?

б) a и b такие целые числа, что $6a + 11b$ делится на 15?

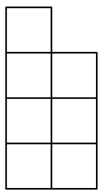
4. Известно, что x, y и z – длины сторон треугольника. Доказать, что

$$z(z-1) < x(x+1) + y(y-1) + 2xy.$$

5. На рисунке изображены квадрат со стороной 1 и четыре четверти круга радиусом 1 с центрами в вершинах квадрата. Найти площадь фигуры, закрашенной серым.



6. Какое максимальное число изображённых на рисунке фигур, состоящих из 7 единичных квадратов, можно расположить на клетчатом поле 7×7 так, чтобы они не перекрывали друг друга и не вылезали за границы поля? Фигуры можно поворачивать и зеркально отражать (переворачивать).



Eesti LXV matemaatikaolümpiaad

7. veebruar 2018 Piirkonnavoor **7. klass**

I osa vastused

1. 100,9.

2. 24.

3. 4.

4. -14.

5. 180.

6. 80°.

7. 36.

8. 8.

9. 350 cm.

10. 3.

Lahendused

1. $2{,}018 : 0{,}2 \cdot 10 = 2{,}018 : \dfrac{2}{10} \cdot 10 = 2{,}018 \cdot \dfrac{10}{2} \cdot 10 = (2{,}018 : 2) \cdot 100 = 100{,}9.$

2. Kui Kalle annab 8 kommi Mallele, siis on Mallel 8 kommi rohkem ja Kallel 8 kommi vähem kui algul, st Mallel on 16 kommi rohkem kui Kallel. Et Mallel on nüüd komme kaks korda rohkem kui Kallel, siis on Kallel 16 ja Mallel 32 kommi, st kokku on neil 48 kommi. Kummagi karbis oli seega 24 kommi.

3. Et kõik saadavad arvud on paarisarvud, siis jaguvad nad arvudega 1 ja 2. Arvuga 3 jagub näiteks arv 20118, mille saame $a = 1$ korral. Arvuga 4 aga ei jagu ükski saadav arv, sest kõigis neis on viimased kaks numbrit 1 ja 8 ning arv 18 ei jagu 4-ga.

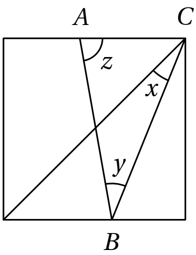
4. Lihtsustades saame $x(y+1) - y(x+1) = xy + x - yx - y = x - y$, st $x - y = 7$. Nüüd

$$y(x+2) - x(y+2) = yx + 2y - xy - 2x = -2(x-y) = -14\,.$$

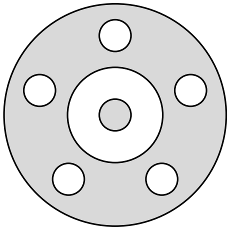
5. Et ühes tunnis on 60 minutit ja igas minutis 60 sekundit, siis on tunnis $60 \cdot 60 = 3600$ sekundit. Järelikult läbiks robot ühe tunniga $3600 \cdot 5 = 18000$ sentimeetrit ehk $\dfrac{18000}{100} = 180$ meetrit.

6. Et ruudu külje ja diagonaali vaheline nurk on suurusega 45°, siis kolmnurgas ABC (vt joonist 1) saame $(\angle x + 45^\circ) + \angle y + \angle z = 180^\circ$. Niisiis

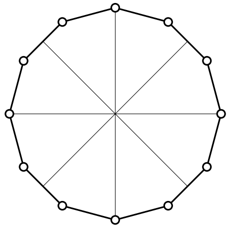
$$\angle z = 180^\circ - 45^\circ - \angle x - \angle y = 180^\circ - 45^\circ - 23^\circ - 32^\circ = 80^\circ\,.$$



Joonis 1



Joonis 2



Joonis 3

7. Halliks värvitud osa koosneb kahest eraldi tükist (vt joonist 2): välimise tüki pindala on $\pi \cdot 7^2 - \pi \cdot 3^2 - 5 \cdot \pi \cdot 1^2 = (49 - 9 - 5) \cdot \pi = 35 \cdot \pi$ ning sisemise tüki pindala on $\pi \cdot 1^2 = 1 \cdot \pi$. Halliks värvitud osa kogupindala on niisiis $(35 + 1) \cdot \pi$ ehk $36 \cdot \pi$.

8. Et võrdsed kujundid on muuhulgas võrdpindsed, peab esimene lõige läbima 12-nurga keskpunkti. Ainsaks võimaluseks lõigata teisel sammul mõlemad tükid kaheks võrdseks osaks on teha esimese lõikega ristuv lõige läbi 12-nurga keskpunkti. Kui esimene lõige tehti piki 12-nurga vastastippe või vastaskülgede keskpunkte läbivat sirget, siis saame kolmandal sammul jaotada olemasolevad 4 tükki veelkord kaheks võrdseks kujundiks, lisades kaks lõiget läbi 12-nurga keskpunkti, mis poolitavad seal eelnevate lõigetega tekkinud 4 nurka (vt joonist 3). Niiviisi saadud 8 tükki ei ole enam võimalik sirge lõikega kaheks võrdseks kujundiks jaotada.

9. Joostes skeemi $A \to B \to A \to C \to A$ järgi, läbib sitikas kaks korda lõigu AB ja kaks korda lõigu AC. Et sitika jooksumaa kogupikkus on 250 cm ja $|AB| = 100$ cm, siis $2|AC| = 250 \text{ cm} - 2 \cdot 100 \text{ cm} = 50$ cm ehk $|AC| = 25$ cm.

Joostes skeemi $B \to A \to B \to C \to B$ järgi, läbiks sitikas kaks korda lõigu AB ja kaks korda lõigu BC. Et $|AB| = 100$ cm ja $|BC| = |AB| - |AC| = 75$ cm, siis oleks sitika jooksumaa pikkus sel juhul $2 \cdot 100 \text{ cm} + 2 \cdot 75 \text{ cm} = 350$ cm.

10. Selle külgtahu mõõtmed, mida saab jaotada kaheks 2×4 ristkülikuks, saavad olla kas 4×4 või 2×8 ühikut. Teise külgtahu mõõtmed, mida saab jaotada kolmeks 2×4 ristkülikuks, saavad olla kas 4×6 või 2×12 ühikut. Et neil külgtahkudel on ühine serv (mis on risttahuka kõrgus), siis saavad külgtahkude mõõtmed olla kas 4×4 ja 4×6 ühikut või 2×8 ja 2×12 ühikut. Esimesel juhul on põhitahu mõõtmed 4×6 ühikut ning selle saab jaotada 3 ristkülikuks mõõtmetega 2×4; teisel juhul on põhitahu mõõtmed 8×12 ühikut ning selle saab jaotada 12 ristkülikuks mõõtmetega 2×4.

Eesti LXV matemaatikaolümpiaad

7. veebruar 2018 | Piirkonnavoor | **8. klass**

I osa vastused

1. 94.

2. 15.

3. 10.

4. 4.

5. −2.

6. 12 cm.

7. 44°.

8. 16.

9. $(100 - 25\pi)\ \mathrm{cm}^2$.

10. 12.

Lahendused

1. $3 \cdot \left(\frac{1}{3} + 3 \cdot \left(\frac{1}{3} + 3 \cdot \left(\frac{1}{3} + 3\right)\right)\right) = 3 \cdot \left(\frac{1}{3} + 3 \cdot \left(\frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{10}{3}\right)\right) = 3 \cdot \left(\frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{31}{3}\right) =$
$= 3 \cdot \frac{94}{3} = 94$.

2. Kui võtta karbist 3 kommi ära, siis järelejäävate kommide arv jagub nii 4-ga kui ka 6-ga. Et karbis oli algselt rohkem kui 5 ja vähem kui 25 kommi, siis järelejäävate kommide arv peab olema suurem kui 2 ja väiksem kui 22. Ainus nii 4-ga kui ka 6-ga jaguv arv selles vahemikus on 12. Seega on karbis $12 + 3$ ehk 15 kommi.

3. $\dfrac{2017 \cdot 0{,}2018}{2{,}017 \cdot 20{,}18} = \dfrac{2{,}017 \cdot 0{,}2018 \cdot 1000}{2{,}017 \cdot 0{,}2018 \cdot 100} = \dfrac{1000}{100} = 10$.

4. Arv $\overline{2018a}$ jagub 6-ga, kui ta jagub 2-ga ja 3-ga, st on paaris ja tema numbrite summa jagub 3-ga. Et arvu 2018 numbrite summa 11 annab 3-ga jagamisel jäägi 2, siis peab otsitav number a olema paaris ja andma 3-ga jagamisel jäägi 1. Ainus selline number on 4.

5. Lihtsustades saame:

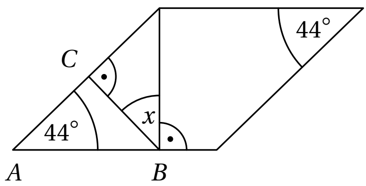
$$(x+1)(y-1) = xy - x + y - 1 = xy - (x - y) - 1 = 3 - 4 - 1 = -2.$$

6. Arvu 24 saab esitada kahe naturaalarvu korrutisena neljal viisil:

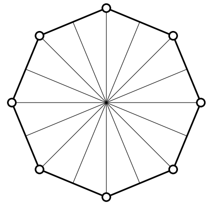
$$24 = 1 \cdot 24 = 2 \cdot 12 = 3 \cdot 8 = 4 \cdot 6.$$

Üldisust kitsendamata võime niisiis lugeda, et paar (a, b) on $(1, 24)$, $(2, 12)$, $(3, 8)$ või $(4, 6)$. Kui $(a, b) = (1, 24)$, siis võrdusest $a+b+c = 25$ saame $c = 0$, mis ei sobi. Kui $(a, b) = (3, 8)$, siis saame $c = 14$, mis ei sobi, sest kolmnurga mistahes kahe külje pikkuste summa on suurem kolmanda külje pikkusest, ent $3 + 8 < 14$. Kui $(a, b) = (4, 6)$, siis saame $c = 15$, mis ei sobi samuti, sest $4 + 6 < 15$. Jääb üle võimalus, et $(a, b) = (2, 12)$, siis $c = 11$ ning kolmnurk küljepikkustega 2 cm, 12 cm ja 11 cm on olemas ja selle pikima külje pikkus on 12 cm.

7. Et rööpküliku vastasnurgad on võrdse suurusega, siis täisnurkses kolmnurgas ABC (vt joonist 4) saame $(90^\circ - \angle x) + 44^\circ = 90^\circ$. Niisiis $90^\circ - \angle x = 90^\circ - 44^\circ$ ehk $\angle x = 44^\circ$.



Joonis 4



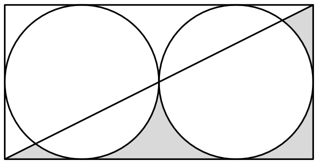
Joonis 5

8. Et võrdsed kujundid on muuhulgas võrdpindsed, peab esimene lõige läbima kaheksanurga keskpunkti. Ainsaks võimaluseks lõigata teisel sammul mõlemad tükid kaheks võrdseks osaks on teha esimese lõikega ristuv lõige läbi kaheksanurga keskpunkti. Kolmandal sammul on jällegi üksainus võimalus lõigata igaüks saadud 4 tükist kaheks võrdseks osaks: selleks tuleb teha kaks lõiget läbi kaheksanurga keskpunkti, mis poolitavad seal eelnevate lõigetega tekkinud 4 nurka. Kui esimene lõige tehti piki kaheksanurga vastastippe või vastaskülgede keskpunkte läbivat sirget, siis saame neljandal sammul jaotada olemasolevad 8 tükki veelkord kaheks võrdseks kujundiks, lisades neli lõiget läbi kaheksanurga keskpunkti, mis poolitavad seal eelnevate lõigetega tekkinud 8 nurka (vt joonist 5). Niiviisi saadud 16 tükki ei ole enam võimalik sirge lõikega kaheks võrdseks kujundiks jaotada.

9. Sümmeetria tõttu moodustab halliks värvitud osade pindalade summa parajasti poole ristküliku pindala ja kahe ringi kogupindala vahest (vt joonist 6):

$$S = \frac{1}{2} \cdot (S_{\text{ristkülik}} - 2S_{\text{ring}}) = \frac{1}{2}(10\text{ cm} \cdot 20\text{ cm} - 2 \cdot \pi \cdot (5\text{ cm})^2) = (100 - 25\pi)\text{ cm}^2.$$

10. Selle külgtahu mõõtmed, mida saab jaotada kaheks 2×4 ristkülikuks, saavad olla kas 4×4 või 2×8 ühikut. Teise külgtahu mõõtmed, mida saab



Joonis 6

jaotada kolmeks 2×4 ristkülikuks, saavad olla kas 4×6 või 2×12 ühikut. Et neil külgtahkudel on ühine serv (mis on risttahuka kõrgus), siis saavad külgtahkude mõõtmed olla kas 4×4 ja 4×6 ühikut või 2×8 ja 2×12 ühikut. Esimesel juhul on põhitahu mõõtmed 4×6 ühikut ning selle saab jaotada 3 ristkülikuks mõõtmetega 2×4; teisel juhul on põhitahu mõõtmed 8×12 ühikut ning selle saab jaotada 12 ristkülikuks mõõtmetega 2×4.

Eesti LXV matemaatikaolümpiaad

7. veebruar 2018 Piirkonnavoor **9. klass**

I osa vastused

1. 6,5.
2. 4.
3. 1090.
4. 36.
5. 4.
6. 120°.
7. $27\ \text{cm}^2$.
8. 16.
9. 50°.
10. 1.

Lahendused

1. $2\cdot\left(\frac{1}{2}+2\cdot\left(\frac{1}{2}+2\cdot\left(\frac{1}{2}+2x\right)\right)\right)=2\cdot\left(\frac{1}{2}+2\cdot\left(\frac{1}{2}+(1+4x)\right)\right)=2\cdot\left(\frac{1}{2}+(3+8x)\right)=$ $=7+16x$. Võrrandist $7+16x=111$ leiame, et $16x=111-7=104$ ehk $x=6{,}5$.

2. *Lahendus 1.* Summa $m+n$ võimalikud väärtused on 6, 7, 8 ja 9 ning vahe $m-n$ peab seejuures olema kas 4 või 5. Paneme veel tähele, et summa $m+n$ ja vahe $m-n$ on alati mõlemad paaris või mõlemad paaritud (sest nende vahe on $2n$, mis on paarisarv). Niisiis, kui $m+n=6$, siis $m-n=4$ ning $m=5$ ja $n=1$. Kui $m+n=7$, siis $m-n=5$ ning $m=6$ ja $n=1$; kui $m+n=8$, siis $m-n=4$ ning $m=6$ ja $n=2$; kui $m+n=9$, siis $m-n=5$ ning $m=7$ ja $n=2$. Kokku leidsime 4 sobivat paari (m,n).

Lahendus 2. Liites kaks antud võrratust, saame $8<2m<16$. Seega $4<m<8$ ehk m on 5, 6 või 7. Kui $m=5$, siis mõlemat antud võrratust rahuldab ainult $n=1$. Kui $m=6$, siis mõlemad antud võrratused on täidetud juhtudel $n=1$ ja $n=2$. Kui $m=7$, siis on jällegi ainult üks võimalus, $n=2$. Kokku on seega 4 sobivat paari (m,n).

3. Olgu puhkusepaketi hind ühele inimesele x eurot, siis algselt oli Martini pangaarvel $180+x$, Gregoril $208+x$ ja Allanil $820+x$ eurot. Niisiis

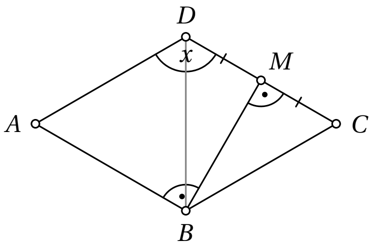
$$(180+x)+(208+x)+(820+x)=2018$$

ehk $1208+3x=2018$ ehk $3x=2018-1208=810$, kust leiame $x=270$. Allani pangaarvel oli seega algul $820+270=1090$ eurot.

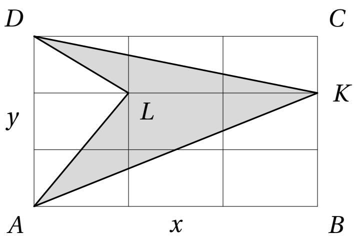
4. Antud võrdustest saame, et $\frac{a}{c} = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} = \frac{5}{6}$, ehk $a = \frac{5}{6}c$. Niisiis $6 = c - a = c - \frac{5}{6}c = \frac{1}{6}c$, kust leiame, et $c = 36$.

5. Kui $n = 0, 1, 2, 3$, siis summa $2018 + 4n$ väärtus on vastavalt 2018, 2022, 2026, 2030 — ükski neist arvudest ei jagu arvuga 9. Kui aga $n = 4$, siis summa $2018 + 4n = 2034$ jagub 9-ga.

6. Olgu rombi tipud A, B, C ja D, nagu näidatud joonisel 7. Et lõik BM on risti rombi küljega AB, siis on ta risti ka selle vastasküljega CD, st on kolmnurga BCD kõrgus. Kuna kõrgus BM on kolmnurgas BCD ühtlasi ka mediaan, siis $|BC| = |BD|$, ning et rombi küljed on võrdse pikkusega, siis ka $|BC| = |CD|$, st kolmnurk BCD on võrdkülgne. Niisiis $\angle BCD = 60^\circ$ ning $\angle x = 180^\circ - \angle BCD = 120^\circ$.



Joonis 7



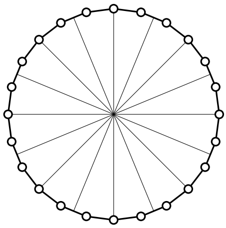
Joonis 8

7. Olgu suure ristküliku $ABCD$ külgede pikkused $|AB| = x$ ja $|AD| = y$ ning olgu halliks värvitud nelinurga ülejäänud tipud K ja L, nagu näidatud joonisel 8. Siis

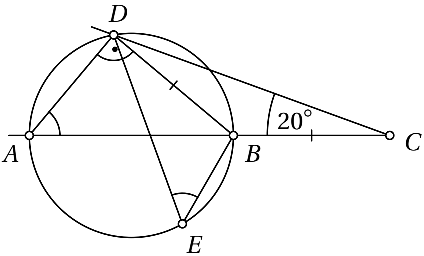
$$S_{LKA} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}x \cdot \frac{2}{3}y = \frac{2}{9}xy, \quad S_{LKD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}x \cdot \frac{1}{3}y = \frac{1}{9}xy,$$

samas kui $S_{ABCD} = xy$. Halliks värvitud nelinurga pindala 9 cm^2 moodustab seega $\frac{3}{9}$ ehk $\frac{1}{3}$ suure ristküliku pindalast. Suure ristküliku pindala on järelikult 27 cm^2.

8. Et võrdsed kujundid on muuhulgas võrdpindsed, peab esimene lõige läbima 24-nurga keskpunkti. Ainsaks võimaluseks lõigata teisel sammul mõlemad tükid kaheks võrdseks osaks on teha esimese lõikega ristuv lõige läbi 24-nurga keskpunkti. Kolmandal sammul on jällegi üksainus võimalus lõigata igaüks saadud 4 tükist kaheks võrdseks osaks: selleks tuleb teha kaks lõiget läbi 24-nurga keskpunkti, mis poolitavad seal eelnevate lõigetega tekkinud 4 nurka. Kui esimene lõige tehti piki 24-nurga vastastippe või vastaskülgede keskpunkte läbivat sirget, siis saame neljandal sammul jaotada olemasolevad 8 tükki veelkord kaheks võrdseks kujundiks, lisades neli lõiget läbi 24-nurga keskpunkti, mis poolitavad seal eelnevate lõigetega tekkinud 8 nurka (vt joonist 9). Niiviisi saadud 16 tükki ei ole enam võimalik sirge lõikega kaheks võrdseks kujundiks jaotada.



Joonis 9



Joonis 10

9. Et piirdenurgad DEB ja DAB toetuvad samale kõõlule DB (vt joonist 10), siis $\angle DEB = \angle DAB$. Ringjoone diameetrile AB toetuv piirdenurk ADB on täisnurk. Täisnurksest kolmnurgast ABD leiame nüüd, et

$$\angle DAB = 90^\circ - \angle DBA = 90^\circ - (180^\circ - \angle DBC) = 90^\circ - (\angle BCD + \angle BDC)\,.$$

Kuna kolmnurgas BDC on $|BC| = |BD|$, siis $\angle BDC = \angle BCD = 20^\circ$, mistõttu $\angle DAB = 90^\circ - 2 \cdot 20^\circ = 50^\circ$ ning ühtlasi ka $\angle DEB = 50^\circ$.

10. Selle külgtahu mõõtmed, mida saab jaotada kaheks 2×4 ristkülikuks, saavad olla kas 4×4 või 2×8 ühikut. Teise külgtahu mõõtmed, mida saab jaotada neljaks 2×4 ristkülikuks, saavad olla kas 4×8 või 2×16 ühikut. Et neil külgtahkudel on ühine serv (mis on risttahuka kõrgus), siis saavad külgtahkude mõõtmed olla kas 4×4 ja 4×8 ühikut või 2×8 ja 4×8 ühikut või 2×8 ja 2×16 ühikut. Esimesel juhul on põhitahu mõõtmed 4×8 ühikut ning selle saab jaotada 4 ristkülikuks mõõtmetega 2×4; teisel juhul on põhitahu mõõtmed 2×4 ühikut ning selle saab katta 1 ristkülikuga mõõtmetega 2×4; kolmandal juhul on põhitahu mõõtmed 8×16 ühikut ning selle saab jaotada 16 ristkülikuks mõõtmetega 2×4.

II osa lahendused

1. *Vastus:* a) üks neljandik; b) 6 spordijooki või 2 spordijooki ja 3 smuutit.

Lahendus 1. a) Et kogu rahasumma eest saab osta 24 spordijooki või 18 smuutit, siis 14 spordijoogi eest maksis Jüri $\frac{14}{24}$ kogu summast ja 3 smuuti eest $\frac{3}{18}$ kogu summast. Kokku on niisiis kulunud $\frac{14}{24}+\frac{3}{18}=\frac{7}{12}+\frac{1}{6}=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$ osa algsest summast ning alles on seega üks neljandik algsest summast.

b) Et alles on üks neljandik algsest summast, saab selle eest osta $\frac{24}{4}=6$ spordijooki. Ülejäänud võimalused saavad olla vaid sellised, kus mingi arvu spordijookide asemel ostab Jüri sama summa eest smuutisid. Kuna 24 spordijooki maksavad kokku sama palju kui 18 smuutit, siis maksavad 4 spordijooki sama palju kui 3 smuutit. Et arvud 4 ja 3 on ühistegurita, siis vähemat kui 4 spordijooki smuutidega asendada ei saa. Seega on teine võimalus osta $6-4=2$ spordijooki ja 3 smuutit ning rohkem võimalusi ei ole.

Lahendus 2. a) Olgu Jüri rahasumma S ning ühe spordijoogi hind x ja ühe smuuti hind y. Siis $S=24x=18y$, kust leiame, et $y=\frac{4}{3}x$. Ostudele juba kulunud rahasumma on niisiis $14x+3y=14x+3\cdot\frac{4}{3}x=18x$, mis moodustab algsest summast $24x$ kolm neljandikku. Alles on Jüril seega üks neljandik algsest summast.

b) Ostku Jüri allesoleva summa eest m spordijooki ja n smuutit. Neile ostudele kuluv summa on

$$mx+ny=mx+n\cdot\frac{4}{3}x=\left(m+n\cdot\frac{4}{3}\right)x\,,$$

mis peab olema võrdne allesoleva summaga $6x$. Seega $m+n\cdot\frac{4}{3}=6$, kust

$$n\cdot\frac{4}{3}=6-m\,,\tag{1}$$

Et $6-m$ on täisarv, peab arv $4n$ ja seega ka arv n jaguma 3-ga. Kuna kogu allesolev summa on $6x$, millest 6 smuuti ostuks ei jätku, siis saab n olla ainult 0 või 3 ning võrdusest (1) leiame vastavad m väärtused 6 ja 2.

2. *Vastus:* 60.

Lahendus 1. Tingimusi 1 ja 2 rahuldavad 5-ga algavad telefoninumbrid on kujul $5******$, kus tärnid tähistavad numbreid 1, 2, 3, 4, 6 ja 7 mingis järjekorras.

Tingimus 3 tähendab, et numbrid 1, 2 ja 3 peavad esinema (mingi kolme tärni asemel) just selles järjekorras. Selleks on 20 võimalust:

$5123***$	$51*23**$	$51**2*3$	$5*12**3$	$5**123*$
$512*3**$	$51*2*3*$	$51***23$	$5*1*23*$	$5**12*3$
$512**3*$	$51*2**3$	$5*123**$	$5*1*2*3$	$5**1*23$
$512***3$	$51**23*$	$5*12*3*$	$5*1**23$	$5***123$

Tingimus 4 tähendab, et numbrid 7 ja 6 peavad esinema just selles järjekorras (sest number 5 on igal juhul neist eespool). Niisiis on meil igal ülaltoodud juhul 3 võimalust numbri 4 paigutamiseks (ühe asemele ülejäänud kolmest tärnist) ning iga sellise paigutuse korral on numbrite 6 ja 7 asukohad üheselt määratud.

Kokku saame niisiis $3 \cdot 20 = 60$ sellist telefoninumbrit, mis rahuldavad kõiki tingimusi.

Lahendus 2. Sarnaselt lahendusega 1 leiame, et tingimuste 1 ja 2 tõttu peavad telefoninumbrid olema kujul $5******$, kus tärnid tähistavad numbreid 1, 2, 3, 4, 6 ja 7 mingis järjekorras.

Tingimus 4 tähendab, et numbrid 7 ja 6 peavad esinema mingi kahe tärni asemel selles järjekorras (sest number 5 on igal juhul neist eespool). Selleks on 15 võimalust:

$576****$	$57***6*$	$5*7*6**$	$5**76**$	$5***76*$
$57*6***$	$57****6$	$5*7**6*$	$5**7*6*$	$5***7*6$
$57**6**$	$5*76***$	$5*7***6$	$5**7**6$	$5****76$

Igal ülaltoodud juhul võib number 4 paikneda ükskõik millise tärni asemel, ent seejärel peame numbrid 1, 2 ja 3 paigutama ülejäänud kolme tärni asemele just selles järjekorras.

Kokku saame niisiis $4 \cdot 15 = 60$ sellist telefoninumbrit, mis rahuldavad kõiki tingimusi.

Lahendus 3. Uurime esmalt, millises järjekorras saavad omavahel paikneda numbrid 1, 2, 3, 6 ja 7. Numbrite 1, 2 ja 3 paigutamiseks just selles järjekorras viiele positsioonile on 10 võimalust:

$123**$	$12**3$	$1*2*3$	$*123*$	$*1*23$
$12*3*$	$1*23*$	$1**23$	$*12*3$	$**123$

Et number 5 peab olema telefoninumbri alguses, st kõigist siin vaadeldavatest numbritest vasakul, siis number 7 paikneb kindlasti vasakpoolse ja number 6 parempoolse tärni kohal, sest muidu oleksid numbrid 5, 6 ja 7 omavahel keelatud järjekorras. Seega saavad kõik 4-st erinevad numbrid asetseda omavahel täpselt 10 erinevas järjekorras. Numbri 4 võime lisada suvalisse kohta nende vahele või kõige lõppu, st selleks on igal vaadeldaval juhul 6 võimalust. Järelikult on registris kokku $10 \cdot 6$ ehk 60 telefoninumbrit.

Lahendus 4. Tingimusi 1 ja 2 rahuldavad 5-ga algavad telefoninumbrid on kujul $5{*}{*}{*}{*}{*}{*}$, kus tärnid tähistavad numbreid 1, 2, 3, 4, 6 ja 7 mingis järjekorras. Kui tingimusi 3 ja 4 mitte arvestada, on meil esimese tärni asemele numbri valikuks 6 võimalust, seejärel teise tärni asemele numbri valikuks 5 võimalust jne — kokku $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ võimalust.

Numbrite 1, 2 ja 3 omavaheline järjekord on igas sellises telefoninumbris üks kuuest võimalikust: 123, 132, 213, 231, 312 või 321, kusjuures igaüks neist esineb vaadeldava 720 telefoninumbri seas sama arv kordi (sest igast järjekorraga 123 telefoninumbrist saame nende numbrite vastava vahetuse abil järjekorraga 132, 213, 231, 312 või 321 telefoninumbri ning kõik need telefoninumbrid on erinevad). Niisiis on vaadeldavaid telefoninumbreid, mis rahuldavad ka tingimust 3, st kus numbrite 1, 2 ja 3 omavaheline järjekord on 123, täpselt $\dfrac{720}{6} = 120$.

Nende 120 telefoninumbri seas on omakorda ühepalju neid, kus numbrite 6 ja 7 omavaheline järjekord on 76, ning neid, kus see järjekord on 67. Et tingimuse 4 tõttu peab see järjekord olema 76 (sest järjekorra 67 korral jääb numbrite 1, 2, 3, 4 kustutamisel alles arv 567), siis on kõiki tingimusi rahuldavaid telefoninumbreid $\dfrac{120}{2} = 60$.

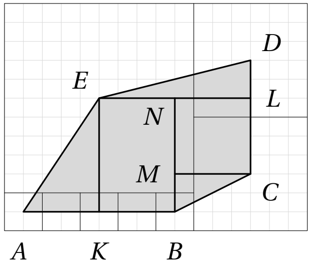
3. *Vastus:* 64 cm^2.

Lahendus 1. Jaotame ristküliku ruutudeks küljepikkusega 1 cm ning valime punktid K, L, M ja N nii, nagu näidatud joonisel 11. Lisades joonisele lõigud EK, EL, NB ja MC jaotame viisnurga viieks tükiks: ristkülikuteks $EKBN$ ja $NMCL$ ja täisnurkseteks kolmnurkadeks AKE, ELD, BMC. Leiame nende tükkide pindalad:

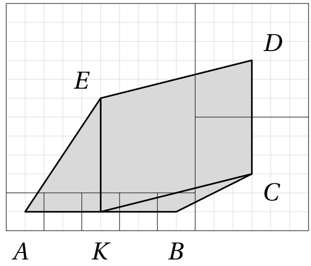
$$\begin{aligned}
S_{AKE} &= \frac{1}{2} \cdot 4\text{ cm} \cdot 6\text{ cm} = 12\text{ cm}^2,\\
S_{EKBN} &= 4\text{ cm} \cdot 6\text{ cm} = 24\text{ cm}^2,\\
S_{NMCL} &= 4\text{ cm} \cdot 4\text{ cm} = 16\text{ cm}^2,\\
S_{ELD} &= \frac{1}{2} \cdot 8\text{ cm} \cdot 2\text{ cm} = 8\text{ cm}^2,\\
S_{BMC} &= \frac{1}{2} \cdot 4\text{ cm} \cdot 2\text{ cm} = 4\text{ cm}^2.
\end{aligned}$$

Viisnurga $ABCDE$ pindala S on nende viie tüki pindalade summa:

$$\begin{aligned} S &= S_{AKE} + S_{EKBN} + S_{NMCL} + S_{ELD} + S_{BMC} = \\ &= 12\ \mathrm{cm}^2 + 24\ \mathrm{cm}^2 + 16\ \mathrm{cm}^2 + 8\ \mathrm{cm}^2 + 4\ \mathrm{cm}^2 = 64\ \mathrm{cm}^2\,. \end{aligned}$$



Joonis 11



Joonis 12

Lahendus 2. Jaotame ristküliku ruutudeks küljepikkusega 1 cm ning valime punkti K nii, nagu näidatud joonisel 12. Lisades joonisele lõigud EK ja KC jaotame viisnurga kolmeks tükiks: kolmnurkadeks AKE ja KBC ning nelinurgaks $KCDE$. Selle nelinurga küljed EK ja DC on võrdse pikkusega 6 cm ning mõlemad paralleelsed algse ristküliku vertikaalse küljega ja seega paralleelsed ka omavahel. Seega $KCDE$ on rööpkülik. Leiame nende tükkide pindalad:

$$\begin{aligned} S_{AKE} &= \frac{1}{2} \cdot 4\ \mathrm{cm} \cdot 6\ \mathrm{cm} = 12\ \mathrm{cm}^2, \\ S_{KBC} &= \frac{1}{2} \cdot 4\ \mathrm{cm} \cdot 2\ \mathrm{cm} = 4\ \mathrm{cm}^2, \\ S_{KCDE} &= 6\ \mathrm{cm} \cdot 8\ \mathrm{cm} = 48\ \mathrm{cm}^2. \end{aligned}$$

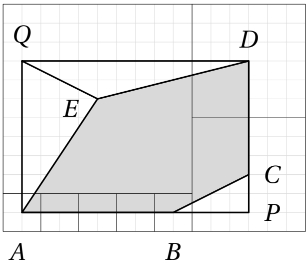
Viisnurga $ABCDE$ pindala S on nende kolme tüki pindalade summa:

$$\begin{aligned} S &= S_{AKE} + S_{KBC} + S_{KCDE} = \\ &= 12\ \mathrm{cm}^2 + 4\ \mathrm{cm}^2 + 48\ \mathrm{cm}^2 = 64\ \mathrm{cm}^2\,. \end{aligned}$$

Lahendus 3. Jaotame ristküliku ruutudeks küljepikkusega 1 cm ning vaatleme vähimat sellist ristkülikut $APDQ$, mille küljed on paralleelsed algse ristküliku külgedega ja mis sisaldab viisnurka $ABCDE$ (vt joonist 13). Ristkülik $APDQ$ koosneb viisnurgast $ABCDE$ ja kolmnurkadest AQE, DQE ja BPC. Leiame nende kolmnurkade ja ristküliku $APDQ$ pindalad:

$$S_{AQE} = \frac{1}{2} \cdot 8\ \mathrm{cm} \cdot 4\ \mathrm{cm} = 16\ \mathrm{cm}^2,$$

$$S_{DQE} = \frac{1}{2} \cdot 12\text{ cm} \cdot 2\text{ cm} = 12\text{ cm}^2,$$
$$S_{BPC} = \frac{1}{2} \cdot 4\text{ cm} \cdot 2\text{ cm} = 4\text{ cm}^2,$$
$$S_{APDQ} = 12\text{ cm} \cdot 8\text{ cm} = 96\text{ cm}^2.$$



Joonis 13

Viisnurga $ABCDE$ pindala S avaldub nüüd nende kaudu:

$$\begin{aligned} S &= S_{APDQ} - S_{AQE} - S_{DQE} - S_{BPC} = \\ &= 96\text{ cm}^2 - 16\text{ cm}^2 - 12\text{ cm}^2 - 4\text{ cm}^2 = 64\text{ cm}^2\,. \end{aligned}$$

II osa lahendused

1. *Vastus:* 20 5-eurost, 10 8-eurost ja 12 10-eurost.

Olgu 8-euroste meenete arv a, siis 5-euroste meenete arv on $2a$ ning 5-euroste ja 8-euroste meenete eest maksti kokku $2a \cdot 5 + a \cdot 8 = 18a$ eurot. Kuna kõigi meenete eest makstud eurode koguarv 300 jagub 10-ga ning 10-euroste meenete eest makstud eurode arv jagub samuti 10-ga, siis peab ka arv $18a$, mis on nende kahe arvu vahe, jaguma 10-ga, st arv a peab jaguma 5-ga. Et iga liiki meeneid osteti vähemalt 6, siis $a \geqslant 6$ ning vähim sobiv arv on $a = 10$, mille korral 10-euroste meenete arvuks leiame $\frac{300-18a}{10} = \frac{120}{10} = 12$. See on ka ainus võimalus, sest $a \geqslant 15$ korral oleks 5-euroste ja 8-euroste meenete eest kokku makstud vähemalt $18 \cdot 15$ ehk 270 eurot, mistõttu 10-euroste meenete jaoks jääks mitte rohkem kui $300 - 270$ ehk 30 eurot, millest ei piisa vähemalt 6 sellise meene ostmiseks.

2. *Vastus:* 4.

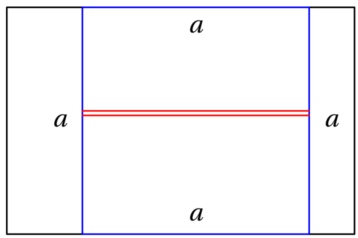
Kui valida kõik erineva kaaluga kristallid, siis nende kogukaal on

$$10+12+14+\ldots+88+90 = \underbrace{(10+90)+(12+88)+\ldots+(48+52)}_{\text{20 paari}} + 50 = 20 \cdot 100 + 50 = 2050$$

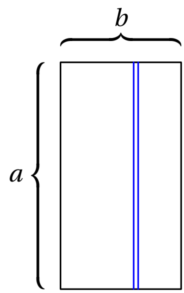
grammi. Et kogukaal oleks 2018 grammi, tuleb valikust välja jätta üks või mitu kristalli, mis kaaluvad kokku $2050 - 2018 = 32$ grammi. Et kolm või enam kristalli kaaluvad kokku vähemalt $10 + 12 + 14 = 36$ grammi, tuleb välja jätta kas üks või kaks kristalli. Selliste kristallide valikuks on kokku 4 võimalust: 10-grammine ja 22-grammine, 12-grammine ja 20-grammine, 14-grammine ja 18-grammine või üks 32-grammine kristall.

3. *Vastus:* 86,25 cm^2.

Olgu ruudu küljepikkus a, siis tema ümbermõõt on $4a$. Selle ruudu kahe ristkülikukujulise osa ümbermõõtude summas 45 cm on sisse arvestatud kõik ruudu küljed (joonisel 14 sinisega) ja lisaks nende ristkülikukujuliste tükkide omavahel kokkupuutuvad küljed, mis kumbki on pikkusega a (joonisel 14 kahekordne punane joon). Seega $4a+2a = 45$ cm, kust $a = 7{,}5$ cm.



Joonis 14



Joonis 15

Lõikame keskmise ruudu algsest ristkülikust välja ja viime läbi sarnase arutelu järelejääval ristkülikul, mis moodustub algse ristküliku kahest äärmisest osast (joonis 15). Ümbermõõtude summas 38 cm on sisse arvestatud kõik uue ristküliku küljed ja lisaks kahe ristkülikukujulise tüki omavahel kokkupuutuvad küljed, mis jällegi on pikkusega a ehk 7,5 cm. Olgu uue ristküliku teise külje pikkus b. Saame võrrandi $2(a+b)+2a = 38$ cm, kust $b = 4$ cm.

Algse ristküliku küljepikkused on a ja $a+b$ ehk 7,5 cm ja 11,5 cm ning pindala seega 86,25 cm^2.

II osa lahendused

1. *Vastus:* $(1, 1)$.

   Oletame, et teine väide on tõene ehk $n+m = 5k$ mingi täisarvu k korral. Et n ja m on positiivsed, on ka k positiivne. Siis esimene väide on väär, sest $n + 6m = n + m + 5m = 5(k + m)$, kusjuures $k + m > 1$.

   Seega ei saa esimene ja teine väide mõlemad tõesed olla. Järelikult peavad kolmas ja neljas väide kindlasti tõesed olema. See tähendab, et arv $4m - 3$ jagub arvuga m. Et arv $4m$ jagub arvuga m, peab arv 3 jaguma arvuga m. Seega $m = 1$ või $m = 3$. Kui $m = 1$, siis $n = 4 \cdot 1 - 3 = 1$ ja et tõene on ka esimene väide, saame siit sobiva paari $(1, 1)$. Kui $m = 3$, siis $n = 4 \cdot 3 - 3 = 9$. Kuna aga paari $(9, 3)$ puhul on esimene ja teine väide mõlemad väärad, siis see paar ei sobi.

2. *Lahendus 1.* Laiendades teist liidetavat teguriga a ja kolmandat liidetavat teguriga ab ning ning lihtsustades lugejates ja nimetajates üksliikmed võrduse $abc = 1$ abil, saame vajaliku võrduse teisendada kujule

$$\frac{a}{1 + a + ab} + \frac{ab}{a + ab + 1} + \frac{1}{ab + 1 + a} = 1.$$

   Vasakul pool on murrud nüüd ühisel nimetajal. Et lugejate summa võrdub ühise nimetajaga, on murdude summa tõepoolest 1.

   Lahendus 2. Võrduse vasaku poole murdude summa avaldub kujul

$$\frac{a(1+b+bc)(1+c+ca) + b(1+c+ca)(1+a+ab) + c(1+a+ab)(1+b+bc)}{(1 + a + ab)(1 + b + bc)(1 + c + ca)}.$$

   Avades lugejas sulud, saame pärast sarnaste liikmete koondamist

$$\begin{aligned} &a + b + c + 2ab + 2bc + 2ca + 6abc + a^2c + b^2a + c^2b + \\ &\quad + 2a^2bc + 2b^2ca + 2c^2ab + a^2b^2c + b^2c^2a + c^2a^2b. \end{aligned}$$

   Nimetajas aga saame

$$\begin{aligned} &1 + a + b + c + 2ab + 2bc + 2ca + 4abc + a^2c + b^2a + c^2b + \\ &\quad + 2a^2bc + 2b^2ca + 2c^2ab + a^2b^2c + b^2c^2a + c^2a^2b + a^2b^2c^2. \end{aligned}$$

   Arvestades, et $abc = 1$, lihtsustuvad nii lugeja kui ka nimetaja kujule

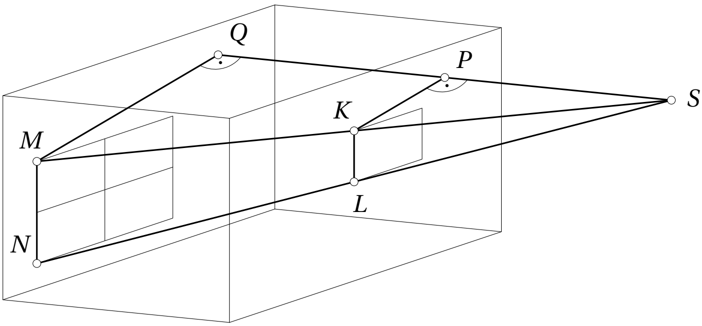
$$6 + 3a + 3b + 3c + 3ab + 3bc + 3ca + a^2c + b^2a + c^2b.$$

   Järelikult on murd võrdne 1-ga.

3. *Vastus:* 60 cm.

Asugu venna silm punktis S ning olgu K ja L venna silmale lähema võrgusilma mingid kaks naabertippu (vt joonist 16). Olgu M ja N vastavalt kiirte SK ja SL lõikepunktid reisivoodi kaugema küljega; tekkivad kolmnurgad SKL ja SMN on sarnased, sest nende vastavad nurgad on võrdsed. Et läbi lähema külje võrgusilma paistab täpselt neli võrgusilma kaugemalt küljelt (mis saavad seal paikneda ainult 2×2 asetuses), siis $|MN| = 2|KL|$. Sarnasuse tõttu $\dfrac{|SM|}{|SK|} = \dfrac{|MN|}{|KL|} = 2$.

Olgu P ja Q silmale lähimad punktid vastavalt reisivoodi lähemal ja kaugemal küljel; siis $|SP|$ on otsitav kaugus. Tekkivad täisnurksed kolmnurgad SPK ja SQM on samuti sarnased, sest neil on ühine teravnurk tipu S juures. Seega $\dfrac{|SQ|}{|SP|} = \dfrac{|SM|}{|SK|} = 2$ ja $|SP| = |SQ| - |PQ| = 2|SP| - |PQ|$, mistõttu $|SP| = |PQ|$. Ülesande andmete põhjal aga $|PQ| = 60$ cm.



Joonis 16

4. *Vastus:* 292.

Mustaks värvitakse kas kolm järjestikust ruutu ühes reas või veerus või kolm suvalist ruutu 2×2 alal.

Ridu ja veerge on 8×8 ruudustikus kokku 16 ning kolme järjestikuse ruudu valikuks ühes reas või veerus on alati 6 võimalust. Järelikult on sellisel viisil kolme ruudu värvimiseks $16 \cdot 6$ ehk 96 võimalust.

Valimaks 2×2 ala on $7 \cdot 7$ ehk 49 võimalust ning värvimata jäetava ruudu valikuks sellel 2×2 alal on 4 võimalust. Järelikult on sellisel viisil kolme ruudu värvimiseks $49 \cdot 4$ ehk 196 võimalust.

Kokku saame $96 + 196$ ehk 292 võimalust.

Lahendused

1. *Vastus:* hõbedat.

   Olgu esimest, teist ja kolmandat sulamit lõpptulemuses vastavalt 1, 2 ja 3 ühikut. Et hõbeda osakaal esimeses, teises ja kolmandas sulamis on vastavalt $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{5}$ ja $\frac{3}{4}$ ning kulla osakaal vastavalt $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$ ja $\frac{1}{4}$, siis hõbedat on lõpptulemuses $\frac{1}{3}+2\cdot\frac{2}{5}+3\cdot\frac{3}{4}$ ehk $\frac{203}{60}$ ja kulda $\frac{2}{3}+2\cdot\frac{3}{5}+3\cdot\frac{1}{4}$ ehk $\frac{157}{60}$ ühikut. Seega sisaldab lõpptulemus hõbedat rohkem kui kulda.

2. *Vastus:* $2+\sqrt{3}$.

   Lahendus 1. Küljepikkusega 1 võrdkülgse kolmnurga kõrgus on

   $$\sqrt{1^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

   Suurema ruudu diagonaali pikkus on niisiis $d=\frac{\sqrt{3}}{2}+1+\frac{\sqrt{3}}{2}=1+\sqrt{3}$ ning suurema ruudu pindala on

   $$S=\frac{1}{2}d^2=\frac{1}{2}\cdot(1+\sqrt{3})^2=\frac{1+2\sqrt{3}+3}{2}=2+\sqrt{3}.$$

   Lahendus 2. Nagu lahenduses 1 leiame võrdkülgse kolmnurga kõrguse $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Pool suure ruudu diagonaalist on niisiis $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}$. Suure ruudu küljepikkus on Pythagorase teoreemi põhjal $\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right)^2}$ ehk $\sqrt{2+\sqrt{3}}$. Otsitav pindala on järelikult $2+\sqrt{3}$.

   Lahendus 3. Nagu lahenduses 2 leiame poole suure ruudu diagonaalist, $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}$. Sellise kaatetiga võrdhaarse täisnurkse kolmnurga pindala on $\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right)^2$ ehk $\frac{2+\sqrt{3}}{4}$. Suur ruut koosneb neljast sellisest kolmnurgast, mistõttu suure ruudu pindala on $2+\sqrt{3}$.

3. *Vastus:* 54, 81, 108, 135, 162, 189, 216, 243.

Lahendus 1. Olgu Mari mõeldud arv x ja tulemuseks saadud kolmekohaline arv $4x = \overline{abc}$. Siis $3x = \overline{bca}$, millest tulenevalt $3\overline{abc} = 4\overline{bca}$. Saame võrrandi $300a + 30b + 3c = 400b + 40c + 4a$, kust $296a = 370b + 37c$ ehk

$$8a = 10b + c. \tag{2}$$

Juhul $b \geqslant a$ saaks võrdus (2) kehtida vaid siis, kui $a = b = c = 0$, mis pole võimalik. Kui aga $b \leqslant a - 3$, siis annab seos (2) $8a \leqslant 10a - 30 + c$, kust $2a + c \geqslant 30$. Viimane võrratus samuti kehtida ei saa. Seega kas $b = a - 1$ või $b = a - 2$. Seos (2) annab esimesel juhul $c = 10 - 2a$ ja teisel juhul $c = 20 - 2a$. Vaadates esimesel juhul läbi kõik võimalused, saame arvuks $\overline{abc}$ kas 216, 324, 432 või 540, teisel juhul aga kas 648, 756, 864 või 972. Arv x ehk neljandik sellest on vastavalt kas 54, 81, 108, 135, 162, 189, 216 või 243. Kõik need rahuldavad ka ülesande tingimusi.

Lahendus 2. Olgu $4x = \overline{abc}$ ja $3x = \overline{bca}$. Siis

$$x = \overline{abc} - \overline{bca} = (100a + 10b + c) - (100b + 10c + a) = 9(11a - 10b - c). \tag{3}$$

Et x jagub 9-ga, siis jaguvad 9-ga ka tema kordsed $\overline{abc}$ ja $\overline{bca}$. Järelikult jagub 9-ga ka ristsumma $a+b+c$. Et $11a-10b-c = 3(4a-3b)-(a+b+c)$, saame esitusest (3), et x peab jaguma 27-ga. Kõik 27-ga jaguvad arvud x, mille puhul $3x$ ja $4x$ on kolmekohalised, on 54, 81, 108, 135, 162, 189, 216 ja 243. Kõik need rahuldavad ka ülesande tingimusi.

4. *Vastus:* $(1,1)$, $(-2,-2)$, $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$, $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

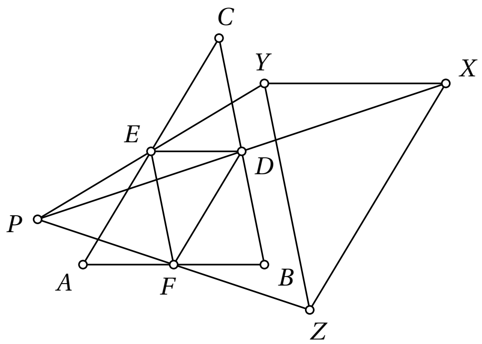
Lahutades esimesest võrrandist teise, saame pärast tegurdamist

$$(x - y)(x + y - 1) = 0.$$

Kui $x = y$, siis süsteemi esimene võrrand taandub kujule $x^2+x-2 = 0$, kust $x = 1$ või $x = -2$. Vastavalt ka $y = 1$ ja $y = -2$. Kui aga $x+y = 1$, siis pärast asendust $y = 1-x$ saame süsteemi esimesest võrrandist $x^2 - x - 1 = 0$. See annab $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, vastavalt $y = 1 - x = \frac{1 \mp \sqrt{5}}{2}$.

5. *Lahendus 1.* Konstruktsiooni põhjal on DE kolmnurga PXY kesklõik. Et DE on ühtlasi kolmnurga ABC kesklõik, siis $|XY| = 2|DE| = |AB|$ (vt joonist 17). Analoogselt $|YZ| = 2|EF| = |BC|$ ja $|ZX| = 2|FD| = |CA|$. Seega on kolmnurgad ABC ja XYZ võrdsed tunnuse KKK põhjal.

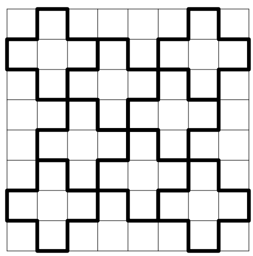
Lahendus 2. Vastavalt tingimustele on kolmnurk XYZ kolmnurga DEF homoteetne teisendus keskpunktiga P ja teguriga 2. Kolmnurk ABC on aga tema kesklõikudest moodustuva kolmnurga DEF homoteetne teisendus keskpunktiga mediaanide lõikepunktis ja teguriga -2. Seega on kolmnurgad ABC ja XYZ mõlemad sarnased kolmnurgaga DEF teguriga 2 ning sellest tulenevalt ka omavahel teguriga $2:2$ ehk 1.



Joonis 17

6. *Vastus:* 8.

Ruudustiku igal äärel saab katta ülimalt 2 ruutu, sest tükke mahub kõrvuti asetama ülimalt 2 ja iga tükk saab katta vaid 1 ääreruudu. Seega on võimalik katta kokku ülimalt 8 ääreruutu. Koos muude ruutudega on niisiis võimalik katta ülimalt $8 + 6^2$ ehk 44 ruutu. Et iga tükk katab 5 ruutu, on nende suurim arv $\left\lfloor \frac{44}{5} \right\rfloor$ ehk 8. Joonis 18 näitab, et 8 on tõesti võimalik.



Joonis 18

Eesti LXV matemaatikaolümpiaad

7. veebruar 2018 Piirkonnavoor **11. klass**

Lahendused

1. *Vastus:* 41.

Majandi A karjas annab lehm päevas $\frac{140}{2\cdot 3}$ ehk $\frac{70}{3}$ liitrit piima. Majandi B karjas annab lehm päevas $\frac{625}{4\cdot 6}$ ehk $\frac{625}{24}$ liitrit piima. Olgu x ja y vastavalt majandite A ja B testitud lehmade arvud. Saame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} \frac{70}{3}x + \frac{625}{24}y = 1000, \\ x - y = 9. \end{cases}$$

Teise võrrandi poolte korrutamisel arvuga $\frac{70}{3}$ ja lahutamisel esimesest võrrandist saame $\left(\frac{625}{24}+\frac{70}{3}\right)y = 1000 - \frac{70}{3}\cdot 9$ ehk $\frac{1185}{24}y = 790$, kust $y = \frac{24\cdot 790}{1185} = 16$. Järelikult $x = y + 9 = 25$. Kokku lüpsis jõudluskontroll $25 + 16$ ehk 41 lehma.

2. *Vastus:* 682.

Lahendus 1. Kaks naaberruutu saavad olla ruudustiku ühes reas või ühes veerus.

Ridu on 20×18 ruudustikus 20 ning igas reas on 18 ruutu ja kahe naaberruudu valikuks seega 17 võimalust. Veerge on ruudustikus 18 ning igas veerus on 20 ruutu ja kahe naaberruudu valikuks seega 19 võimalust. Järelikult on naaberruutude paari valikuks kokku $20\cdot 17+18\cdot 19 = 682$ võimalust.

Lahendus 2. Värvime kaks ruutu ükshaaval. Vaatame läbi kolm juhtu vastavalt sellele, kus paikneb esimene värvitav ruut.

- Asugu esimene värvitav ruut ruudustiku nurgas. Nurgaruudu valikuks on 4 võimalust, seejärel teise värvitava ruudu valikuks on 2 võimalust. Kahe ruudu ükshaaval valimiseks on järelikult $4\cdot 2$ ehk 8 võimalust.
- Asugu esimene värvitav ruut ruudustiku äärel, kuid mitte nurgas. Sellise ruudu valikuks on $2\cdot(20-2)+2\cdot(18-2)$ ehk 68 võimalust. Teise värvitava ruudu valikuks on siis 3 võimalust. Kahe ruudu ükshaaval valimiseks on sellisel juhul $68\cdot 3$ ehk 204 võimalust.

- Asugu esimene värvitav ruut mujal kui ruudustiku äärel. Sellise ruudu valikuks on $(20-2)\cdot(18-2)$ ehk 288 võimalust. Teise värvitava ruudu valikuks on siis 4 võimalust. Kahe ruudu ükshaaval valimiseks on järelikult $288\cdot 4$ ehk 1152 võimalust.

Kokku on kahe ruudu ükshaaval valimiseks $8+204+1152$ ehk 1364 võimalust. Et ruutude valimise järjekord pole oluline, on kahe naaberruudu värvimisvõimalusi $\dfrac{1364}{2}$ ehk 682.

3. *Vastus:* ei.

Olgu tellise vastastippe ühendava diagonaali pikkus d. Siis kehtib võrdus $a^2+b^2+c^2=d^2$. Paarisarvu ruut annab 4-ga jagamisel jäägi 0, paaritu arvu ruut aga jäägi 1. Et $\text{SÜT}(a,b)=\text{SÜT}(b,c)=\text{SÜT}(c,a)=1$, peab küljepikkuste seas olema vähemalt kaks paaritut arvu. Seega on arvude a^2, b^2 ja c^2 jäägid 4-ga jagamisel kas 1, 1 ja 0 mingis järjestuses või kõik 1-d. Arvu $a^2+b^2+c^2$ ehk d^2 jääk 4-ga jagamisel on siis vastavalt 2 või 3. Kuid ühegi täisarvu ruut ei anna 4-ga jagamisel jääki 2 või 3.

4. *Lahendus 1.* Ülesande võrratus on samaväärne võrratusega

$$2x^2+y^2+2z^2-2xy-2yz\geqslant 0.$$

Paneme tähele, et

$$\begin{aligned}2x^2+y^2+2z^2-2xy-2yz &= x^2+y^2+z^2-2xy-2yz+2xz+x^2+z^2-2xz\\ &= (y-x-z)^2+(x-z)^2.\end{aligned}$$

Kahe reaalarvu ruudu summa on aga mittenegatiivne.

Lahendus 2. Ülesande võrratus on samaväärne võrratusega

$$4x^2+2y^2+4z^2-4xy-4yz\geqslant 0.$$

Paneme tähele, et

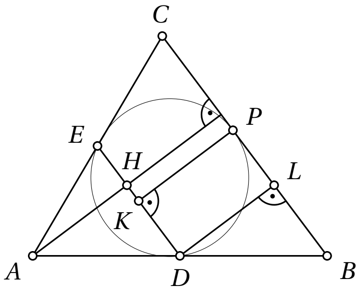
$$4x^2+2y^2+4z^2-4xy-4yz=(2x-y)^2+(2z-y)^2.$$

Kahe reaalarvu ruudu summa on aga mittenegatiivne.

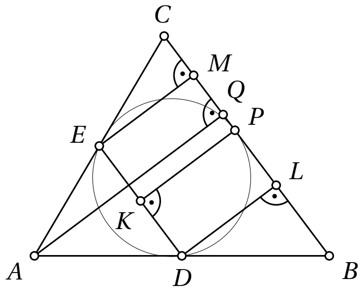
Lahendus 3. Ülesande võrratus on samaväärne võrratusega

$$y^2-2(x+z)y+2(x^2+z^2)\geqslant 0.$$

Vaatleme avaldist $y^2-2(x+z)y+2(x^2+z^2)$ ruutkolmliikmena y suhtes; tema diskriminant on $4(x+z)^2-8(x^2+z^2)$ ehk $8xz-4x^2-4z^2$ ehk $-(2x+2z)^2$. Et see on mittepositiivne, on ruutvõrrandil $y^2-2(x+z)y+2(x^2+z^2)=0$ ülimalt üks reaalarvuline lahend. Seega kui x ja z on fikseeritud reaalarvud, siis kehtib kas iga reaalarvu y korral $y^2-2(x+z)y+2(x^2+z^2)\geqslant 0$ või iga reaalarvu y korral $y^2-2(x+z)y+2(x^2+z^2)\leqslant 0$. Ruutliikme kordaja positiivsuse tõttu on võimalik vaid esimene variant.



Joonis 19



Joonis 20

5. *Vastus:* 12 m.

Lahendus 1. Olgu külgede AB ja AC keskpunktid vastavalt D ja E ning punktist A tõmmatud kõrguse ja kesklõigu DE lõikepunkt H (vt joonist 19). Siis $|AD| = 13$ m ja $|AE| = 15$ m ning kiirteteoreemi põhjal $|AH| = 12$ m. Olgu punktist P sirgele DE tõmmatud ristlõigu aluspunkt K ja punktist D sirgele BC tõmmatud ristlõigu aluspunkt L. Siis DL on paralleelne kolmnurga ABC tipust A tõmmatud kõrgusega ning järelikult $|DL| = 12$ m. Kuna ringjoone kõõl DE on kolmnurga ABC kesklõiguna paralleelne küljega BC, mis on ringjoone puutujaks punktis P, siis punkt K poolitab kõõlu DE. Nüüd

$$|BP| = |BL| + |LP| = |BL| + |DK| = |BL| + \frac{|DE|}{2} = |BL| + \frac{|DH| + |HE|}{2}.$$

Pythagorase teoreemist kolmnurkades BLD, AHD ja AHE saame vastavalt $|BL| = |DH| = 5$ m ja $|HE| = 9$ m. Seega $|BP| = 12$ m.

Lahendus 2. Olgu külgede AB ja AC keskpunktid vastavalt D ja E ning punktist A tõmmatud kõrguse aluspunkt Q (vt joonist 20). Pythagorase teoreemist kolmnurkades ABQ ja ACQ saame vastavalt $|BQ| = 10$ m ja $|CQ| = 18$ m, mistõttu $|BC| = 28$ m.

Olgu punktidest D ja E sirgele BC tõmmatud ristlõikude aluspunktid vastavalt L ja M. Sarnastest kolmnurkadest ABQ ja DBL saame, et

$$\frac{|BL|}{|BQ|} = \frac{|DB|}{|AB|} = \frac{1}{2},$$

st $|BL| = \dfrac{|BQ|}{2} = 5$ m. Analoogiliselt saame sarnastest kolmnurkadest ACQ ja ECM, et $|CM| = \dfrac{|CQ|}{2} = 9$ m. Seega $|LM| = |BC| - |BL| - |CM| = 14$ m.

Olgu punktist P sirgele DE tõmmatud ristlõigu aluspunkt K. Kuna ringjoone kõõl DE on kolmnurga ABC kesklõiguna paralleelne küljega BC, mis on ringjoone puutujaks punktis P, siis punkt K poolitab kõõlu DE. Ühtlasi ka punkt P poolitab lõigu LM, sest $EDLM$ on ristkülik ja lõik KP on risti selle külgedega DE ja LM. Nüüd

$$|BP| = |BL| + |LP| = |BL| + \frac{|LM|}{2}.$$

Eespool leidsime, et $|BL| = 5$ m ja $|LM| = 14$ m. Seega $|BP| = 12$ m.

6. *Vastus:* 33.

Lahendus 1. Jaotame naturaalarvud 1 kuni 100 rühmadesse selle järgi, milline on nende suurim paaritu tegur. Ülesandes kirjeldatud paarides erinevad arvud teineteisest vaid arvu 2 astendaja poolest. Seega kuuluvad mõlemad liikmed alati ühte ja samasse rühma.

Rühmas $\{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64\}$ on 7 arvu, mistõttu saab selle elementidest moodustada kuni 3 paari, nii et ükski arv mitmes paaris ei esine. Rühma $\{3, 6, 12, 24, 48, 96\}$ elementidest saab sarnaselt moodustada 3 paari, rühma $\{5, 10, 20, 40, 80\}$ elementidest 2, rühma $\{7, 14, 28, 56\}$ elementidest 2, rühma $\{9, 18, 36, 72\}$ elementidest 2 ja rühma $\{11, 22, 44, 88\}$ elementidest 2 paari. Arvudest $13, 15, \ldots, 49$ igaüks kuulub rühma, milles on 2 või 3 elementi, iga sellise rühma elementidest saab moodustada 1 paari. Arvudega $51, 53, \ldots, 99$ paare moodustada ei saa. Seega on kokku võimalik moodustada kuni 33 paari.

Lahendus 2. Arvust 50 suuremate paaritute arvudega $51, 53, \ldots, 99$ (neid arve on kokku 25) paare moodustada ei saa.

Igast arvukolmikust $\{k, 2k, 4k\}$, kus k on paaritu ning $50 < 4k \leqslant 100$, peab üks arv paaride moodustamisest välja jääma, sest $8k > 100$. Selliseid arvukolmikuid on 7, kus vastavalt $k = 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25$ ning $2k = 26, 30, 34, 38, 42, 46, 50$ ja $4k = 52, 60, 68, 76, 84, 92, 100$.

Arvuviisikust $\{5, 10, 20, 40, 80\}$ peab samuti üks arv paaride moodustamisest välja jääma, sest $2 \cdot 80 > 100$.

Et eespool vaadeldud paaride moodustamisest väljajäävate arvude hulgad on ühisosata, peab kokku välja jääma vähemalt $25+7+1 = 33$ arvu ja seega on võimalik moodustada maksimaalselt 33 paari.

Sobivad 33 paari leiame, alustades paarist $(1, 2)$ ja võttes iga järgneva paari $(k, 2k)$ korral arvuks k vähima veel valimata arvudest. Nii saame paarid $(1, 2)$, $(3, 6)$, $(4, 8)$, $(5, 10)$, $(7, 14)$, $(9, 18)$, $(11, 22)$, $(12, 24)$, $(13, 26)$, $(15, 30)$, $(16, 32)$, $(17, 34)$, $(19, 38)$, $(20, 40)$, $(21, 42)$, $(23, 46)$, $(25, 50)$, $(27, 54)$, $(28, 56)$, $(29, 58)$, $(31, 62)$, $(33, 66)$, $(35, 70)$, $(36, 72)$, $(37, 74)$, $(39, 78)$, $(41, 82)$, $(43, 86)$, $(44, 88)$, $(45, 90)$, $(47, 94)$, $(48, 96)$ ja $(49, 98)$.

Lahendused

1. *Vastus:* kõik naturaalarvud $n \geqslant 10$.

Esimesel n viskel liigub Toomas vastavalt $1, 2, 4, \ldots, 2^{n-1}$ meetrit tagasi, järgneval viskel aga $0{,}999 \cdot 2^n$ meetrit edasi. Et $1 + 2 + 4 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1$, asub Toomas pärast neid liikumisi algsest asukohast tagapool parajasti siis, kui $(2^n - 1) - (0{,}999 \cdot 2^n) > 0$ ehk $2^n > 1000$. See võrratus kehtib parajasti siis, kui $n \geqslant 10$.

2. *Vastus:* 0,7.

Lahendus 1. Olgu see parabool funktsiooni $p(x) = ax^2 + bx + c$ graafikuks. Et graafik läbib koordinaatide alguspunkti, siis $a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 0$, kust $c = 0$. Et graafik läbib punkti koordinaatidega $(10; 3{,}5)$, siis $a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c = 3{,}5$; võrdust $c = 0$ arvestades järeldub sellest $10a + b = 0{,}35$. Et kohal $x = 10$ on haripunkt, siis $-\dfrac{b}{2a} = 10$ ehk $20a + b = 0$. Korrutades süsteemi

$$\begin{cases} 10a + b = 0{,}35\,, \\ 20a + b = 0 \end{cases}$$

esimese võrrandi pooled 2-ga ja lahutades neist teise võrrandi vastavad pooled, saame $b = 0{,}7$.

Puutuja tõus kohal $x = 0$ on funktsiooni $p(x)$ tuletise $p'(x) = 2ax + b$ väärtus sellel kohal, st $p'(0) = b = 0{,}7$.

Lahendus 2. Olgu see parabool ruutfunktsiooni $p(x)$ graafikuks. Et parabooli haripunkti x-koordinaat 10 on funktsiooni $p(x)$ nullkohtade aritmeetiline keskmine ja üks nullkoht on 0, siis teine nullkoht on 20. Niisiis esitub see funktsioon kujul $p(x) = ax(x - 20)$. Tingimusest $p(10) = 3{,}5$ saame, et $a \cdot 10 \cdot (-10) = 3{,}5$ ehk $a = -0{,}035$ ning $p(x) = -0{,}035x^2 + 0{,}7x$.

Puutuja tõus kohal $x = 0$ on funktsiooni $p(x)$ tuletise $p'(x) = -0{,}07x + 0{,}7$ väärtus sellel kohal, st $p'(0) = 0{,}7$.

3. *Vastus:* a) ei; b) jah.

Lahendus 1.

a) Kui $a = 1$ ja $b = 4$, siis $6a + 6b = 30$ ja $6a + b = 10$. Arv 30 jagub 15-ga, kuid arv 10 ei jagu 15-ga.

b) Eeldame, et arv $6a+11b$ jagub 15-ga. Et 15 jagub 3-ga, siis arv $6a+11b$ jagub 3-ga. Et $6a$ jagub 3-ga, siis järeldub sellest, et $11b$ jagub 3-ga. Kuna 11 ja 3 on ühistegurita, siis peab selleks arv b jaguma 3-ga. Siis ka $2b$ jagub 3-ga, mistõttu $10b$ jagub 15-ga. Seega $6a+b$ jagub 15-ga, kuna esitub 15-ga jaguvate arvude $6a+11b$ ja $10b$ vahena.

Lahendus 2.

a) Olgu b suvaline täisarv, mis ei jagu 3-ga. Valime a nii, et $a+b$ jaguks 5-ga. Sellisel juhul jagub arv $6(a+b)$ ehk $6a+6b$ nii 5-ga kui ka 3-ga. Et 5 ja 3 on ühistegurita, siis $6a+6b$ jagub ka 15-ga. Kuna aga b ei jagu 3-ga, siis ei jagu 3-ga ka arv $5b$, sest 3 ja 5 on ühistegurita. Siis ei jagu arv $5b$ ka 15-ga, mis tähendab, et ka arv $6a+b$ ehk $(6a+6b)-5b$ ei jagu 15-ga.

b) Eeldame, et arv $6a+11b$ jagub 15-ga. Siis ka arv $6a-4b$ ehk $2(3a-2b)$ jagub 15-ga. Kuna 2 ja 15 on ühistegurita, siis ka arv $3a-2b$ jagub 15-ga. Sellest omakorda järeldub, et arv $-12a-2b$ ehk $-2(6a+b)$ jagub 15-ga. Et -2 ja 15 on ühistegurita, siis ka arv $6a+b$ jagub 15-ga.

4. Avades antud võrratuses kõik sulud ja viies miinusmärgiga liikmed teisele poole, saame samaväärse võrratuse

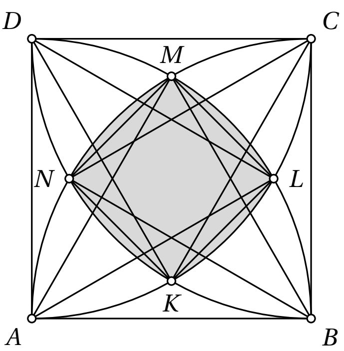
$$z^2 + y < x^2 + x + y^2 + 2xy + z.$$

See on omakorda saadav võrratuste $y < x+z$ ja $z^2 < (x+y)^2$ pooliti liitmisel. Esimene võrratus $y < x+z$ kehtib kolmnurgavõrratuse põhjal. Teine on saadav kolmnurgavõrratusest $z < x+y$ poolte ruututõstmise teel ja kehtib samuti, sest z ja $x+y$ on positiivsed.

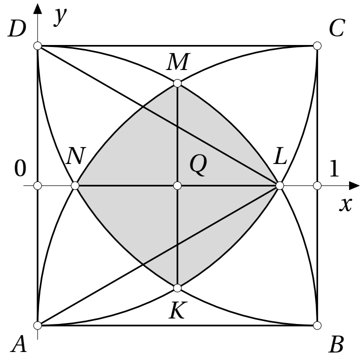
5. *Vastus:* $1-\sqrt{3}+\dfrac{\pi}{3}$.

Lahendus 1. Olgu antud ruut $ABCD$. Veerandringid lõikuvad omavahel neljas punktis; olgu ruudu külgedele AB, BC, CD ja DA lähimad lõikepunktid vastavalt K, L, M ja N (vt joonist 21). Sümmeetria kaalutlustel on $KLMN$ ruut. Seega otsitav pindala on ruudu $KLMN$ pindala ja nelja veerandringi kaartele KL, LM, MN ja NK vastavate segmentide pindalade summa.

Kolmnurkade ABM, BCN, CDK ja DAL kõik küljed on ruudu $ABCD$ küljega võrdse pikkusega. Nende võrdkülgsete kolmnurkade kõrgus on $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, mistõttu ruudu $KLMN$ diagonaali pikkus on $1-2\cdot\left(1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ehk $\sqrt{3}-1$. Et $\angle LAM = \angle BAM+\angle LAD-\angle BAD = 30^\circ$ ja sarnaselt ka $\angle MBN = \angle NCK = \angle KDL = 30^\circ$, siis iga vaadeldava segmendi pindala on $\dfrac{\pi}{12}-\dfrac{1}{2}\sin 30^\circ$ ehk



Joonis 21



Joonis 22

$\frac{\pi}{12} - \frac{1}{4}$. Halliks värvitud kujundi pindala on seega $\frac{1}{2} \cdot (\sqrt{3}-1)^2 + 4 \cdot \left(\frac{\pi}{12} - \frac{1}{4}\right)$ ehk $1 - \sqrt{3} + \frac{\pi}{3}$.

Lahendus 2. Sarnaselt lahendusega 1 tähistame punktid A, B, C, D ja K, L, M, N ning paneme tähele, et kolmnurk DAL on võrdkülgne kõrgusega $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Valime koordinaatsüsteemi nii, et koordinaatide alguspunkt on lõigu AD keskpunktis ning x-telje positiivne suund läbib punkte N ja L (vt joonist 22). Punkt $Q\left(\frac{1}{2};0\right)$ koos lõikudega QK, QL, QM ja QN jaotavad halliks värvitud kujundi neljaks võrdseks osaks. Leiame lõikude QM ja QL vahele jääva osa pindala. Veerandring keskpunktiga A on osa ringjoonest $x^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = 1$ ning rahuldab seega võrrandit $y = \sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2}$. Niisiis QM ja QL vahele jääva kujundiosa pindala avaldub kujul

$$\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \left(\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2}\right) \mathrm{d}x = \int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \sqrt{1-x^2}\, \mathrm{d}x - \left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4}\right).$$

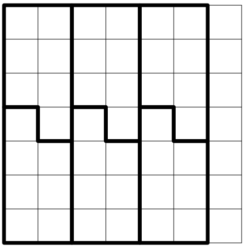
Et $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ on funktsiooni $F(x) = \frac{1}{2} \cdot (x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x)$ tuletis, siis

$$\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \sqrt{1-x^2}\, \mathrm{d}x = \left(\frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{\pi}{6}\right) - \left(\frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{\pi}{12}\right) = \frac{\pi}{12}.$$

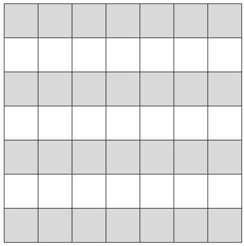
Kokkuvõttes on otsitav pindala $4 \cdot \left(\frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}\right)$ ehk $\frac{\pi}{3} - \sqrt{3} + 1$.

6. *Vastus:* 6.

Lahendus 1. Nagu näha jooniselt 23, saame 6 kujundit lubatud viisil ruudustikule paigutada. Näitame nüüd, et 7 kujundit ei ole võimalik paigutada.



Joonis 23

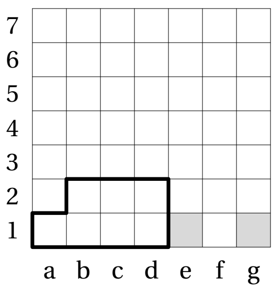


Joonis 24

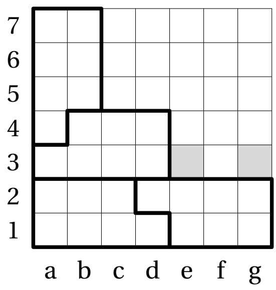
Värvime ruudustiku read üle ühe halliks, nagu näidatud joonisel 24, nii et saame 4 värvitud ja 3 värvimata rida. Mistahes lubatud viisil ruudustikule paigutatud kujund katab kas 4 värvitud ja 3 värvimata ruutu või 3 värvitud ja 4 värvimata ruutu. Et 7 kujundit kataksid kõik ruudud ning värvitud ruute on ruudustikus 7 võrra rohkem, siis peaks 7 kujundi korral igaüks neist katma 4 värvitud ja 3 värvimata ruutu. Selliselt paigutatud kujund katab aga igal tema alla jääval värvitud real kas 4 või 2 ruutu, mistõttu igal värvitud real jääks vähemalt üks ruut katmata — vastuolu.

Lahendus 2. Samuti nagu lahenduses 1 veendume, et 6 kujundit saab ruudustikule paigutada.

Olgu nüüd ruudustikule paigutatud 7 kujundit, siis on kõik ruudud kaetud. Tähistame ruudustiku read numbritega 1 kuni 7 ja veerud tähtedega a kuni g. Oletame, et mingi nurgaruut on kaetud kujundi peene otsaga; üldisust kitsendamata katku ruutu a1 peene otsaga rõhtne kujund (vt joonist 25). Siis aga halliks värvitud ruute e1 ja g1 ei saa korraga katta. Järelikult on kõik nurgaruudud kaetud kujundite jämedate otstega.



Joonis 25



Joonis 26

Üldisust kitsendamata katku ruutu a1 oma jämeda otsaga rõhtne kujund. Kui nüüd ruutu a7 kataks rõhtne kujund oma jämeda otsaga, siis ei saaks ruute a3 ja a5 korraga katta. Seega ruutu a7 katab püstne kujund oma jämeda otsaga. Kui selle püstse kujundi peen ots asuks ruudustiku servast eemal, siis tema „puuduva ruudu“ kohta ei saaks katta. Seega püstne kujund katab a-veerus ruudud a4, a5, a6 ja a7, nagu näidatud joonisel 26. Ruutu a3 peab siis katma rõhtne kujund peene otsaga. Et sama kujund katab ka ruudud d3 ja d4, siis saab ruutudest d1 ja d2 selle, mis on veel katmata, katta vaid rõhtse kujundiga. Nüüd aga pole halliks värvitud ruute e3 ja g3 võimalik korraga katta.

Lahendus 3. Samuti nagu lahenduses 1 veendume, et 6 kujundit saab ruudustikule paigutada.

Olgu nüüd ruudustikule paigutatud 7 kujundit, siis rõhtseid ja püstseid kujundeid ei saa olla võrdselt. Eeldame üldisust kitsendamata, et rõhtseid kujundeid on rohkem, siis püstseid kujundeid on ülimalt 3. Et need 3 püstset kujundit katavad kokku ülimalt 6 veeru ruute, siis järelikult leidub veerg, mis on kaetud ainult rõhtsete kujunditega. Et veerus on 7 ruutu, st paaritu arv, siis peab vähemalt üks ruut selles veerus olema kaetud rõhtse kujundi peene otsaga. See kujund ulatub vasakule või paremale veel üle 3 veeru. Selle kujundi „puuduva ruudu“ kohta kattev rõhtne kujund ulatub aga vastassuunas veel üle 2 või 3 veeru. Kui oletada, et ta ulatub selles suunas vaid üle 2 veeru, peab ta ulatuma sinna oma jämeda otsaga. Neid kaht ruutu, mis jäävad selle kujundi jämeda otsa ja ruudustiku serva vahele, saaks katta ainult vastastikku asetseva kahe püstse kujundi peente otstega. Kuid selliselt paigutatuna nõuaksid need kaks püstset kujundit kokku 8 rida, mis pole võimalik. Järelikult ulatub ka teine vaadeldav rõhtne kujund vastassuunas veel üle 3 veeru, mistõttu see veerg, mis in kaetud ainult rõhtsete kujunditega, saab olla ainult keskmine. Keskmisest veerust nii vasakul kui ka paremal on aga 3 veergu, millest igaühe katmine muuhulgas püstsete kujunditega tähendaks, et kummalgi pool peab olema vähemalt 2 püstset kujundit, ehk kokku vähemalt 4 püstset kujundit – vastuolu.

Eesti LXV matemaatikaolümpiaad

7. veebruar 2018 Piirkonnavoor **Hindamisjuhised**

Lp hindaja!

Käesolevas esitame kõigepealt hindamise üldised põhimõtted ning seejärel järjekorras konkreetsed hindamisjuhised iga ülesande kohta eraldi.

1. Õpilase lahenduseks tuleb esmajoones lugeda see, mida õpilane on ülesande kohta vormistanud puhtandina (sh mustandipaberile selgesti arusaadavalt kirja pandud mõttekäigud, kui need on ametlikult puhtandipaberilt viidatud). Töö mustandi arvestamine või mittearvestamine ülesande lahenduse hulka on hindaja otsustada (või piirkonna hindamiskomisjoni ühine otsus kõigi ülesannete suhtes), kuid see peab toimuma kõigis töödes ühtmoodi.

2. Alljärgnevas on 7.–9. klassi olümpiaadi I osa (testi) ning kõikide ülejäänud ülesannete hindamisjuhised esitatud erinevalt.

   Testi iga küsimuse jaoks on eraldi loetletud või kirjeldatud vastused, mille eest tuleks anda vastavalt kaks punkti või üks punkt (st vastavaid punkte ühe küsimuse piires *ei tule* liita). Testiülesannete lahendusi õpilased ei pea esitama, vaid kirjutavad ülesannete lehel vastavale punktiirile või ülesande tekstis viidatud kohta ainult vastuse.

   Seevastu kõigi teiste ülesannete kohta tuleb esitada täielikud lahendused, ainult vastustest ei piisa. Nende ülesannete lahendused on hindamisjuhistes jaotatud võimalust mööda osadeks (etappideks) ning on näidatud iga osa eest antav punktide arv (st ühe ülesande eest antava punktisumma saamiseks *tuleb* lahenduse erinevate osade eest antud punktid liita).

   Mõnes skeemis on mõne etapi kirjelduse all („*Sealhulgas:*“ järel) alapunktidena välja toodud konkreetse etapi väiksemate osade eest antavad punktid – need lähevad käiku juhul, kui lahenduse see etapp on ebatäielik või vigane ja selle osa täispunkte seetõttu ei saa anda. Alamosade punktid tuleb omavahel samuti liita.

3. Žürii lahendustes ja käesolevates hindamisjuhistes on ülesannete vastused esitatud enamasti ainult ühel, lihtsaimal või kõige tõenäolisemalt esineval kujul. Hindamisel (sh testid!) tuleb võrdselt õigeks lugeda ka sama vastuse teised mõistlikud esitusviisid – sh taandatud hariliku murruna, segaarvuna, kümnendmurruna, sõnadega välja kirjutatuna –, seejuures ka osana pikemalt (nt täislausega, koos sobiva liigisõnaga või koos selgitustega) antud

vastusest. Juhud, kus ülesande sisu tingib erandeid sellest üldreeglist, on eraldi mainitud vastava ülesande hindamisjuhises.

Ühik arvu järel on vastuses vajalik juhul, kui ülesandes on küsitud suurust, mis teatud ühikutes avaldub. Näiteks küsimusele „Kui suur pindala …?“ saab õige vastus olla „120 cm^2“, kuid mitte „120“ (kui ülesande tekstis pole kasutatud ühikuta pikkusi/pindalasid). Teistes ühikutes väljendatud sama suurus tuleb lugeda õigeks, näiteks vastused „120 cm^2“ ja „1,2 dm^2“ on samaväärsed. Ühik vastuses ei ole nõutav, kui ülesandes on küsitud kindlate ühikute arvu. Näiteks küsimusele „Mitu ruutsentimeetrit …?“ antud vastused „120“ ja „120 cm^2“ tuleb võrdväärseks lugeda samal alusel nagu küsimusele „Mitu karu …?“ antud vastused „3“ ja „3 karu“ (vastus koos liigisõnaga). Teistes ühikutes antud vastus tuleb aga lugeda valeks, vastused „120 cm^2“ ja „1,2 dm^2“ ei ole siin samaväärsed.

4. Mõnede ülesannete kohta, mida saab lahendada mitmel oluliselt erineval viisil, anname eraldi hindamisskeemid erinevate lahendusviiside jaoks. Rõhutame, et iga konkreetset mittetäielikku lahendust tuleb hinnata ainult *ühe* sellise skeemi järgi (selle järgi, mille kohaselt ta saaks kõige rohkem punkte).

5. Enamiku ülesannete korral (v.a testid ja tõestusülesanded) on hindamisjuhiste lõpus eraldi näidatud, mitu punkti anda ainult õige vastuse eest. See hinne on mõeldud juhuks, kui töös on ülesande kohta toodud ainult õige vastus või õige vastus koos mõttekäiguga, mis ei annaks skeemi järgi rohkem punkte kui on ette nähtud õige vastuse eest.

6. Kahtlemata esineb õpilaste töödes ka mõttekäike, mis ei mahu meie poolt pakutud skeemidesse. Selliste lahenduste hindamisel tuleb lähtuda sellest, *kui suur osa* antud ülesandest on õpilasel lahendatud, kasutades lahenduse üksikute osade kaalu määramisel võimaluse korral võrdluseks punktide jaotust meie pakutud hindamisskeemides.

7. *Mistahes* täieliku ja matemaatiliselt korrektse lahenduse eest tuleb igal juhul anda maksimumpunktid, sõltumata selle lahenduse pikkusest või otstarbekusest võrreldes teiste lahendusviisidega.

Eesti LXV matemaatikaolümpiaad

7. veebruar 2018 Piirkonnavoor **7. klass**

I osa hindamisjuhised

1.	◦ Antud õige vastus 100,9:	2 p
2.	◦ Antud õige vastus 24:	2 p
3.	◦ Antud õige vastus 4:	2 p
4.	◦ Antud õige vastus -14:	2 p
5.	◦ Antud õige vastus 180 ilma ühikuta või ühikuga m või m/h:	2 p
6.	◦ Antud õige vastus 80°:	2 p
	◦ Antud vastuseks 80 ilma kraadimärgita:	1 p
7.	◦ Antud õige vastus 36 ilma ühikuta:	2 p
	◦ Antud vastuseks 36 koos ühikuga:	1 p
8.	◦ Antud õige vastus 8:	2 p
9.	◦ Antud õige vastus 350 cm:	2 p
	◦ Antud vastuseks 350 ilma ühikuta või vale ühikuga:	1 p
10.	◦ Antud õige vastus 3:	2 p

I osa hindamisjuhised

1.
- Antud õige vastus 94: 2 p

2.
- Antud õige vastus 15: 2 p

3.
- Antud õige vastus 10: 2 p

4.
- Antud õige vastus 4: 2 p
- Antud vastus 4 koos ühe või enama vale vastusega: 0 p

5.
- Antud õige vastus -2: 2 p

6.
- Antud õige vastus 12 cm: 2 p
- Antud vastuseks 12 ilma ühikuta või vale ühikuga: 1 p

7.
- Antud õige vastus 44°: 2 p
- Antud vastuseks 44 ilma kraadimärgita: 1 p

8.
- Antud õige vastus 16: 2 p

9.
- Antud õige vastus $(100 - 25\pi)\ \mathrm{cm}^2$ sulgudega või ilma: 2 p
- Antud vastuseks $100 - 25\pi$ ilma ühikuta või vale ühikuga: 1 p
- Antud vastuseks 21,5 või täpsem arv õige ühikuga või ilma ühikuta: 1 p

10.
- Antud õige vastus 12: 2 p

Eesti LXV matemaatikaolümpiaad

7. veebruar 2018 Piirkonnavoor **9. klass**

I osa hindamisjuhised

1. ◦ Antud õige vastus 6,5: 2 p

2. ◦ Antud õige vastus 4: 2 p

3. ◦ Antud õige vastus 1090: 2 p

4. ◦ Antud õige vastus 36: 2 p

5. ◦ Antud õige vastus 4: 2 p

6. ◦ Antud õige vastus 120°: 2 p
◦ Antud vastuseks 120 ilma kraadimärgita: 1 p

7. ◦ Antud õige vastus 27 cm^2: 2 p
◦ Antud vastuseks 27 ilma ühikuta või vale ühikuga: 1 p

8. ◦ Antud õige vastus 16: 2 p

9. ◦ Antud õige vastus 50°: 2 p
◦ Antud vastuseks 50 ilma kraadimärgita: 1 p

10. ◦ Antud õige vastus 1: 2 p

II osa hindamisjuhised

1. - Lahendatud a-osa: 3 p

     Sealhulgas:
     - Leitud spordijookide ja smuutide eest makstud summad osakaaludena mingist kindlast summast (Jüri algsest rahasummast, ühe spordijoogi hinnast vms): *1 p*
     - Leitud spordijookide ja smuutide eest kokku makstud summa osakaaluna samast summast: *1 p*
     - Leitud allesjäänud raha osakaaluna algsest summast: *1 p*
   - Lahendatud b-osa: 4 p

     Sealhulgas:
     - Leitud võimalus osta allesjäänud raha eest 6 spordijooki: *1 p*
     - Leitud võimalus osta allesjäänud raha eest 2 spordijooki ja 3 smuutit: *1 p*
     - Põhjendatud (nt spordijookide arvude läbivaatusega) teiste võimaluste puudumine: *2 p*

   Ainult a-osa õige vastuse ($\frac{1}{4}$) eest ilma selgitusteta anda 1 punkt ja b-osa täieliku õige vastuse (6 spordijooki või 2 spordijooki ja 3 smuutit) eest ilma põhjenduseta 1 punkt.

2. Anname neli eraldi hindamisskeemi erinevate lähenemiste puhuks.

   Skeem lahendusele, mis alustab numbrite 1, 2 *ja* 3 *paigutamisest* 6 *positsioonile (žürii lahendus 1).*
   - Leitud ja põhjendatud (läbivaatuse teel või muul viisil) numbrite 1, 2 ja 3 paigutuste arv 6 positsioonile: 3 p
   - Märgitud, et numbri 4 paigutamiseks jääb alati 3 võimalust: 1 p
   - Põhjendatud, et numbrite 5, 6 ja 7 paigutus on seejärel üheselt määratud: 1 p
   - Õigesti arvutatud lõppvastus: 2 p

   Skeem lahendusele, mis alustab numbrite 6 *ja* 7 *paigutamisest* 6 *positsioonile (žürii lahendus 2).*
   - Leitud ja põhjendatud (läbivaatuse teel või muul viisil) numbrite 6 ja ja 7 paigutuste arv 6 positsioonile: 3 p

- Märgitud, et numbri 4 paigutamiseks jääb alati 4 võimalust: 1 p
- Põhjendatud, et numbrite 5, 1, 2 ja 3 paigutus on seejärel üheselt määratud: 1 p
- Õigesti arvutatud lõppvastus: 2 p

Skeem lahendusele, mis alustab numbrite 1, 2 *ja* 3 *paigutamisest* 5 *positsioonile (žürii lahendus 3).*

- Leitud ja põhjendatud (läbivaatuse teel või muul viisil) numbrite 1, 2 ja 3 paigutuste arv 5 positsioonile: 3 p
- Põhjendatud, et numbrite 6 ja 7 paigutus ülejäänud kahele positsioonile on seejärel üheselt määratud: 1 p
- Märgitud, et numbri 4 lisamiseks jääb alati 6 võimalust: 1 p
- Õigesti arvutatud lõppvastus: 2 p

Skeem jagamist kasutavale lahendusele (žürii lahendus 4).

- Leitud ja põhjendatud telefoninumbrite arv ilma tingimusi 3 ja 4 arvestamata: 3 p
- Põhjendatud, et tingimuse 3 arvestamisel on telefoninumbrite arv 6 korda väiksem: 2 p
- Põhjendatud, et tingimuse 4 arvestamisel on telefoninumbrite arv 2 korda väiksem: 1 p
- Õigesti arvutatud lõppvastus: 1 p

Ainult õige vastuse (60) eest ilma selgitusteta anda 2 punkti.

3. Anname kolm eraldi hindamisskeemi erinevate lähenemiste puhuks.

Skeem lahendusele kujundi viieks tükiks jaotamise kaudu ristküliku külgedega paralleelsete lõigetega (žürii lahendus 1).

- Tükeldatud viisnurk kolmnurkadeks AKE, ELD ja BMC ning ristkülikuteks $EKBN$ ja $NMCL$: 1 p
- Leitud kolmnurga AKE pindala: 1 p
- Leitud ristküliku $EKBN$ pindala: 1 p
- Leitud ristküliku $NMCL$ pindala: 1 p
- Leitud kolmnurga ELD pindala: 1 p
- Leitud kolmnurga BMC pindala: 1 p
- Leitud viisnurga $ABCDE$ pindala: 1 p

Skeem lahendusele kujundi kolmeks tükiks jaotamise kaudu (žürii lahendus 2).

- Tükeldatud viisnurk kolmnurkadeks AKE ja KBC ning nelinurgaks $KCDE$: 2 p
- Põhjendatud, et $KCDE$ on rööpkülik: 1 p
- Leitud kolmnurga AKE pindala: 1 p

- Leitud kolmnurga KBC pindala: 1 p
- Leitud rööpküliku $KCDE$ pindala: 1 p
- Leitud viisnurga $ABCDE$ pindala: 1 p

Skeem lahendusele vähima hõlmava ristküliku kaudu (žürii lahendus 3).

- Võetud kasutusele vähim antud kujundit sisaldav algse ristküliku külgedega paralleelsete külgedega ristkülik (žürii lahenduses $APDQ$): 2 p
- Leitud selle ristküliku pindala: 1 p
- Leitud kolmnurga AQE pindala: 1 p
- Leitud kolmnurga DQE pindala: 1 p
- Leitud kolmnurga BPC pindala: 1 p
- Leitud viisnurga $ABCDE$ pindala: 1 p

Skeemide viimase rea eest punkti mitte anda, kui vastuses on ühik puudu või vale.

Ainult õige vastuse ($64\ \mathrm{cm}^2$) eest ilma selgitusteta anda 2 punkti, ühiku puudumisel või vale ühiku korral 1 punkt.

II osa hindamisjuhised

1.
- Põhjendatud, et 5-euroste ja 8-euroste meenete eest maksti kokku 10-ga jaguv arv eurosid: 2 p
- Leitud koos põhjendusega, et 5-euroste ja 8-euroste meenete eest maksti kokku $18a$ eurot, kus a on 8-euroste meenete arv (või $9b$ eurot, kus b on 5-euroste meenete arv): 2 p
- Põhjendatud, et $a < 15$ (või $b < 30$): 1 p
- Põhjendatud, et ainus võimalus on $a = 10$ (või $b = 20$): 1 p
- Õigesti leitud kahe teise liigi meenete arvud: 1 p

Ainult täieliku õige vastuse (õiged meenete arvud vastavalt nende hinnale) eest ilma selgitusteta anda 2 punkti. Kui arvud pole seostatud meenete hindadega (nt on vastatud lihtsalt „20, 10 ja 12“) või on kaht liiki meenete arvud õiged ja kolmandat liiki meenete arv vale või puudub, siis anda vastuse eest ilma selgitusteta 1 punkt.

2.
- Leitud igat liiki üksikute kristallide kaalude kogusumma 2050: 3 p
- Märgatud, et soovitud kogukaalu saavutamiseks tuleb välja jätta 32 grammi jagu kristalle: 1 p
- Leitud kõik 4 võimalust valida 1 või 2 kristalli kogukaaluga 32 grammi: 2 p
- Antud õige vastus: 1 p

Ainult õige vastuse (4) eest ilma selgitusteta anda 2 punkti.

3.
- Leitud keskmise ruudu küljepikkus 7,5 cm: 3 p

  Sealhulgas:
  - Koos põhjendusega koostatud sobiv lineaarvõrrand ruudu küljepikkuse leidmiseks: *2 p*
- Leitud algse ristküliku kahe äärmise ristküliku teiste külgede pikkused 2,5 cm ja 1,5 cm või pikkuste summa 4 cm: 2 p

  Sealhulgas:
  - Leitud ainult ühe äärmise ristküliku teise külje pikkus: *1 p*
- Leitud algse ristküliku teise külje pikkus 11,5 cm: 1 p
- Leitud algse ristküliku pindala 86,25 cm^2: 1 p

Skeemi viimase rea järgi mitte punkti anda, kui vastuses on ühik puudu või vale.

Ainult õige vastuse (86,25 cm^2) eest ilma selgitusteta anda 2 punkti, ühiku puudumisel või vale ühiku korral 1 punkt.

Eesti LXV matemaatikaolümpiaad

7. veebruar 2018 Piirkonnavoor **9. klass**

II osa hindamisjuhised

1.
- Põhjendatud, et esimene ja teine väide ei ole korraga tõesed: 2 p
- Järeldatud, et kolmas ja neljas väide peavad mõlemad tõesed olema: 1 p
- Kolmanda ja neljanda väite põhjal järeldatud, et $m = 1$ või $m = 3$: 2 p
- Analüüsitud juht $m = 1$ ja leitud $n = 1$ koos kontrolliga: 1 p
- Analüüsitud juht $m = 3$ vastuoluni: 1 p

Kontrolli puudumisel paari $(1, 1)$ leidmise eest skeemi neljanda rea järgi mitte punkti anda.

Ainult õige vastuse $((1, 1))$ eest ilma selgitusteta anda 1 punkt.

2. Anname kaks eraldi hindamisskeemi erinevate lähenemiste puhuks.

Skeem lahendusele algsete murdude otstarbeka laiendamise kaudu (žürii lahendus 1).

- Laiendatud teist ja kolmandat murdu vastavalt avaldistega a ja ab: 4 p
- Kasutades eeldust $abc = 1$, lihtsustatud murrud ühisele nimetajale: 1 p
- Märgatud, et lugejate summa võrdub ühise nimetajaga: 2 p

Esimese rea järgi anda 3 punkti, kui murdudele on küll märgitud õiged laiendajad, kuid lugejaid ja nimetajaid nendega läbi korrutatud ei ole või on läbikorrutamisel tehtud viga.

Skeem lahendusele, mis kasutab eeldust $abc = 1$ pärast kõigi tehete teostamist (žürii lahendus 2).

- Viidud murrud ühisele nimetajale ja leitud vastavad õiged lugejad: 1 p
- Lugejas sulud õigesti avatud: 1 p
- Nimetajas sulud õigesti avatud: 1 p
- Lugejas sarnased liikmed koondatud: 1 p
- Nimetajas sarnased liikmed koondatud: 1 p
- Lugeja eelduse $abc = 1$ abil maksimaalselt lihtsustatud: 1 p
- Nimetaja eelduse $abc = 1$ abil maksimaalselt lihtsustatud: 1 p

3.
- Ülesande olukord (läbi ühe eesmise võrgusilma paistab suurem hulk tagumisi) õigesti matemaatiliselt tõlgendatud: 2 p
- Aru saadud, et eesmise võrgusilma külg paistab vennale niisama pikana kui kaks tagumise võrgusilma külge: 1 p
- Kolmnurkade sarnasuse või kesklõigu omaduse kaudu leitud, et sirglõik venna silma ja tagumise võrgusilma teatava punkti vahel on kaks korda pikem sirglõigust venna silma ja eesmise võrgusilma vastava punkti vahel: 1 p
- Leitud, et ka lühimad sirglõigud venna silmast reisivoodi küljedeni on pikkustega, mis suhtuvad nagu 1 : 2: 2 p
- Järeldatud, et venna silm asub reisivoodist 60 cm kaugusel: 1 p

Skeemi esimese rea eest punktide saamiseks piisab joonisest, mis õiget arusaamist peegeldab. Skeemi viimase rea eest anda punkt ka juhul, kui eelviimase rea eest on antud 0 punkti (õpilane pole lühimaid sirglõike eraldi vaadelnud või on eeldanud, et lõigud võrgusilma tippudesse ongi lühimad).

Skeemi viimase rea eest punkti mitte anda, kui vastuses on ühik puudu või vale.

Ainult õige vastuse (60 cm) eest ilma selgitusteta anda 1 punkt, ühiku puudumisel või vale ühiku korral 0 punkti.

4.
- Aru saadud, et kolm musta ruutu võivad paikneda järjest või L-kujuliselt: 1 p
- Ammendavalt põhjendatud, et järjest paiknevad kolm ruutu on võimalik valida 96 viisil: 2 p

  Sealhulgas:
  - Leitud kas kolme ühes ja samas reas järjest paikneva ruudu või kolme ühes ja samas veerus järjest paikneva ruudu valikuvõimaluste arv: *1 p*
- Ammendavalt põhjendatud, et kolme L-kujuliselt paikneva ruudu valikuks on 196 võimalust: 3 p

  Sealhulgas:
  - Leitud L-kujuliselt paikneva kolme ruudu valikuvõimaluste arv ühe või kahe konkreetse orientatsiooni korral (nt 2×2 ala värvimata ruut ülal paremal): *2 p*
- Eelneva põhjal tuletatud õige lõppvastus: 1 p

Ainult õige vastuse (292) eest ilma selgitusteta anda 1 punkt.

Eesti LXV matemaatikaolümpiaad

7. veebruar 2018 Piirkonnavoor **10. klass**

Hindamisjuhised

1.
- Leitud hõbeda (või kulla) osakaal algsetes sulamites: 1 p
- Leitud hõbeda (või kulla) kogus lõpptulemuses, kasutades vabalt valitud ühikut: 3 p
- Leitud teise metalli kogus lõpptulemuses: 2 p
- Võrdlemise teel tehtud õige lõppjäreldus: 1 p

Kui ei ole leitud teise metalli kogust lõpptulemuses, aga õige järeldus on tuletatud sellest, et hõbe moodustab rohkem kui poole (või kuld vähem kui poole) lõpptulemusest, siis anda skeemi kahe viimase rea eest ette nähtud 3 punktist 1 punkt lõppsulami koguse leidmise eest ja 2 punkti korrektse lõppjärelduse eest võrdluses poolega sellest kogusest.

Ainult õige vastuse (hõbedat) eest ilma selgitusteta anda 0 punkti.

2. Anname kolm eraldi hindamisskeemi erinevate lähenemiste puhuks.

Skeem lahendusele rombi pindala valemi kaudu (žürii lahendus 1).

- Leitud väikse ruudu küljele ehitatud kolmnurga kõrgus $\frac{\sqrt{3}}{2}$: 2 p
- Leitud suure ruudu diagonaali pikkus: 2 p
- Eelneva põhjal leitud suure ruudu pindala: 3 p

Skeem lahendusele ruudu pindala valemi kaudu (žürii lahendus 2).

- Leitud väikse ruudu küljele ehitatud kolmnurga kõrgus $\frac{\sqrt{3}}{2}$: 2 p
- Leitud suure ruudu pooldiagonaali pikkus: 1 p
- Pythagorase teoreemi abil leitud suure ruudu küljepikkus ja avaldis lihtsustatud: 3 p
- Eelneva põhjal leitud suure ruudu pindala: 1 p

Skeem lahendusele täisnurksete kolmnurkade pindalade kaudu (žürii lahendus 3).

- Leitud väikse ruudu küljele ehitatud kolmnurga kõrgus $\frac{\sqrt{3}}{2}$: 2 p
- Leitud suure ruudu pooldiagonaali pikkus: 1 p
- Leitud sellise kaatetiga võrdhaarse täisnurkse kolmnurga pindala ja avaldis lihtsustatud: 3 p
- Leitud õige lõppvastus: 1 p

Ainult õige vastuse ($2+\sqrt{3}$) eest ilma selgitusteta anda 1 punkt.

3. Anname kaks eraldi hindamisskeemi erinevate lähenemiste puhuks.

Skeem võrratusi kasutava lahenduse järgi (žürii lahendus 1).

- Saadud seos $8a = 10b + c$: 3 p

  Sealhulgas:
  - Jõutud seoseni $300a+30b+3c = 400b+40c+4a$ või sellega samaväärse Mari arvu numbrite vahelise lihtsustamata seoseni: *2 p*
- Põhjendatud, et $b < a$: 1 p
- Põhjendatud, et $b > a-3$: 1 p
- Vaadatud läbi kõik 4 varianti juhul $b = a-1$: 1 p
- Vaadatud läbi kõik 4 varianti juhul $b = a-2$: 1 p

Skeem jaguvust kasutava lahenduse järgi (žürii lahendus 2).

- Saadud seos $x = 9(11a-10b-c)$, kus 9 on sulgude ette võetud: 3 p

  Sealhulgas:
  - Saadud võrdus $x = (100a+10b+c)-(100b+10c+a)$ või sellega samaväärne lihtsustamata seos: *2 p*
- Leitud sobivad 8 arvu koos ammendava põhjendusega: 4 p

  Sealhulgas:
  - Järeldatud, et Mari arvu ristsumma jagub 9-ga: *1 p*
  - Järeldatud, et Mari arv jagub 27-ga: *1 p*
  - Vaadatud läbi kõik 8 varianti 27-ga jaguvast arvust x, mille puhul $3x$ ja $4x$ on kolmekohalised: *2 p*

Kui lahenduses pole mainitud, et kõik leitud vastused rahuldavad ülesande tingimusi, anda juhtude läbivaatuse eest 1 punkt vähem.

Kui jaguvusega lahenduses on asutud variante vaatama kohe pärast 9-ga jaguvuse põhjendamist (ilma 27-ga jaguvust tõestamata), siis asendada skeemi teine pool koos alapunktidega järgnevaga:

- Leitud sobivad 8 arvu koos ammendava põhjendusega: 4 p

  Sealhulgas:
  - Kontrollitud vähemalt pooled 27-ga mitte jaguvad 9-ga jaguvad arvud x, mille puhul $3x$ ja $4x$ on kolmekohalised: *1 p*
  - Kontrollitud ülejäänud 27-ga mitte jaguvad 9-ga jaguvad arvud x, mille puhul $3x$ ja $4x$ on kolmekohalised: *1 p*

Ainult täieliku õige vastuse (kõik 8 arvu ilma liigseteta) eest ilma selgitusteta anda 1 punkt, valede arvude esinemisel või õigete puudumisel anda vastuse eest 0 punkti.

4.
- Jõutud seoseni $(x-y)(x+y-1) = 0$: 2 p

- Saadud aru, et $x = y$ või $x = 1 - y$: 1 p
- Süsteem lahendatud juhul $x = y$: 2 p
- Süsteem lahendatud juhul $x = 1 - y$: 2 p

Ainult täieliku õige vastuse (kõik neli lahendit ilma võõrlahenditeta) eest ilma põhjenduseta anda 1 punkt.

5. Anname kaks eraldi hindamisskeemi erinevate lähenemise puhuks.

Skeem lahendusele kesklõikude kaudu (žürii lahendus 1).

- Märgitud, et DE on kolmnurga PXY kesklõik (või EF on kolmnurga PYZ kesklõik, või FD on kolmnurga PZX kesklõik): 1 p
- Järeldatud, et $|XY| = |AB|$ (või vastavalt $|YZ| = |BC|$ või $|ZX| = |CA|$): 2 p
- Esitatud hulgast $\{|XY| = |AB|, |YZ| = |BC|, |ZX| = |CA|\}$ veel üks võrdus: 1 p
- Esitatud hulgast $\{|XY| = |AB|, |YZ| = |BC|, |ZX| = |CA|\}$ viimane puuduv võrdus: 1 p
- Kolme külje võrdusest järeldatud, et kolmnurgad ABC ja XYZ on võrdsed: 2 p

Skeem lahendusele homoteetia kaudu (žürii lahendus 2).

- Märgitud, et kolmnurk XYZ on kolmnurga DEF homoteetne teisendus keskpunktiga P teguriga 2: 3 p
- Märgitud, et kolmnurk ABC on kolmnurga DEF homoteetne teisendus keskpunktiga mediaanide lõikepunktis teguriga -2 (või ka lihtsalt sarnane kolmnurgaga DEF teguriga 2): 2 p
- Järeldatud, et kolmnurk ABC ja XYZ on sarnased teguriga 1: 2 p

6.
- Ammendavalt põhjendatud, et ruudustikule saab nõutud viisil paigutada ülimalt 8 risti: 5 p

  Sealhulgas:
  - Põhjendatud, et ruudustiku äärel saab katta ülimalt kaks ruutu: *2 p*
  - Sellele tuginedes leitud kaetavate ruutude arvu ülemtõke 44: *2 p*
- Näidatud, et 8 risti on võimalik ruudustikule paigutada: 2 p

Ainult õige vastuse 8 eest ilma selgitusteta anda 1 punkt.

Hindamisjuhised

1.
- Leitud majandite lehmade päevatoodangud $\frac{70}{3}$ ja $\frac{625}{24}$ liitrit: 1 p
- Koostatud ülesande andmete põhjal võrrandisüsteem testitud lehmade arvude leidmiseks: 2 p
- Võrrandisüsteem õigesti lahendatud: 3 p
- Leitud õige lõppvastus: 1 p

Ainult õige vastuse (41) eest ilma selgitusteta anda 1 punkt.

2. Anname kaks eraldi hindamisskeemi erinevate lähenemiste puhuks.

Skeem lahendusele, kus värvitakse ruudud korraga (žürii lahendus 1).

- Aru saadud, et ühes kindlas reas on kahe naaberruudu valikuks 17 võimalust: 1 p
- Saadud kahe ühes ja samas reas paikneva naaberruudu valikuvõimaluste arvuks $20 \cdot 17$: 2 p
- Aru saadud, et ühes kindlas veerus on kahe naaberruudu valikuks 19 võimalust: 1 p
- Saadud kahe ühes ja samas veerus paikneva naaberruudu valikuvõimaluste arvuks $18 \cdot 19$: 2 p
- Leitud võimaluste koguarv: 1 p

Skeem lahendusele, kus värvitakse ruudud ükshaaval (žürii lahendus 2).

- Loendatud värvimised juhul, kui esimene värvitav ruut asub nurgas: 1 p
- Loendatud värvimised juhul, kui esimene värvitav ruut asub küljel, kuid mitte nurgas: 2 p
- Loendatud värvimised juhul, kui esimene värvitav ruut ei asu küljel: 2 p
- Arvutatud kahe ruudu ükshaaval värvimise võimalused: 1 p
- Leitud õige vastus: 1 p

Punkte mitte alandada selle eest, kui töös on read ja veerud läbivalt omavahel vahetatud.

Ainult õige vastuse (682) eest ilma selgitusteta anda 1 punkt.

3.
- Leitud valem $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$ tellise vastastippe ühendava diagonaali pikkuse arvutamiseks: 1 p

- Põhjendatud, et küljepikkuste seas peab olema vähemalt kaks paaritut arvu: 2 p
- Käsitletud võimalust, et küljepikkuste ruutude jäägid 4-ga jagamisel on 0, 1 ja 1: 1 p
- Käsitletud võimalust, et küljepikkuste ruutude jäägid 4-ga jagamisel on 1, 1 ja 1: 1 p
- Leitud kõik võimalused, milline saab olla arvu $a^2 + b^2 + c^2$ jääk 4-ga jagamisel: 1 p
- Märgitud, et täisruut ei anna 4-ga jagades jääke 2 ja 3: 1 p

Ainult õige vastuse (ei) eest ilma selgituseta anda 0 punkti.

4.
- Avatud sulud: 1 p
- Viidud kõik liikmed ühele poole: 1 p
- Esitatud saadud avaldis või sellest positiivse konstandiga korrutamisel tekkiv avaldis täisruutude summana: 4 p
- Tehtud õige lõppjäreldus: 1 p

5.
- Põhjendatud, et K poolitab lõigu DE, kus K on punkti P projektsioon sirgele DE: 2 p
- Põhjendatud kiirteteoreemi või kolmnurkade sarnasusega vähemalt üks seostest $\frac{|AQ|}{|AH|} = 2$, $\frac{|AQ|}{|DL|} = 2$, $\frac{|BQ|}{|BL|} = 2$, $\frac{|CQ|}{|CM|} = 2$, kus punktid Q, H, L ja M on nagu joonistel 19 ja 20: 1 p
- Eelnevale tuginedes leitud $|BL| = 5$ m: 1 p
- Eelnevale tuginedes leitud $|HE| = 9$ m või $|CM| = 9$ m: 1 p
- Arvutatud õige lõppvastus: 2 p

Skeemi viimase rea eest anda 1 punkt vähem, kui vastuses on ühik puudu või vale.

Ainult õige vastuse (12 m) eest ilma selgituseta anda 1 punkt, ühiku puudumisel või vale ühiku korral 0 punkti.

6. Anname kaks eraldi hindamisskeemi erinevate lähenemiste puhuks.

Skeem arvu 2 astendaja poolest erinevate arvude rühmi vaatlevale lahendusele (žürii lahendus 1).

- Jaotatud arvud 1 kuni 100 rühmadeks, millesse kuuluvad arvud erinevad vaid 2 astendaja poolest: 1 p
- Märgitud, et ülesandes nõutud paarides peavad mõlemad arvud kuuluma samma rühma: 1 p
- Leitud, et arvud 1 ja 3 kuuluvad erinevatesse rühmadesse, millest kummagi elementidest saab moodustada ülimalt 3 paari: 1 p
- Leitud, et arvud 5, 7, 9 ja 11 kuuluvad erinevatesse rühmadesse, millest igaühe elementidest saab moodustada ülimalt 2 paari: 1 p

- Märgitud, et arvudest $13, 15, \ldots, 49$ kuulub igaüks rühma, millest saab moodustada ülimalt 1 paari: 1 p
- Märgitud, et arvud $51, 53, \ldots, 99$ ei moodusta paari: 1 p
- Arvutatud lõppvastus: 1 p

Skeem välistamist kasutavale lahendusele (žürii lahendus 2).

- Märgitud, et arvud $51, 53, \ldots, 99$ ei moodusta paari: 1 p
- Märgitud, et igast kolmikust $\{k, 2k, 4k\}$, kus k on paaritu ja $50 < 4k \leqslant 100$, jääb üks arv välja: 2 p
- Leitud, et välja jääb kokku vähemalt 33 arvu: 2 p
- Toodud näide 33 sobivast paarist: 2 p

Ainult õige vastuse (33) eest ilma selgituseta anda 1 punkt.

Eesti LXV matemaatikaolümpiaad

7. veebruar 2018 Piirkonnavoor **12. klass**

Hindamisjuhised

1.
- Aru saadud, et esimese n viskega liigub Toomas $1+2+\ldots+2^{n-1}$ meetrit tagasi: 1 p
- Leitud, et $1+2+\ldots+2^{n-1} = 2^n - 1$: 1 p
- Eelneva põhjal koostatud võrratus 2^n suhtes, mille täidetus tähendab, et Toomas asub pärast $n+1$ viset algsest asukohast tagapool (või eespool): 2 p
- Võrratus 2^n suhtes maksimaalselt lihtsustatud: 1 p
- Tehtud õige lõppjäreldus: 2 p

Ainult õige vastuse (kõik naturaalarvud alates 10-st) eest ilma selgitusteta anda 1 punkt.

2. Anname kaks eraldi hindamisskeemi erinevate lähenemiste puhuks.

Skeem lahendusele võrrandisüsteemi koostamisega kordajate suhtes (žürii lahendus 1).

- Leitud, et vabaliige on 0: 1 p
- Punkti $(10; 3{,}5)$ läbimisest tuletatud $10a + b = 0{,}35$ või sellega ilmselgelt samaväärne võrrand: 1 p
- Haripunkti omadusest saadud $20a + b = 0$ või sellega ilmselgelt samaväärne võrrand: 1 p
- Võrrandisüsteemi lahendamisel saadud $b = 0{,}7$: 2 p

  Sealhulgas:
  - Saadud $a = -0{,}035$: *1 p*
- Leitud antud ruutfunktsiooni tuletis: 1 p
- Leitud puutuja tõus kohal $x = 0$: 1 p

Skeem lahendusele teise nullkoha leidmise kaudu (žürii lahendus 2).

- Koos põhjendusega leitud ruutfunktsiooni teine nullkoht 20: 2 p
- Esitatud parabooli võrrand kujul $y = ax(x - 20)$: 1 p
- Leitud $a = -0{,}035$: 1 p
- Leitud $b = 0{,}7$: 1 p
- Leitud antud ruutfunktsiooni tuletis: 1 p
- Leitud puutuja tõus kohal $x = 0$: 1 p

Tuletise leidmise eest anda punkt sõltumata sellest, kas eelnevalt leitud kordajad $a = -0{,}035$ ja $b = 0{,}7$ on juba sisse asendatud või mitte.

Ainult õige vastuse (0,7) eest ilma selgitusteta anda 1 punkt.

3.
- Leitud a-osa jaoks kontranäide (a, b) ja põhjendatud vastuolu ülesande tingimustega, arvutades välja $6a + 6b$ ja $6a + b$: 2 p
- Lahendatud b-osa: 5 p

  Sealhulgas:
  - Põhjendatud, et $6a + 11b$ jagub 3-ga: *1 p*
  - Järeldatud, et $11b$ jagub 3-ga: *1 p*
  - Järeldatud, et b jagub 3-ga: *1 p*
  - Järeldatud, et $10b$ jagub 15-ga: *1 p*
  - Järeldatud, et $6a + b$ jagub 15-ga: *1 p*

Ainult õige vastuse eest ilma selgitusteta anda 0 punkti.

4.
- Avatud kõik sulud: 1 p
- Viidud miinusmärgiga liikmed teisele poole: 1 p
- Märgatud, et saadud võrratus on saadav võrratuste $y < x + z$ ja $z^2 < (x + y)^2$ liitmisel: 3 p
- Põhjendatud need võrratused: 2 p

5. Anname kaks eraldi hindamisskeemi erinevate lähenemiste puhuks.

Skeem geomeetrilisele lahendusele (žürii lahendus 1).
- Leitud ühikruudu küljele ehitatud võrdkülgse kolmnurga kõrgus $\frac{\sqrt{3}}{2}$: 1 p
- Leitud värvitud kujundi vastastippude vaheline kaugus $\sqrt{3} - 1$: 1 p
- Leitud värvitud kujundi naabertippude poolt määratud kaarele vastava sektori pindala $\frac{\pi}{12}$: 1 p
- Leitud värvitud kujundi naabertippude ja neid ühendava veerandringjoone keskpunkti poolt määratud võrdhaarse kolmnurga pindala $\frac{1}{4}$: 1 p
- Avaldatud värvitud kujundi pindala eelnevalt leitud suuruste kaudu: 2 p
- Avaldis lihtsustatud: 1 p

Skeem integraali kasutavale lahendusele (žürii lahendus 2).
- Leitud ühikruudu küljele ehitatud võrdkülgse kolmnurga kõrgus $\frac{\sqrt{3}}{2}$: 1 p

- Avaldatud halliks värvitud kujundi neljandiku pindala (või kogupindala) funktsiooni $f(x) = \sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2}$ määratud integraali kaudu: 2 p
- Leitud algfunktsioon $F(x) = \frac{1}{2} \cdot (x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x - x)$: 2 p
- Rajad sisse asendatud ja pindala avaldis lihtsustatud: 2 p

Ainult õige vastuse $(1 - \sqrt{3} + \frac{\pi}{3})$ eest ilma selgitusteta anda 1 punkt.

6. Anname kolm eraldi hindamisskeemi erinevate lähenemiste puhuks.

Skeem värvimist kasutavale lahendusele (žürii lahendus 1).

- Näidatud viis 6 kujundi paigutamiseks: 1 p
- Toodud idee värvida ridu (või veerge) üle ühe või loendada eraldi ruute paaritu ja paarisnumbriga ridades (või veergudes): 1 p
- Märgitud, et iga kujund katab kas 3 või 4 värvitud ruutu: 1 p
- Leitud värvitud ruutude koguarv 28: 1 p
- Järeldatud, et kui oleks võimalik paigutada 7 kujundit, siis kataks iga kujund täpselt 4 värvitud ruutu: 1 p
- Järeldatud, et iga kujund katab igal värvitud real paarisarvu ruute: 1 p
- Järeldatud, et osa ruute jääb katmata: 1 p

Skeem variantide läbivaatusel põhinevale lahendusele (žürii lahendus 2).

- Näidatud viis 6 kujundi paigutamiseks: 1 p
- Põhjendatud, et nurgaruudud peavad olema kaetud kujundi jämeda otsaga: 2 p
- Põhjendatud, et ruudustiku mingi külje eri otstesse paigutatavad kujundid peavad olema erineva orientatsiooniga (üks rõhtne ja teine püstne või vastupidi): 1 p
- Vaadatud läbi variandid ja jõutud kõikjal vastuoluni: 3 p

Skeem lahendusele erineva orientatsiooniga kujundite arvude kaudu (žürii lahendus 3).

- Näidatud viis 6 kujundi paigutamiseks: 1 p
- Märgitud, et kas rõhtseid või püstseid kujundeid on ülimalt 3: 1 p
- Mainitud, et 3 püstset kujundit katavad ülimalt 6 veeru ruute (või 3 rõhtset kujundit ülimalt 6 rea ruute), või kohe järeldatud, et leidub veerg (rida), mida katavad ainult rõhtsed (püstsed) kujundid: 1 p
- Põhjendatud, et ainult keskmine veerg (rida) saab olla kaetud ainult rõhtsete (püstsete) kujunditega: 3 p
- Tuletatud vastuolu: 1 p

Ainult õige vastuse (6) eest ilma selgitusteta anda 1 punkt.

Kokkuvõtteks

Sel aastal vaatasid 9.–11. klassi hindajad üle kõigis töödes kõik ülesanded, kuid 7.–8. ja 12. klassi töödes on osa ülesandeid üle hindamata. Mitte keegi, kel on mõni ülesanne üle vaatamata, ei pääseks huvipäevale kutsutute sekka ka siis, kui ta iga ülevaatamata ülesande eest saaks täispunktid.

Kui 7. klassi komplekt oli sel aastal üsna raske saanud, siis 8. ja 12. klassi komplektid oleksid võinud isegi raskemad olla. 9. klassi ülesanne 3 oli üsna ebastandardne, kuna nõudis elulise olukorra jaoks sobiva matemaatilise mudeli loomist, ja selle eest sai pärast üleparandamist täispunktid vaid 2 õpilast. Seda võib lugeda ülesande puuduseks või hoopis tugevuseks, sest oskus reaalse elu probleeme matemaatikasse ümber mõtestada on väga oluline oskus.

Üleriigilise žürii poolsed tööde kontrollijad olid järgmised.

7. klass:	Reimo Palm	reimo.palm@ut.ee
	Mark Gimbutas	markgimbutas@gmail.com
8. klass:	Janno Veeorg	janno.veeorg@gmail.com
	Hartvig Tooming	hartvig.tooming@windowslive.com
9. klass:	Raul Kangro	raul.kangro@ut.ee
	Kalle Kaarli	kalle.kaarli@ut.ee
10. klass:	Oleg Košik	oleg.koshik@ut.ee
	Kristjan Kongas	kongaskristjan@gmail.com
11. klass:	Härmel Nestra	harmel.nestra@ut.ee
	Joonas Jürgen Kisel	joonasjurgen.kisel@gmail.com
12. klass:	Sandra Schumann	sandra.schumann426@gmail.com
	Markus Rene Pae	markusrenepae@gmail.com

Kontrollijate kommentaarid

Test

Test oli küllalt hästi lahendatud ja korrektselt hinnatud.

Ülesanne 1

Mõnes lahenduses tõstsime punktide arvu 5-lt 6-le, kui b)-osa lahenduses leidus võimaluste analüüsi elemente. Samuti said 6 punkti lahendused, kus b)-osa võimaluste leidmise käiku polnud kirjeldatud, aga oli öeldud, mida tuleb teha.

Ülesanne 2

Mitmed õpilased lahendasid ülesande sobivate telefoninumbrite süstemaatilise loetlemise teel. Selliste lahenduste hindamiseks kasutasime järgnevat hindamisskeemi:

- Märgitud ja põhjendatud, et telefoninumbri teine number võib olla kas 1, 4 või 7, või et telefoninumbri viimane number võib olla kas 3, 4 või 6. 1 p
- Loetletud kõik 30 telefoninumbrit, mis algavad 51-ga. 3 p
- Loetletud kõik 20 telefoninumbrit, mis algavad 57-ga. 2 p
- Loetletud kõik 10 telefoninumbrit, mis algavad 54-ga. 1 p

Ülesanne 3

Üks tüüpiline lahendus oli selline, et viisnurk jaotati kolmeks kolmnurgaks ABE, BCE ja CDE, kusjuures õigesti arvutati ainult kolmnurkade ABE ja CDE pindala. Sellised lahendused ühtlustasime 3 punktile.

Kontrollijate kommentaarid

Test

Enamjaolt oli test lahendatud keskmiselt. Küsimuses 4 loeti valeks vastuseks see, kui oli kirjutatud küsitud viimase numbri asemel kogu viiekohaline arv. Väga palju valesid vastuseid esines küsimuses 8, kus paljud leidsid õigest vastusest kordades suuremaid tulemusi.

Ülesanne 1

Enamasti saadi selle ülesande eest suhteliselt kõrged punktid. Umbes pooled lahendajatest lahendasid algoritmiga, kus algsest 300 eurost lahutati minimaalne auhindade koguhind ja seejärel prooviti allesjäänud rahahulk jagada õigesti auhindade vahel. Selline lahenduskäik andis täispunktid, kui kõik sammud olid põhjendatud või selgitatud. Paljud kaotasid 1–2 punkti selle eest, kui ei olnud põhjendanud, et sobiv vastus on ainuke.

Ülesanne 2

Ülesanne oli küllaltki lihtne ja täislahendusi oli palju. Kõik täislahendused olid sarnased žürii lahendusele.

Kõige rohkem esines vigu kõigi erineva kaaluga kristallide kogukaalu leidmisel.

Ülesanne 3

Ülesanne oli küllaltki hästi lahendatud. Kõige keerulisemaks osutus ruudu küljepikkuse leidmine. Paljudes töödes oli leitud, et see on 7,5 cm proovimise teel. Sellised lahendused said hindamisskeemis selle osa eest ettenähtud kolmest puntkist ühe. Seega kui kõik muu oli õigesti lahendatud, said need tööd 5 punkti.

Kontrollijate kommentaarid

Test

Testi punktisummades tuli teha ainult mõned punktimuudatused. Mõnel juhul olid parandajad valet ühikut (kuupsentimeeter ruutsentimeetri asemel) õigeks lugenud ja paaril korral halvasti kirjutatud, kuid siiski arusaadavat vastust valeks peetud.

Ülesanne 1

Ülesanne oli hea selleks, et tuua välja erinevused õpilaste mõtlemise loogilisuses ja põhjendamisoskustes. Sellise ülesande parandamine (arutelude lugemine ja neis ebakõlade avastamine) on suurt pingutust nõudev ja ajamahukas tegevus ning lisaks jätab parandajatele küllalt palju tõlgendusruumi, mistõttu tuli teha palju punktimuudatusi (umbes pooltes töödes skoor muutus). Kurb on see, et päris palju oli töid, kus korrektseks oli loetud lahendus, mis põhines selgelt valedel väidetel (näiteks et kahe arvu summa saab olla algarv ainult siis, kui vähemalt üks liidetav on algarv, või et 3-ga jaguvate arvude summa ei saa jaguda 5-ga vms). Tüüpiline viga lahendustes oli väide, et kui mingi arv jagub arvuga m, siis ei saa see olla algarv, kuigi $m = 1$ korral see väide ei kehti. Sageli väideti ka, et tingimused (1) ja (3) saavad koos kehtida ainult siis, kui $m = n = 1$, mis samuti ei ole õige (m peab küll olema 1, kuid võimalikke n väärtuseid lõpmatult palju).

Paljud punktimuudatused on põhjustatud sellest, et erijuhtude (konkreetsete m ja n paaride) vaatlemise eest andsid parandajad väga erineva arvu punkte (0-st 7-ni). Ühtlustamise käigus kõik tööd, kus oli leitud sobiv juht ($m = n = 1$) ilma ühegi üldkehtiva kasuliku omaduse tõestamiseta või muul moel korrektse lahenduse suunas liikumata (sõltumata sellest, kas see juht oli detailselt kontrollitud või kas lisaks sellele juhule oli veel arvupaare läbi vaadatud vaadatud) 1 punkti. Ülejäänud punktimuudatused on seotud lahenduses esinevate valeväidete või puudulike põhjendustega.

Ülesanne 2

Ülesanne oli igati sobiv. Oli olemas elegantne paarirealine lahendus, kuid ka nn jõumeetod viis tulemusele. Ometi oli ülesannet lahendatud halvasti. Umbes pooled õpilastest teenisid 0 või 1 punkti. Sealjuures avaldiste teisendamisega suuri probleeme ei olnud. Parandasime 0-ks kõik hinded, kus võrdus oli tõestatud a, b ja c konkreetsete väärtuste korral. Mõni lahendaja väitis, et muid võimalusi ei olegi, kui $a = b = c = 1$. Mõnes töös häiris lahenduse loogiline struktuur, kuid üldiselt hoidsime õpilase poole, kui vajalikud arvutused olid korrektselt tehtud. Oleks olnud väga armas, kui ükski lahendaja oleks märkinud, et $abc = 1$ tõttu on a, b ja c nullist erinevad. Ometi seda fakti kasutati.

Ülesanne 3

Ei pea ülesannet õnnestunuks. Ainult üksikud lahendajad arvestasid võimalusega, et vaatamise suund ei ole risti voodi külgedega. Ka enamus hindajaid ei arvestanud nö viltu vaatamise võimalust, kuigi hindamisjuhendist tuli see selgesti välja. Meie parandused $7 \longrightarrow 5$ tähendavadki seda, et enam-vähem korrektselt oli käsitletud erijuhtu, kus vanema venna vaadeldav võrgusilm on talle lähim. Kokkuvõttes säilitasime 7 punkti ainult kahele õpilasele. Meie 3 punkti tähendab seda, et nimetatud erijuhul oli saadud õige vastus, kuid mitte geomeetriat rakendades, vaid nn talupojamõistusele tuginedes. Peame silmas põhjendusi stiilis: kui võrgusilm paistab 2 korda väiksemana, peab vaatleja olema kaks korda kaugemal.

Ülesanne 4

Ülesanne osutus lihtsaks. Põhiküsimuseks hinnete ühtlustamisel oli see, mida lugeda ammendavaks põhjenduseks erinevate kujundite võimalike paiknemiste arvutamisel. Kuna piirkondades oldi enamasti selles küsimuses üsna vastutulelikud, lugedes ammendavaks igasuguse põhjenduse olemasolu, kust oli võimalik aimata, kuidas õpilane vastavad numbrid sai, siis ka ühtlustamise käigus lähtuti samast põhimõttest. Suuremad punktimuutused olid kahes töös, kus ühes loeti paigutusi valesti kokku (osasid kujundeid kahekordselt, osasid üldse mitte, kokku saadi kogemata õige arv) ning teises olid põhjendused nii segaselt esitatud, et ei olnud võimalik aru saada, mida ja miks ikkagi liideti ja lahutati (kuigi kokku tuli lõpuks õige arv).

Kontrollijate kommentaarid

10. klassi komplekt osutus õpilastele päris jõukohaseks. Selles polnud ühtegi tõsiselt raskemat ülesannet ning punktisummad olid keskmisest kõrgemad. Ka suuri puktimuutusi esines tavalisest vähem, suurem osa muutusi tulenes hindamise ühtlustamisest. Eriti hea parandamise kvaliteediga paistsid silma Tallinna tööd.

Ülesanne 1

Ülesanne oli ootuspäraselt üsna lihte ning enamikus läbivaatusele jõudnud töödes saadi sellega kenasti hakkama.

Tüüpiliseks valeks lahenduseks oli suhete $1:2$, $2:3$ ja $3:1$ korrutamine läbi arvudega 1, 2 ja 3 ning saadud tulemuste komponenthaaval kokkuliitmine. Sellise lahenduskäigu juures unustati arvestada, et suhtes $1:2:3$ võeti selliselt erinevad sulamite kogused.

Ülesanne 2

Ülesanne oli üsna lihtne. Enamasti võeti punkte maha pisivigade tõttu, vahel oli lahendus ka poolik. Näiteks üritati leida suure ruudu pindala väiksemate kujundite pindalade summana, ent ei suudetud avaldada kõigi kolmnurkade pindalasid.

Ülesanne 3

Ülesanne oli keskmise raskusastmega. Vajalike lähtevõrrandite kirja panemisega saadi enamasti hakkama, kuid suuremaks probleemiks oli nendest vajalike järelduste tegemine. Oli ka neid, kes küll leidsid kõik 8 lahendit ära (st leidsid hulga tingimusi, mida rahuldavad vaid need lahendid), ent ei kontrollinud neid lahendeid. Selline lahendus aga ei arvesta võimalusega, et lahenditele võib kehtida ka teisi tingimusi, seega pidi ühe punkti maha arvestama.

Üksikutel juhtudel andis žürii ka punkte lahenduse eest, mis sai piirkonnas tulemuseks 0 või kriipsu. Sel juhul oli mustandis kasulik seos, mis hindamisskeemi järgi pidi saama punkte.

Ülesanne 4

Üsna paljudes töödes esines alternatiivne lahenduskäik, kus võrrandisüsteem taandati ühe muutuja 4. astme võrrandi lahendamisele. Mitmed lahendajad kasutasid seejärel Horneri skeemi, leides täisarvulised juured -2 ja 1 ning taandades võrrandi ruutvõrrandile. Mõnel lahendajal õnnestus 4. astme polünoom ka ilma Horneri skeemi abita ära tegurdada.

Päris paljud õpilased arvasid mingil põhjusel, et võrrandisüsteem saab kehtida ainult juhul $x = y$. Näiteks tehti selline ekslik järeldus otse seose $x^2 - x = y^2 - y$ põhjal.

Ülesanne 5

Geomeetria tõestusülesande kohta saadi sellega hakkama küllalt hästi. Ideele võrrelda nii kolmnurgad ABC kui XYZ kolmnurgaga DEF tulid üsna paljud. Mõnikord esines puudujääke vajalike sarnasuste või seoste põhjendamisel, ülevaatamisel suhtusime sellesse siiski mitte väga rangelt, kui asja sisule oli muidu õigesti pihta saadud.

Üksikutes töödes tõestati kolmnurkade võrdsuse asemel hoopis nende pindalade võrdsus või tõestati ainult kolmnurkade sarnasus.

Mõnes töö saadi ülesande tekstist valesti aru ning selle asemel, et peegeldada punkti P punktide D, E ja F suhtes, peegeldati punkti P suhtes punktid D, E ja F.

Kuivõrd punkti P asukoht polnud ülesande tekstis täpsustatud, ei saanud selle kohta ka midagi eeldada. Üksikud õpilased lahendasid ülesande ainult kitsal erijuhul, eeldades, et punkt P asub mingis konkreetses kohas. Kui sellest lahendusest polnud kasu üldise juhu jaoks, ei antud selliste lahenduste eest kuigi palju punkte.

Ülesanne 6

Ülesanne oli keskmise raskusega. Peaaegu kõik leidsid 8 ristiga näite, ent raskem oli põhjendada, et rohkem riste asetada ei saa. Paljud valed lahendused üritasid eri loogikate abil riste ükshaaval võimalikult kompaktselt paigutada. Näiteks üks lahendus paigutas kõigepealt ristid nurkadesse, seejärel täitis järgi jäänud ala võimalikult paljude ristidega. Kuid 7×7 ruudustikul annaks eelmainitud arutlus tulemuseks 5 risti, kuigi õige vastus on 6 risti. Kuna seesuguste arutlustega ei kaasnenud tõestust, miks pakutud paigutus annab optimaalse tulemuse, ei saanud selle eest punkte anda.

Kontrollijate kommentaarid

Ülesanne 1

Ülesanne oli valdavalt hästi lahendatud ja hinnatud. Tartusse saadetud tööde seas oli vaid üks, kus polnud osatud lehmade päevatoodanguid ülesande andmetest tuletada. Lahendajate üheks tüüpveaks võib pidada arvutamist ligikaudsete arvudega. Ligikaudsete arvutuste korral peaks alati ka viga hindama, et kindel olla, et vea piiresse jääb vaid üks täisarvuline väärtus. Seda aga üheski töös ei tehtud, mistõttu ei saanud sellised tööd täispunkte. Erinevates piirkondades oli antud sellistele töödele 4–7 punkti, meie ühtlustasime need 5 punktiks. Mitmes töös anti vastuseks lehmade arv majandites A ja B eraldi, kuigi küsiti nende koguarvu. Selle vea eest võtsime 1 punkti maha.

Ülesanne 2

Samuti hästi lahendatud ja hinnatud. Punkte kaotati kõige sagedamini arvutusvigade eest. Ühes lahenduses ei olnud ka selgelt näha, kas vahepealsed üldvalemid on loendamisest tuletatud või väikeste väärtustega proovimise põhjal oletatud.

Ülesanne 3

Ülesanne osutus üheks raskemaist. Ehkki paljud lahendajad suutsid hindamisskeemi esimese punkti kätte saada, oli sealt edasi raske liikuda. Tüüpvigadeks olid näiteks: järeldus, et küljepikkused peavad olema algarvud; järeldus, et tellise tahu diagonaal peab samuti täisarv olema; üksikute väärtustega proovimine ning ebaõnnestumisel järeldamine, et lahendeid ei leidu. Hinnatud oli see-eest võrdlemisi hästi.

Ülesanne 4

Ülesanne osutus õpilastele ootamatult raskeks. Suuri punktimuutusi piirkondades pandud hinnetes tuli teha aga vähe.

Õpilased said enamasti kätte 2 punkti hindamisskeemi esimese kahe rea eest (sulgude avamine ja liikmete viimine ühele poole). Paljud otsisid võimalust teisendada avaldis täisruutude summaks, kuid ebaõnnestusid. Mõistliku alguse korral andsime täisruutude otsimise eest 1 punkti lisaks. Enamasti hakkasid sellised õpilased vaatama juhte x, y ja z märkide järgi. Mõned juhud tulevad lihtsasti välja. Nende eest me aga lisapunkte ei andnud, sest nad ei vii lahendusele lähemale.

Paaris töös oli võrratust $x^2 + z^2 \geqslant 2xz$ põhjendatud aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vahelise võrratusega. See pole päris korrektne, sest arvude x^2 ja z^2 geomeetriline keskmine on $\sqrt{x^2 z^2}$ ehk $|xz|$, mitte xz. Selliselt põhjendades tuleb lisaks märgata, et $|xz| \geqslant xz$.

Mitmes Tallinna töös kohtas alternatiivset lahendust ruutvõrrandiga, mis on nüüd vormistatud žürii materjali lahendusena 3.

Ülesanne 5

Nähtavasti oli tegemist keerulise ülesandega: suur osa lahendustest ei jõudnud kaugemale külje BC pikkuse leidmisest. Seevastu esines täislahendustes mitmeid lähenemisi, alates sellistest, mis olid tihedalt seotud emma-kumma ametliku lahendusega, lõpetades lahendustega koordinaatide meetodil ning homoteetia abil.

Tööd, kus oli leitud vaid külje BC pikkus, ühtlustasime 0 punktile (piirkondades oli selliste eest kuni 2 punkti antud).

Ülesanne 6

Selles ülesandes osutus õigele vastusele 33 vettpidava põhjenduse väljamõtlemine oodatult raskeks ja tööde hindamine samuti. Enamik õpilasi leidis õige vastuse mingi konkreetse konstruktsiooni tulemusena. Sellest, et konkreetset konstruktsiooni polnud võimalik täiendada, järeldati, et 33 on suurim võimalik paaride arv. Selline mõttekäik aga ei veena, sest 33 paari võib valida ka teisiti. Enamikus piirkondades anti selliste mõttekäikude eest täispunktid. Veenvaks põhjenduseks tuleb aga näidata, et ükskõik millise paaride valiku korral on 33 nende maksimaalne võimalik arv.

Vastavalt teisele ametlikule hindamisskeemile sai 2 punkti sobiva 33 paari kirjeldamise eest. Andsime paaride eest 1 punkti, kui pakutavas valikus oli väikseid vigu (sõltumata sellest, kas paaride arv oli õige või vale). Samuti andsime paaride valiku eest 0–1 punkti, kui valiku kirjeldus oli nii ebamäärane, et ei võimaldanud õpilase mõttekäigu õigsust suuremal või vähemal määral tuvastada.

Kontrollijate kommentaarid

Ülesanne 1

Ülesanne osutus lihtsaks. Üsna paljud õpilased tulid eduka lahendusidee peale ning lähendasid tagasiliikumised geomeetriliseks jadaks. Sellest hoolimata võib esile tõsta kaks tüüpilist eksimust:

- Oli valesti aru saadud indeksitest ning sellest tulenevalt oli esitatud piirkond õige vastusega ühe võrra nihkes.
- Ülesanne oli võrratusena kirja pandud valesti, mis enamjaolt seisnes võrratusemärgi vales orientatsioonis. Seetõttu leidsid mõned õpilased, et õige vastus on kõik naturaalarvud, mis on väiksemad 10-st.

Üleparandamise käigus said punkte juurde üksikud õpilased, kes olid $n \geqslant 10$ asemel vastuseks märkinud $n > 9$.

Ülesanne 2

Tegemist oli vaieldamatult lihtsaima ülesandega antud komplektis. Seda kinnitab ka ülikõrge keskmine punktiskoor (6,51) ning fakt, et madalaim punktiskoor ülesannet alustanu jaoks oli 5 punkti. Mõned näited eksimustest, mille eest punkte siiski kaotati:

- Tuletise võtmisel tekkinud lineaarfunktsioonis oli lineaarliikme kordaja kahega läbi korrutamata;
- Ruutfunktsioon ja lineaarvõrrand (sirge võrrand) olid pandud võrduma ning tegurdamise järel oli jõutud üldkujule $x\left(f(x) + k\right)$, mis võrdub alati nulliga, sest sulgude ees olev tegur on alati null. Seega ei saanud arutlustes alati kindlalt väita, et sulgude sisu peab samuti nulliga võrduma.

Ülesanne 3

Ülesanne oli suhteliselt hästi lahendatud. Kõige levinumad lahendused olid žürii näidislahendus ja alternatiivlahendus, mis ülesande teises osas leidis, et

$a + b$ peab jaguma arvuga 5, ning kasutas seda lõppvastuse konstrueerimisel. Ülesande esimeses osas oli kasutatud väga paljusid erinevaid kontranäiteid.

Ülesanne 4

Ülesanne osutus suhteliselt lihtsaks. Paljud õpilased olid miinusmärgiga liikmete teisele poole viimise asemel grupeerinud liikmeid ühel pool ja hoopis kolmnurgast tulenevaid võrratusi manipuleerinud. Esines ka tegurdamist kasutavaid lahendusi ja paar koosinusteoreemi rakendavat lahendust. Levinud veaks oli tõestuseta väitmine, et z peab avaldise $z^2 - z$ maksimeerimiseks olema kolmnurga pikim külg.

Ülesanne 5

Ülesanne oli oodatult raske. Õige lahenduseni jõudsid õpilased, kes oskasid süstemaatiliselt joonist tükeldada ning määratud tükkide pindalasid arvutada. Leidus ka õpilasi, kes olid teinud kõik õigesti, kuid neid jäi täispunktidest eraldama mõni progresseeruv aritmeetikaviga.

Ülesanne 6

Üllatavalt vähe kasutati ülesande lahendamise juures värvimist, mistõttu paljud (enamasti täisläbivaatust kasutavad) lahendused olid väga pikad ja lohisevad, kus mõnikord jäid olulised juhtumid läbi vaatamata. Värvimist kasutavate lahenduste hulgas esines ka elegantne alternatiivlahendus, mis värvis ära need ruudud, mis asuvad korraga paarituarvulistes ridades ja tulpades.