Piirkonnavoor 2017

Võistluskomplekti koostamisse panustasid:

Elts Abel
Juhan Aru
Maksim Ivanov
Urve Kangro
Kristjan Kongas
Oleg Košik
Härmel Nestra
Heiki Niglas
Markus Rene Pae
Erik Paemurru
Ago-Erik Riet
Raili Vilt

Eesti LXIV matemaatikaolümpiaad

7. veebruar 2017 Piirkonnavoor **7. klass**

I osa. *Lahendamisaega on 40 minutit.*
Sellele lehele kirjuta ainult vastused, lahendamiseks võid kasutada lisapaberit.
Iga ülesande õige vastus annab 2 punkti.
Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.

1. Kui palju on selliseid neljakohalisi paarituid arve, mis koosnevad erinevatest numbritest 2, 0, 1 ja 7?

. . . .

2. Leia avaldise $20 : 17 : (20 : 17 : 20 : 17)$ väärtus.

. . . .

3. Leia neljakohaline naturaalarv, mille kõik numbrid on erinevad, kui on teada, et selle arvu kahe numbri vähendamisel 1 võrra ja ülejäänud kahe numbri suurendamisel 1 võrra on võimalik saada arv 2570.

. . . .

4. Antud arvu ruudu saamiseks tuleb arv ise korrutada arvuga 4. Mitme võrra on antud arvu kuup suurem arvust endast?

. . . .

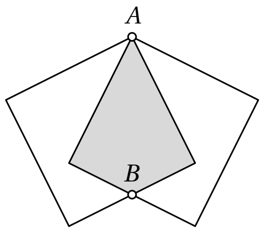
5. Leia vähim võimalik naturaalarv n, mille korral arv n^2 jagub arvuga 5 ja arv $(n+1)^2$ jagub arvuga 7.

. . . .

6. Kolmnurga ABC küljel BC leidub selline punkt D, et kolmnurk ABD on võrdkülgne ja kolmnurk ACD on võrdhaarne. Leia nurga ACB suurus.

. . . .

7. Kaks võrdset ruutu küljepikkusega 4 cm kattuvad nii, nagu joonisel näidatud. Punkt A on mõlema ruudu tipp, punkt B aga mõlema ruudu külje keskpunkt. Leia nende ruutude kattuva osa pindala.



....

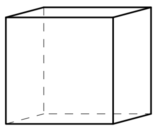
8. Lõigul on märgitud võrdsete vahekaugustega neli punkti A, B, C ja D. Lõiku pööratakse algul ümber punkti B, siis ümber punkti C ja lõpuks ümber punkti D iga kord täpselt sirgnurga võrra. Nimeta märgitud nelja punkti seast kõik need, mille asukoht pärast neid pööramisi on sama nagu algul.

....

9. Erikülgse kolmnurga iga külje pikkus on paaritu arv sentimeetreid. Leia selle kolmnurga vähim võimalik ümbermõõt.

....

10. Kuubiku igasse tippu kirjutatakse üks tähtedest A, B, C, D, E, F, G ja H. Igasse tippu kirjutatakse erinev täht. Viie tahu tippudes olevad tähed tähestiku järjestuses võetuna on järgmised:



A, B, E, H;
C, D, F, G;
B, D, E, G;
A, C, F, H;
B, C, G, H.

Leia kuuenda tahu tippudes olevad tähed.

....

Eesti LXIV matemaatikaolümpiaad

7. veebruar 2017 Piirkonnavoor **8. klass**

I osa. *Lahendamisaega on 40 minutit.*
Sellele lehele kirjuta ainult vastused, lahendamiseks võid kasutada lisapaberit.
Iga ülesande õige vastus annab 2 punkti.
Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.

1. Kui palju on selliseid neljakohalisi paarisarve, mis koosnevad erinevatest numbritest 2, 0, 1 ja 7 ning ei jagu arvuga 4?

. . . .

2. Leia avaldise $2017 - (2016 - (2015 - (2014 - (2013 - 2017))))$ väärtus.

. . . .

3. Leia kuuekohaline naturaalarv, mille kõik numbrid on erinevad, kui on teada, et selle arvu kolme numbri vähendamisel 1 võrra ja kolme ülejäänud numbri suurendamisel 1 võrra on võimalik saada arv 742809.

. . . .

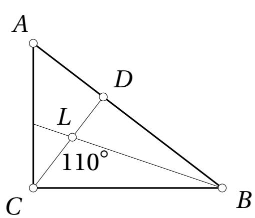
4. Papist on välja lõigatud hulk kolmnurki ja ruute. Ruute on 8 võrra rohkem kui kolmnurki ning kõigil neil kujunditel on kokku 88 nurka. Mitu kujundit on papist välja lõigatud?

. . . .

5. Leia vähim naturaalarv n, mille korral arv n^2 jagub arvuga 5 ja arv $(n+2)^2$ jagub arvuga 8.

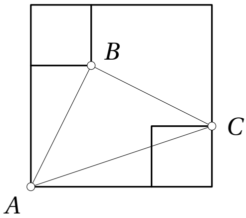
. . . .

6. Täisnurkse kolmnurga ABC täisnurga tipust C on tõmmatud kõrgus CD, mis lõikub tipust B tõmmatud nurgapoolitajaga punktis L. Nurk BLC on suurusega 110°. Leia nurga ACD suurus.



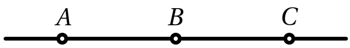
. . . .

7. Joonisel on kolm ruutu, neist suurim on küljepikkusega 3 cm ja kumbki väiksematest on küljepikkusega 1 cm. Punktid A, B ja C on nende ruutude tipud. Leia kolmnurga ABC pindala.



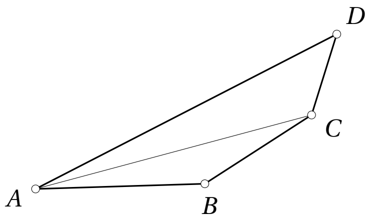
....

8. Lõigul on märgitud kolm punkti A, B ja C nii, et $|AB| = |BC| = 1$ cm. Lõiku pööratakse algul ümber punkti B ja siis ümber punkti C iga kord päripäeva täpselt täisnurga võrra. Kui pika tee läbib punkt A nende pööramiste jooksul?



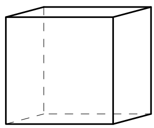
....

9. Nelinurga $ABCD$ külgede pikkused on $|AB| = 8$ cm, $|BC| = 6$ cm, $|CD| = 4$ cm ja $|DA| = 16$ cm. Leia diagonaali AC pikkus, kui on teada, et see on täisarv sentimeetreid.



....

10. Kuubiku igasse tippu kirjutatakse üks numbritest 1 kuni 8. Igasse tippu kirjutatakse erinev number. Viie tahu tippudes olevad numbrid suuruse järjestuses on järgmised:



1, 2, 4, 5;
3, 6, 7, 8;
2, 5, 7, 8;
1, 3, 4, 6;
2, 3, 4, 7.

Milline number on tipus, mis asub tipust numbriga 8 kõige kaugemal?

....

Eesti LXIV matemaatikaolümpiaad

7. veebruar 2017 Piirkonnavoor **9. klass**

I osa. *Lahendamisaega on 40 minutit.*
Sellele lehele kirjuta ainult vastused, lahendamiseks võid kasutada lisapaberit.
Iga ülesande õige vastus annab 2 punkti.
Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.

1. Leia vähim arvust 2017 suurem naturaalarv, mis jagub arvuga 201.

. . . .

2. Leia avaldise $2017^2 + 2018^2 - 2017 \cdot 2018 - 2017 \cdot 2019$ väärtus.

. . . .

3. Auto sõidab ühtlase kiirusega 100 km/h. Millise kiirusega peaks see auto sõitma, et läbida igas minutis 100 meetrit rohkem?

. . . .

4. Positiivsete arvude a, b ja c korral kehtivad võrdused $ab = 3$, $ac = 6$ ja $bc = 8$. Leia summa $a + b + c$.

. . . .

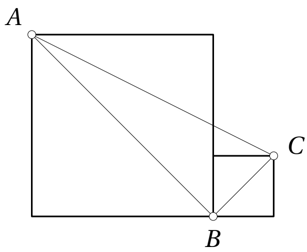
5. Leia vähim naturaalarv n, mille korral arv n^2 jagub arvuga 5 ja arv $(n+2)^2$ jagub arvuga 9.

. . . .

6. Teravnurkse kolmnurga ABC tipust C tõmmatakse nurgapoolitaja CD. Kolmnurga ACD üks sisenurkadest on suurusega 60° ja kolmnurga BCD üks sisenurkadest on suurusega 100°. Leia nurga ACB suurus.

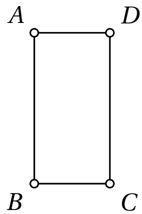
. . . .

7. Kahel ruudul küljepikkustega 3 cm ja 1 cm on ühine tipp B. Väiksema ruudu täpselt üks külg paikneb suurema ruudu küljel. Punkt A on tipu B vastastipp suures ruudus, punkt C aga tipu B vastastipp väikses ruudus. Leia kolmnurga ABC pindala.



. . . .

8. Ristküliku $ABCD$ külgede pikkused on $|AB| = |CD| = 2$ cm ja $|BC| = |DA| = 1$ cm. Ristkülikut pööratakse algul ümber punkti A, siis ümber punkti B ja lõpuks ümber punkti C iga kord päripäeva täpselt täisnurga võrra. Leia punkti D algse ja pööramiste järgse asukoha vaheline kaugus.

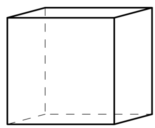


. . . .

9. Kui palju on selliseid võrdhaarseid kolmnurki, mille iga külje pikkus on täisarv sentimeetreid, alus on haarast pikem ning milles leidub külg pikkusega 5 cm?

. . . .

10. Kuubiku igasse tippu kirjutatakse üks numbritest 1 kuni 8. Igasse tippu kirjutatakse erinev number. Viie tahu tippudes olevad numbrid suuruse järjestuses on järgmised:



1, 2, 5, 8;
3, 4, 6, 7;
2, 4, 5, 7;
1, 3, 6, 8;
2, 3, 7, 8.

Leia suurim arv, mis on saadav kuubiku mingi diagonaali otspunktides asuvate arvude korrutamisel.

. . . .

Eesti LXIV matemaatikaolümpiaad

7. veebruar 2017 Piirkonnavoor **7. klass**

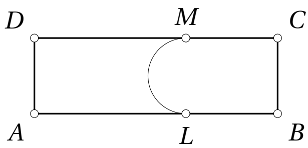
II osa. *Lahendamisaega on 2 tundi.*
Ülesannete lahendused kirjuta eraldi lehele.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti. Ainult vastusest ei piisa!
Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.

1. Ühte ritta kirjutatakse 7 positiivset täisarvu, millest esimene on a ja teine on b. Iga järgnev arv selles reas võrdub kahe talle reas vahetult eelneva arvu summaga.

a) Leia viimane arv selles reas (avaldisena a ja b kaudu).

b) Leia a suurim võimalik väärtus, kui on teada, et viimane arv reas on 2017.

2. Ristkülik $ABCD$ on poolringjoonega LM jaotatud kaheks osaks $ALMD$ ja $BLMC$, mille pindalad on võrdsed. Leia kummagi osa täpne ümbermõõt, kui on teada, et $|AD| = 4$ cm ja $|AL| = |DM| = 8$ cm.



3. Toomas ja Hendrik kohtusid trammipeatuses. Nad otsustasid mitte jääda trammi ootama, vaid hakkasid mööda rööpaid ühtlase kiirusega järgmise peatuse poole jalutama. Kui nad olid läbinud $\frac{1}{3}$ kahe peatuse vahelisest teest, märkasid nad selja taga trammi lähenevat eelmisse peatusse. Toomas hakkas endise kiirusega tagasi kõndima ja jõudis eelmisse peatusse just hetkeks, kui tramm seal peatus. Hendrik aga jätkas kiirust muutmata oma teed ja jõudis trammiga täpselt samal ajal järgmisse trammipeatusse. On teada, et trammi kiirus on täpselt 5 korda suurem poiste liikumiskiirusest ning et tramm seisis eelmises peatuses täpselt 1 minuti. Mitu minutit kulus Hendrikul ühest peatusest teise kõndimiseks?

Eesti LXIV matemaatikaolümpiaad

7. veebruar 2017 | Piirkonnavoor | **8. klass**

II osa. *Lahendamisaega on 2 tundi.*
Ülesannete lahendused kirjuta eraldi lehele.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti. Ainult vastusest ei piisa!
Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.

1. Murru $\frac{1}{2}$ lugejale tohib juurde liita kahtesid kuitahes palju kordi ja nimetajale kolmesid kuitahes palju kordi. Kas on võimalik tulemuseks saada murd, mis oleks võrdne

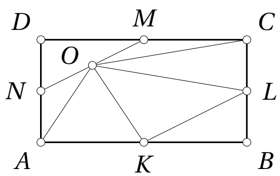
a) arvuga $\frac{3}{4}$?

b) arvuga $\frac{5}{6}$?

2. Ristküliku $ABCD$ külgede AB, BC, CD ja DA keskpunktid on vastavalt K, L, M ja N. Lõigu MN keskpunkt on O.

a) Kui suure osa ristküliku $ABCD$ pindalast moodustab kolmnurga KLO pindala?

b) Lõigud OA, OK, OL, OC, OM, ON ja KL jaotavad ristküliku seitsmeks kolmnurgaks, millest vähemalt üks on pindalaga 10 cm^2 ja vähemalt üks pindalaga 15 cm^2. Leia ristküliku $ABCD$ pindala.



3. Pille telefoni aku tagab täis laetult kas täpselt 10 tundi kõneaega või täpselt 220 tundi ooteaega. Aku tühjeneb mõlemal juhul ühtlase kiirusega. Ükskord rääkis Pille telefoniga täpselt kolmandiku kogu ajast, mis jäi aku täislaadimise ja tühjakssaamise vahele, ülejäänud aja oli telefon ootel. Mitmeks tunniks sel korral akut jätkus?

Eesti LXIV matemaatikaolümpiaad

7. veebruar 2017 | Piirkonnavoor | **9. klass**

II osa. *Lahendamisaega on 4 tundi.*
Ülesannete lahendused kirjuta eraldi lehele.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti. Ainult vastusest ei piisa!
Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.

1. Leia vähim naturaalarv, mille numbrite ruutude summa on suurem kui 1000.

2. Leia kõik positiivsed täisarvud a, mille korral arv $2017 \cdot a$ jagub arvuga $2017 + a$.

3. Kas leidub kolmnurk ABC, mille kõrguste lõikepunkti peegeldus sirgest AB langeb kokku tipuga C?

4. Ruudustikul mõõtmetega 8×8 on osa ruute värvitud valgeks ja ülejäänud mustaks. Ühel sammul tohib suvalises ruudustiku joontega piirnevas ristkülikus mõõtmetega 2×3 või 3×2 muuta korraga kõik mustad ruudud valgeks ja valged ruudud mustaks. Kas ruudustiku ruutude iga algse värvimise korral on selliste sammudega võimalik jõuda seisu, kus kõik ruudud on mustad?

Eesti LXIV matemaatikaolümpiaad

7. veebruar 2017 Piirkonnavoor **10. klass**

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.

1. Ringikujuline padi on ühtlase kihina kaetud magnetpuruga. Eemaldades padja keskelt ringikujuliselt alalt kõik puru, valgub ülejäänud puru ühtlaselt keskele kokku, nii et puruga kaetud ala on jätkuvalt ringikujuline ja purukihi paksus on endine. Pärast kirjeldatud eemaldamisprotsessi on puruga kaetud ala raadius 20% väiksem kui alguses. Mitu protsenti moodustab padja raadiusest selle ringi raadius, millelt puru eemaldatakse?

2. Leia kõik täisarvude paarid (x, y), mille korral

$$324^{x+y} = 2^{x-y} \cdot 3^{x-3} \cdot 4^{y-4}.$$

3. Tõesta, et leidub lõpmata palju erinevate positiivsete täisarvude nelikuid (a, b, c, d), mille korral

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{b} - \frac{1}{c} = \frac{1}{c} - \frac{1}{d}.$$

4. Nõiaraamatu armujoogi valmistamise peatükis on järgmised read.

> …Võta ühte lahust 3,5 liitrit ja teist 4,5 liitrit. Keeda esimest lahust niikaua, kuni tema kontsentratsioon on suurenenud x korda, ja teist niikaua, kuni tema kontsentratsioon on suurenenud y korda, aga jälgi seejuures, et $xy = 3$. Seejärel sega saadud lahused kokku ja serveeri …

Nõiatütar soovib kõiki neid juhtnööre järgides valmistada sellise koguse armujooki, et villides selle poole liitri kaupa erinevatesse purkidesse, ei jää jooki üle. Leia vähim võimalik valmistatava armujoogi kogus.

5. Õpetaja joonestab tahvlile kolmnurga ABC. Juku peab selle kolmnurga iga tipu ümber joonestama ringjoone keskpunktiga selles tipus, nii et kõik kolm ringjoont läbiksid mingit üht ja sama punkti O. Seejärel peab Juku joonestama neljanda ringjoone, mille keskpunkt on O ja mis puutub kõiki eelmisi ringjooni. Leia kõik võimalused, kus võib asuda punkt O, et õpetaja antud ülesannet oleks võimalik lõpuni täita.

6. Tasandil märgitakse 5 erinevat punkti, millest ükski kolm ei asu ühel sirgel. Tõesta, et leidub 4 märgitud punkti, mis asuvad kumera nelinurga tippudes.

Märkus. Hulknurka nimetatakse *kumeraks,* kui tema kõigi sisenurkade suurused on alla 180°.

Eesti LXIV matemaatikaolümpiaad

7. veebruar 2017 Piirkonnavoor **11. klass**

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.

1. Kumb arvudest $7 + \sqrt{37}$ ja $3\sqrt{19}$ on suurem?

2. Risttahuka servapikkuste ruudud suhtuvad nagu $3 : 4 : 5$. Leia selle risttahuka täpne ruumala, kui tema diagonaali pikkus on 6 cm.

3. Leia kõik naturaalarvude paarid (a, b), mille korral

$$a^2 + 2b^2 = 6336.$$

4. Täisnurkse kolmnurga nurkade siinuste korrutis on võrdne reaalarvuga k. Leia selle kolmnurga nurkade siinused.

5. Kolmnurgas ABC kehtib $|BC| = 2|AB|$. Olgu D lõigu BC keskpunkt ja K lõigu BD keskpunkt. Tõesta, et $|AC| = 2|AK|$.

6. Turniirist võttis osa 5 võistkonda. Iga kaks võistkonda mängisid omavahel ühe matši. Iga matšivõidu eest anti 2 punkti, viigiga lõppenud matši eest anti 1 punkt ja kaotatud matši eest 0 punkti. Ükski võistkond ei võitnud ega kaotanud kõiki mängitud matše ning lõppskooride paremusjärjestuses ei esinenud kohajagamisi. Leia kõik võimalused, mitu punkti võis saada kolmandaks jäänud võistkond.

Eesti LXIV matemaatikaolümpiaad

7. veebruar 2017 Piirkonnavoor **12. klass**

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.

1. Määra kõik positiivsed reaalarvud a ja q, mille korral geomeetriline jada $b_1, b_2, b_3, \ldots$ esimese liikmega $b_1 = a$ ja teguriga q rahuldab võrdust $b_n = 4 \cdot S_{n-1} + 7$ iga $n \geqslant 2$ korral, kus S_k tähistab jada esimese k liikme summat.

2. Ruutfunktsiooni $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ väärtused kohal -5 ja 12 on võrdsed ning ka väärtus kohal 7 on absoluutväärtuselt sama. Leia selle ruutfunktsiooni nullkohad.

3. Leia kõik mittenegatiivsete täisarvude paarid (a, b), mille korral

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{217}.$$

4. Olgu a positiivne reaalarv, $a \neq 1$. Tõesta, et mistahes positiivsete reaalarvude x, y korral

$$x^{\log_a y} = y^{\log_a x}.$$

5. Kolmnurga ABC siseringjoon puutub külgi BC ja AC vastavalt punktides A' ja B'. Punktist A' küljele AC tõmmatud ristlõigu ja kolmnurga ABC siseringjoone lõikepunkt on P. Tõesta, et punkt P poolitab kolmnurga ABC siseringjoone kaare $A'B'$ parajasti siis, kui $\angle ACB = 60^\circ$.

6. Turniiritabeli lahtrisse i-ndas reas j-ndas veerus märgitakse 1, kui võistkond järjekorranumbriga i võidab matšis võistkonda järjekorranumbriga j, viigi korral kirjutatakse sellesse lahtrisse 0,5 ja i-nda võistkonna kaotuse korral 0. Tõesta, et pärast seda, kui iga kaks võistkonda on pidanud omavahel ühe matši, on turniiritabeli reasummade ruutude summa võrdne veerusummade ruutude summaga.

LXIV Олимпиада Эстонии по математике

7 февраля 2017 г. Региональный тур **7 класс**

I часть. *Время, отводимое для решения: 40 минут.*
На этом листке написать только ответы, для решения можно использовать дополнительную бумагу.
Верный ответ каждой задачи даёт 2 балла.
Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.

1. Сколько всего таких четырёхзначных нечётных чисел, которые состоят из различных цифр 2, 0, 1 и 7?

. . . .

2. Найти значение выражения $20 : 17 : (20 : 17 : 20 : 17)$.

. . . .

3. Найти четырёхзначное натуральное число, у которого все цифры различны, если известно, что при уменьшении двух цифр этого числа на 1 и при увеличении оставшихся двух цифр на 1 возможно получить число 2570.

. . . .

4. Для получения квадрата данного числа нужно само число умножить на число 4. На сколько куб данного числа больше самого числа?

. . . .

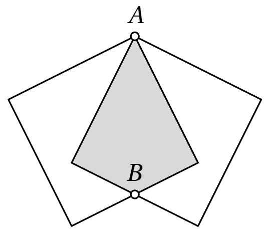
5. Найти наименьшее возможное натуральное число n, при котором число n^2 делится на число 5, а число $(n + 1)^2$ делится на число 7.

. . . .

6. На стороне BC треугольника ABC найдётся такая точка D, при которой треугольник ABD является равносторонним, а треугольник ACD равнобедренным. Найти величину угла ACB.

. . . .

7. Два равных квадрата с длиной стороны 4 см наложены друг на друга так, как показано на рисунке. Точка A является вершиной обоих квадратов, а точка B серединой обеих сторон квадрата. Найти площадь наложения этих квадратов друг на друга.



. . . .

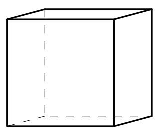
8. На отрезке через равные расстояния отмечены четыре точки A, B, C и D. Отрезок поворачивают сначала вокруг точки B, затем вокруг точки C и, наконец, вокруг точки D, каждый раз совершая поворот на развёрнутый угол. Назвать из отмеченных четырёх точек все такие точки, местоположение которых после этих поворотов оказалось таким же, как в начале.

. . . .

9. Длина каждой стороны разностороннего треугольника равна нечётному числу сантиметров. Найти наименьший возможный периметр этого треугольника.

. . . .

10. В каждую вершину кубика записали одну из букв A, B, C, D, E, F, G или H так, чтобы во всех вершинах были различные буквы. Далее в алфавитном порядке выписали буквы, оказавшиеся в вершинах пяти граней этого кубика:



A, B, E, H;
C, D, F, G;
B, D, E, G;
A, C, F, H;
B, C, G, H.

Найти буквы, которые были записаны в вершины шестой грани этого кубика.

. . . .

LXIV Олимпиада Эстонии по математике

7 февраля 2017 г. Региональный тур **8 класс**

I часть. *Время, отводимое для решения: 40 минут.*
На этом листке написать только ответы, для решения можно использовать дополнительную бумагу.
Верный ответ каждой задачи даёт 2 балла.
Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.

1. Сколько всего таких четырёхзначных чётных чисел, которые состоят из различных цифр 2, 0, 1 и 7, и которые не делятся на число 4?

. . . .

2. Найти значение выражения $2017-(2016-(2015-(2014-(2013-2017))))$.

. . . .

3. Найти шестизначное натуральное число, у которого все цифры различны, если известно, что при уменьшении трёх цифр этого числа на 1 и при увеличении оставшихся трёх цифр на 1 возможно получить число 742809.

. . . .

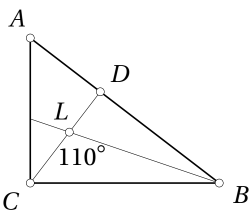
4. Из картона вырезано некоторое количество треугольников и квадратов. Известно, что квадратов на 8 больше, чем треугольников, и что у всех этих фигур всего 88 углов. Сколько всего фигур вырезано из картона?

. . . .

5. Найти наименьшее возможное натуральное число n, при котором число n^2 делится на число 5, а число $(n+2)^2$ делится на число 8.

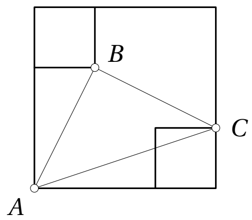
. . . .

6. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C проведена высота CD, которая пересекает проведённую из вершины B биссектрису в точке L. Величина угла BLC равна 110°. Найти величину угла ACD.



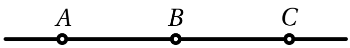
. . . .

7. На рисунке изображены три квадрата. Длина стороны наибольшего из них равна 3 см, а длина стороны обоих меньших квадратов равна 1 см. Точки A, B и C являются вершинами этих квадратов. Найти площадь треугольника ABC.



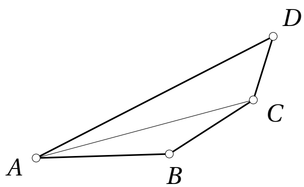
. . . .

8. На отрезке отмечены три точки A, B и C так, что $|AB| = |BC| = 1$ см. Отрезок поворачивают сначала вокруг точки B, а затем вокруг точки C, каждый раз поворачивая по часовой стрелке на прямой угол. Какое расстояние пройдёт точка A во время этих поворотов?



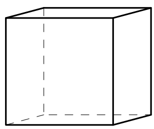
. . . .

9. Длины сторон четырёхугольника $ABCD$ равны $|AB| = 8$ см, $|BC| = 6$ см, $|CD| = 4$ см и $|DA| = 16$ см. Найти длину диагонали AC, если известно, что она равна целому числу сантиметров.



. . . .

10. В каждую вершину кубика записали одну из цифр от 1 до 8 так, чтобы во всех вершинах были различные цифры. Далее в порядке возрастания выписали цифры, оказавшиеся в вершинах пяти граней этого кубика:



1, 2, 4, 5;
3, 6, 7, 8;
2, 5, 7, 8;
1, 3, 4, 6;
2, 3, 4, 7.

Какая цифра была записана в той вершине, которая находилась на наибольшем расстоянии от вершины с цифрой 8?

. . . .

LXIV Олимпиада Эстонии по математике

7 февраля 2017 г. Региональный тур **9 класс**

I часть. *Время, отводимое для решения: 40 минут.*
На этом листке написать только ответы, для решения можно использовать дополнительную бумагу.
Верный ответ каждой задачи даёт 2 балла.
Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.

1. Найти наименьшее натуральное число, которое больше числа 2017 и которое делится на число 201.

. . . .

2. Найти значение выражения $2017^2 + 2018^2 - 2017 \cdot 2018 - 2017 \cdot 2019$.

. . . .

3. Машина едет с равномерной скоростью 100 км/ч. С какой скоростью она должна ехать, чтобы за каждую минуту проезжать на 100 метров больше?

. . . .

4. При положительных числах a, b и c действуют равенства $ab = 3$, $ac = 6$ и $bc = 8$. Найти сумму $a + b + c$.

. . . .

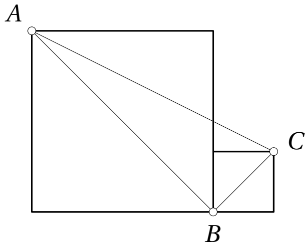
5. Найти наименьшее возможное натуральное число n, при котором число n^2 делится на число 5, а число $(n+2)^2$ делится на число 9.

. . . .

6. Из вершины C остроугольного треугольника ABC проведена биссектриса CD. Величина одного из внутренних углов треугольника ACD равна 60°, а величина одного из внутренних углов треугольника BCD равна 100°. Найти величину угла ACB.

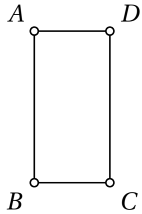
. . . .

7. У двух квадратов с длинами сторон 3 см и 1 см общая вершина B. Ровно одна сторона меньшего квадрата лежит на стороне большего квадрата. Точки A и B являются противоположными вершинами большего квадрата, а точки C и B противоположными вершинами меньшего квадрата. Найти площадь треугольника ABC.



. . . .

8. Длины сторон прямоугольника $ABCD$ равны $|AB| = |CD| = 2$ см и $|BC| = |DA| = 1$ см. Прямоугольник поворачивают сначала вокруг точки A, затем вокруг точки B и, наконец, вокруг точки C, каждый раз поворачивая по часовой стрелке на прямой угол. Найти расстояние между изначальным положением точки D и её конечным положением после этих поворотов.

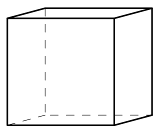


. . . .

9. Сколько всего таких равнобедренных треугольников, длина каждой стороны которых равна целому числу сантиметров, основание которых длиннее боковой стороны, и в которых имеется сторона длиной 5 см?

. . . .

10. В каждую вершину кубика записали одно из натуральных чисел от 1 до 8 так, чтобы во всех вершинах были различные числа. Далее в порядке возрастания выписали числа, оказавшиеся в вершинах пяти граней этого кубика:



$$1, 2, 5, 8;$$
$$3, 4, 6, 7;$$
$$2, 4, 5, 7;$$
$$1, 3, 6, 8;$$
$$2, 3, 7, 8.$$

Найти наибольшее число, которое можно получить при перемножении двух чисел, записанных в конечных точках какой-то диагонали этого кубика.

. . . .

LXIV Олимпиада Эстонии по математике

7 февраля 2017 г. Региональный тур **7 класс**

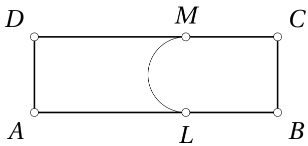
II часть. *Время, отводимое для решения: 2 часа.*
Решения задач написать на отдельном листе.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов. Написать только ответ недостаточно!
Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.

1. В один ряд записывают 7 положительных целых чисел, из которых первое число равно a и второе b. Каждое следующее число этого ряда равняется сумме двух чисел этого ряда, которые записаны непосредственно перед этим числом.

а) Найти последнее число этого ряда (выразив его через a и b).

б) Найти наибольшее возможное значение числа a, если известно, что последнее число этого ряда равно 2017.

2. Прямоугольник $ABCD$ поделён полуокружностью LM на две части $ALMD$ и $BLMC$, площади которых равны. Найти точный периметр каждой из этих частей, если известно, что $|AD| = 4$ см и $|AL| = |DM| = 8$ см.



3. Денис и Андрей встретились на трамвайной остановке A. Они решили не ждать трамвая, и пошли с равномерной скоростью вдоль рельсов к следующей остановке B. Когда они прошли ровно $\frac{1}{3}$ пути между этими остановками, то, оглянувшись назад, заметили приближающийся к остановке A трамвай. Денис развернулся и с той же скоростью пошёл к остановке A, добравшись до неё в тот момент, когда трамвай там остановился. Андрей же продолжил с той же скоростью движение к остановке B и добрался до неё с трамваем одновременно. Известно, что скорость трамвая была ровно в 5 раз больше скорости движения каждого из ребят, и что на остановке A трамвай стоял ровно 1 минуту. За сколько минут Андрей дошёл от остановки A до остановки B?

II часть. *Время, отводимое для решения: 2 часа.*
Решения задач написать на отдельном листе.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов. Написать только ответ недостаточно!
Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.

1. К числителю дроби $\frac{1}{2}$ разрешено прибавлять любое количество двоек, а к знаменателю этой дроби разрешено прибавлять любое количество троек. Возможно ли в результате получить дробь, которая будет равна

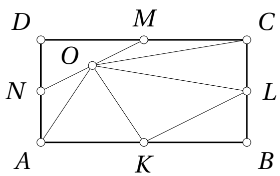
а) числу $\frac{3}{4}$?

б) числу $\frac{5}{6}$?

2. В прямоугольнике $ABCD$ серединами сторон AB, BC, CD и DA являются соответственно точки K, L, M и N. Серединой отрезка MN является точка O.

а) Какую часть площади прямоугольника $ABCD$ составляет площадь треугольника KLO?

б) Отрезки OA, OK, OL, OC, OM, ON и KL делят прямоугольник на семь треугольников, среди которых хотя бы один площадью 10 см^2 и хотя бы один площадью 15 см^2. Найти площадь прямоугольника $ABCD$.



3. Полностью заряженный аккумулятор в телефоне Полины разряжается либо ровно через 10 часов в разговорном режиме, либо ровно через 220 часов в режиме ожидания. В обоих режимах аккумулятор разряжается с равномерной скоростью. Однажды Полина говорила по телефону ровно треть времени, которое прошло с того момента, когда аккумулятор был полностью заряжен, до того момента, когда аккумулятор разрядился. В остальное время телефон был в режиме ожидания. Через сколько часов в тот раз разрядился аккумулятор в её телефоне?

II часть. *Время, отводимое для решения: 4 часа.*
Решения задач написать на отдельном листе.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов. Написать только ответ недостаточно!
Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.

1. Найти наименьшее натуральное число, сумма квадратов цифр которого больше числа 1000.

2. Найти все положительные целые числа a, при которых число $2017 \cdot a$ делится на число $2017 + a$.

3. Существует ли такой треугольник ABC, в котором точка пересечения высот симметрична вершине C относительно прямой AB?

4. На клетчатой доске размером 8×8 часть клеток покрашена в белый цвет, а остальные клетки в чёрный цвет. За один ход разрешается выбрать любой ограниченный сеткой доски прямоугольник размером 2×3 или 3×2 и перекрасить внутри него все чёрные клетки в белый цвет, а все белые клетки в чёрный цвет. Возможно ли при любой изначальной раскраске данной клетчатой доски получить при помощи только описанных ходов такую доску, в которой все клетки чёрного цвета?

LXIV Олимпиада Эстонии по математике

7 февраля 2017 г. Региональный тур **10 класс**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.

1. Круглая подушка покрыта равномерным слоем магнитной крошки. При изымании всей крошки из круглой области в центре подушки, оставшаяся крошка равномерно сдвигается в центр так, что покрытая крошкой область остаётся круглой, а толщина слоя крошки прежней. После описанного процесса радиус покрытой крошкой области оказывается на 20% меньше, чем вначале. Сколько процентов от радиуса подушки составляет радиус области, из которой изымается крошка?

2. Найти все пары целых чисел (x, y), при которых

$$324^{x+y} = 2^{x-y} \cdot 3^{x-3} \cdot 4^{y-4}.$$

3. Доказать, что найдётся бесконечно много четвёрок различных целых положительных чисел (a, b, c, d), при которых

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{b} - \frac{1}{c} = \frac{1}{c} - \frac{1}{d}.$$

4. В волшебной книге о приготовлении любовного зелья сказано:

> ... Возьми 3,5 литра одного раствора и 4,5 литра другого. Кипяти первый раствор, пока его концентрация не увеличится в x раз, а второй, пока его концентрация не увеличится в y раз, но следи, чтобы при этом было $xy = 3$. Затем смешай полученные растворы и подавай ...

Ведьма желает, следуя всем этим правилам, сделать любовное зелье в таком объёме, чтобы всё зелье можно было разлить в разные банки по поллитра и ничего бы не осталось сверху. Найти наименьший возможный объём зелья, который можно приготовить таким образом.

5. Учитель рисует на доске треугольник ABC. Петя должен вокруг каждой его вершины нарисовать окружность с центром в этой вершине так, что все три окружности проходили бы через какую-либо одну и ту же точку O. Затем Петя должен нарисовать четвёртую окружность с центром в точке O, которая касалась бы всех предыдущих окружностей. Найти все возможные расположения точки O, при которых это возможно.

6. На плоскости отмечены 5 различных точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Доказать, что найдутся 4 отмеченные точки, которые лежат в вершинах выпуклого четырёхугольника.

Примечание. Многоугольник называется *выпуклым*, если величины всех его внутренних углов меньше 180°.

LXIV Олимпиада Эстонии по математике

7 февраля 2017 г. Региональный тур **11 класс**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.

1. Что больше, $7 + \sqrt{37}$ или $3\sqrt{19}$?

2. Квадраты длин рёбер прямоугольного параллелепипеда соотносятся как $3 : 4 : 5$. Найти точный объём этого параллелепипеда, если длина его диагонали равна 6 см.

3. Найти все пары натуральных чисел (a, b), при которых

$$a^2 + 2b^2 = 6336.$$

4. Произведение синусов углов прямоугольного треугольника равно k. Найти синусы углов этого треугольника.

5. В треугольнике ABC выполняется $|BC| = 2|AB|$. Пусть D – середина отрезка BC, а K – середина отрезка BD. Доказать, что $|AC| = 2|AK|$.

6. В турнире приняло участие 5 команд. Каждые две команды сыграли друг с другом один матч. За победу в каждом матче давалось по 2 очка, за матч, окончившийся вничью, давалось 1 очко, за проигранный матч давалось 0 очков. Ни одна команда не выиграла и не проиграла все сыгранные матчи, а в итоговых результатах отсутствовало деление места по набранным очкам. Найти все возможности, сколько очков могла набрать команда, занявшая третье место.

LXIV Олимпиада Эстонии по математике

7 февраля 2017 г. Региональный тур **12 класс**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.

1. Найти все положительные действительные числа a и q, при которых для геометрической прогрессии $b_1, b_2, b_3, \ldots$ с первым членом $b_1 = a$ и знаменателем q будет выполняться равенство $b_n = 4 \cdot S_{n-1} + 7$ при любом $n \geqslant 2$, где S_k обозначает сумму k первых членов прогрессии.

2. Значения квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ в точках -5 и 12 равны между собой, а также равны по модулю значению в точке 7. Найти корни этой квадратичной функции.

3. Найти все пары неотрицательных целых чисел (a, b), при которых

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{217}.$$

4. Пусть a – положительное действительное число, $a \neq 1$. Доказать, что при любых положительных действительных числах x, y

$$x^{\log_a y} = y^{\log_a x}.$$

5. Внутренняя окружность треугольника ABC касается сторон BC и AC соответственно в точках A' и B'. Перпендикуляр из точки A', опущенный на сторону AC, пересекается с внутренней окружностью треугольника ABC в точке P. Доказать, что точка P делит пополам дугу $A'B'$ внутренней окружности треугольника ABC тогда и только тогда, когда $\angle ACB = 60^\circ$.

6. В строку i и столбец j турнирной таблицы записывают 1, если команда под номером i побеждает в матче команду под номером j. В случае ничьи в эту ячейку записывают 0,5, а в случае поражения команды i записывают 0. Доказать, что после того, как каждые две команды сыграют между собой по одному матчу, сумма квадратов сумм строк будет равняться сумме квадратов сумм столбцов.

Eesti LXIV matemaatikaolümpiaad

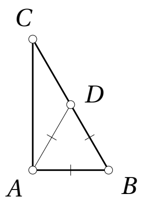
7. veebruar 2017 Piirkonnavoor **7. klass**

I osa vastused

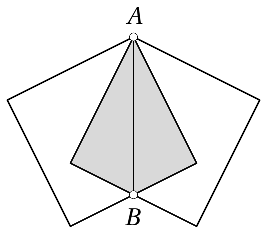
1. 8.
2. 340.
3. 3461.
4. 60.
5. 20.
6. 30°.
7. $8\ \mathrm{cm}^2$.
8. C.
9. 15 cm.
10. A, D, E, F.

Lahendused

1. Paaritu arvu lõpus saab olla 1 või 7 (2 võimalust). Arvu alguses saab olla 2 või see paaritu number, mis pole lõpus (2 võimalust). Kaks keskmist numbrit võivad olla ükskõik kummas järjestuses (2 võimalust). Kokku $2 \cdot 2 \cdot 2$ ehk 8 võimalust.
2. $20 : 17 : (20 : 17 : 20 : 17) = 20 : 17 : (1 : 17^2) = 20 \cdot 17 = 340$.
3. Viimane number võib olla saadud vaid vähendamisega numbrist 1. Seega esimene number ei või olla saadud suurendamisega numbrist 1, vaid ainult vähendamisega numbrist 3. Järelikult peavad ülejäänud numbrid 5 ja 7 olema saadud suurendamisega vastavalt numbritest 4 ja 6.
4. Arvu ruudu saamiseks tuleb arv ise korrutada arvu endaga. Ülesande tingimuse kohaselt saadakse arvu ruut korrutamisel 4-ga. Seega antud arv ise võrdub 4-ga. Arv 4^3 ehk 64 on arvust 4 suurem 60 võrra.
5. Arvu ruut jagub algarvuga 5 parajasti siis, kui arv ise jagub arvuga 5. Samuti jagub arvu ruut algarvuga 7 parajasti siis, kui arv ise jagub arvuga 7. Seega tuleb leida vähim naturaalarv n, nii et n jagub 5-ga ja $n+1$ jagub 7-ga. Kaks vähimat 7-ga jaguvat arvu 7 ja 14 ei sobi $n+1$ kohale, sest siis n ei jaguks 5-ga. Järgmine 7-ga jaguv arv 21 sobib $n+1$ kohale.
6. Et kolmnurk ABD on võrdkülgne (joonis 1), siis tema nurgad on suurusega 60°. Kuna $\angle ADC = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$, saab kolmnurk ADC olla võrdhaarne ainult juhul, kui ADC on tipunurk. Alusnurkade suurus on siis $\frac{180^\circ - 120^\circ}{2}$ ehk 30°. Seega ka $\angle ACB = 30^\circ$.



Joonis 1



Joonis 2

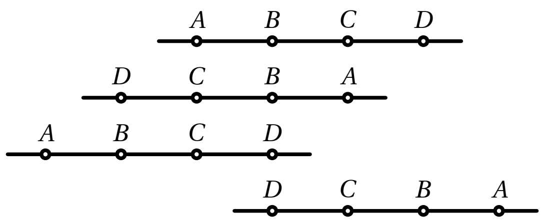
7. Sümmeetria tõttu jaotab lõik AB kattuva ala pooleks (joonis 2). Kumbki pool on täisnurkne kolmnurk pindalaga $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2$ ehk 4 ruutsentimeetrit. Kokku on kattuva ala pindala seega 8 cm^2.

8. Pärast esimest pööramist asub punkt C seal, kus algul punkt A ning D ühe koha võrra temast vasakul. Pööramine ümber punkti C ei muuda punkti C asukohta, punkt D liigub aga ühe koha võrra temast paremale, kus algselt oli B. Viimane pööramine ümber punkti D viib seega punkti C tema algsele kohale tagasi. Et iga pööramine muudab märgitud punktide järjestuse vastupidiseks ja pööramiste arv on paaritu, ei saa ülejäänud punktid asuda oma algsel kohal. Joonis 3 kujutab üksteise all järjest lõigu algset asendit ja asendit pärast iga pööramist.

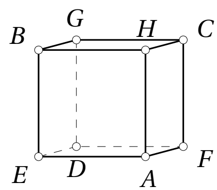
9. Kolmnurga ühegi külje pikkus ei saa olla 1 cm, sest ülejäänud kahe külje pikkuste vahe on sellest suurem. Kui kolmnurga lühima külje pikkus on 3 cm, siis ülejäänud külgede pikkused saavad olla 5 cm ja 7 cm. Seega vähim võimalik ümbermõõt on 15 cm.

10. *Lahendus 1.* Iga tipp kuulub kolmele tahule. Viie tahu tippude loeteludes esinevad tähed A, D, E, F kaks korda ja ülejäänud tähed kolm korda. Seega puuduva tahu tippudes on A, D, E, F.

Lahendus 2. Kahel tahul võib olla kaks ühist tippu või mitte ühtegi. Ühised tipud on kuubi serva otspunktid.



Joonis 3



Joonis 4

- Esimesest ja kolmandast tahust tuleneb serv otspunktidega B ja E, esimesest ja viiendast tahust aga serv otspunktidega B ja H. Seega esimese tahu tippude järjestus mööda servi on A, E, B, H.
- Et leidub serv otspunktidega B ja E, siis selle serva vastasserv kolmandal tahul on otspunktidega D ja G. Viienda tahu tähtede põhjal peavad olema ühendatud B ja G. Seega kolmanda tahu tippude järjestus mööda servi on B, E, D, G.
- Et leidub serv otspunktidega A ja H, siis selle serva vastasserv neljandal tahul on otspunktidega C ja F. Viienda tahu tähtede põhjal peavad olema ühendatud C ja H. Seega neljanda tahu tippude järjestus mööda servi on A, H, C, F.

Eelnevast tulenevalt on viiendal tahu tippude järjestus mööda servi B, H, C, G ja teisel tahul G, D, F, C (joonis 4). Üle jääb tahk tippudega A, E, D, F.

I osa vastused

1. 6.
2. -2.
3. 653718.
4. 24.
5. 10.
6. 40°.
7. $2{,}5\ \mathrm{cm}^2$.
8. $1{,}5\pi$ cm.
9. 13 cm.
10. 4.

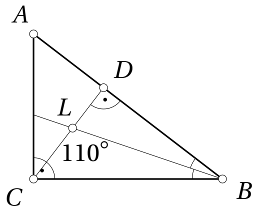
Lahendused

1. Paarisarvu lõpus saab olla 0 või 2. Kui arvu lõpus on 0, peab kümneliste number olema 1 või 7, et arv ei jaguks 4-ga (2 võimalust). Kaks esimest numbrit võivad olla ükskõik kummas järjestuses (2 võimalust). Seega 0-ga lõppevaid nõutud omadusega arve on $2 \cdot 2$ ehk 4. Kui arvu lõpus on 2, peab kümneliste number olema 0, et arv ei jaguks 4-ga (1 võimalus). Kaks esimest numbrit võivad olla ükskõik kummas järjestuses (2 võimalust). Seega 2-ga lõppevaid nõutud omadusega arve on $1 \cdot 2$ ehk 2. Kokku on nõutud arve $4 + 2$ ehk 6.

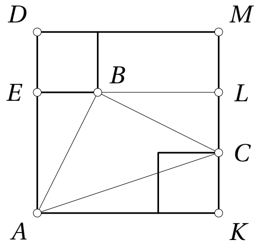
2. Saame

$$\begin{aligned}
2017 - (2016 - (2015 - (2014 - (2013 - 2017)))) &= \\
= 2017 - (2016 - (2015 - (2014 - (-4)))) &= \\
= 2017 - (2016 - (2015 - 2018)) &= \\
= 2017 - (2016 - (-3)) &= \\
= 2017 - 2019 &= \\
= -2.
\end{aligned}$$

3. Numbrit 0 on võimalik saada ainult vähendamisega numbrist 1. Numbrit 2 pole seega võimalik saada suurendamisega numbrist 1, vaid ainult vähendamisega numbrist 3. Sarnaselt pole numbrit 4 võimalik saada suurendamisega numbrist 3, vaid ainult vähendamisega numbrist 5. Numbrid 7, 8 ja 9 peavad järelikult olema saadud suurendamisega vastavalt numbritest 6, 7 ja 8.



Joonis 5



Joonis 6

4. *Lahendus 1.* Olgu kolmnurkade arv x, siis ruute on $x + 8$. Kolmnurkadel on kokku $3x$ tippu, ruutudel aga $4(x + 8)$ ehk $4x + 32$ tippu. Seega $3x + 4x + 32 = 88$, kust $x = 8$. Järelikult on kolmnurki 8 ja ruute 16, kokku 24 kujundit.

Lahendus 2. Olgu kolmnurkade arv x ja ruutude arv y. Ülesande tingimuste põhjal saame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} y - x = 8, \\ 4y + 3x = 88. \end{cases}$$

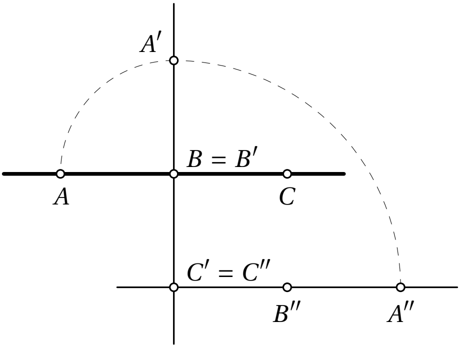
Korrutades teise võrrandi pooled 2-ga ja lahutades esimese võrrandi, saame $7y + 7x = 168$, kust $7(x + y) = 168$ ja $x + y = 24$.

5. Arvu ruut jagub algarvuga 5 parajasti siis, kui arv ise jagub arvuga 5. Seega tuleb leida vähim 5-ga jaguv naturaalarv n, mille korral $(n+2)^2$ jagub 8-ga. Juhul $n = 0$ ja $n = 5$ saame vastavalt $(n+2)^2 = 4$ ja $(n+2)^2 = 49$, mis ei jagu 8-ga. Juhul $n = 10$ aga $(n+2)^2 = 144 = 8 \cdot 18$.

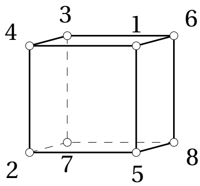
6. Et $\angle BLD = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$, siis kolmnurgast DBL saame võrduse $\angle DBL = 180^\circ - 90^\circ - 70^\circ = 20^\circ$ (joonis 5). Seega $\angle CBA = 2 \cdot 20^\circ = 40^\circ$. Kuna kolmnurgad ACD ja ABC on sarnased tunnuse NN põhjal, siis ka $\angle ACD = 40^\circ$.

7. Tähistame punktid D, E, K, L, M nagu näidatud joonisel 6. Tähistagu $S_{\mathcal{K}}$ kujundi $\mathcal{K}$ pindala. Saame

$$\begin{aligned}
S_{AKMD} &= 3\text{ cm} \cdot 3\text{ cm} = 9\text{ cm}^2, \\
S_{ELMD} &= 1\text{ cm} \cdot 3\text{ cm} = 3\text{ cm}^2, \\
S_{ABE} &= \frac{2\text{ cm} \cdot 1\text{ cm}}{2} = 1\text{ cm}^2, \\
S_{AKC} &= \frac{1\text{ cm} \cdot 3\text{ cm}}{2} = 1{,}5\text{ cm}^2, \\
S_{BLC} &= \frac{2\text{ cm} \cdot 1\text{ cm}}{2} = 1\text{ cm}^2.
\end{aligned}$$



Joonis 7



Joonis 8

Järelikult

$$S_{ABC} = S_{AKMD} - (S_{ELMD} + S_{ABE} + S_{AKC} + S_{BLC}) = 2{,}5\ \text{cm}^2.$$

8. Esimese pööramise jooksul ümber punkti B läbib punkt A veerandi ringjoonest, mille raadius on 1 cm. Läbitud tee pikkus on $\frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot 1$ cm ehk $\frac{1}{2}\pi$ cm. Teise pööramise jooksul ümber punkti C läbib punkt A veerandi ringjoonest, mille raadius on 2 cm. Läbitud tee pikkus on nüüd $\frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot 2$ cm ehk π cm. Järelikult läbib punkt A kokku tee pikkusega $\frac{3}{2}\pi$ cm. Joonisel 7 on punktide A, B, C asukohad pärast esimest pööramist tähistatud vastavalt A', B', C' ja pärast teist pööramist vastavalt A'', B'', C''.

9. Kolmnurgas ABC on küljed AB ja BC vastavalt pikkustega 8 cm ja 6 cm, mistõttu külje AC pikkus peab olema väiksem kui 14 cm. Teisalt on kolmnurgas ADC küljed AD ja DC vastavalt pikkustega 16 cm ja 4 cm, mistõttu külje AC pikkus peab olema suurem kui 12 cm. Ainus täisarv 12 ja 14 vahel on 13.

10. *Lahendus 1.* Iga tipp kuulub kolmele tahule. Viie tahu tippude loeteludes esinevad numbrid 1, 5, 6, 8 kaks korda ja ülejäänud numbrid kolm korda. Seega puuduva tahu tippudes on numbrid 1, 5, 6, 8. Kaks kuubi tippu on kuubi diagonaali otspunktid parajasti siis, kui nad ei asu ühel ja samal tahul. Tahkudel olevate numbrite loeteludest näeme, et 8 ei asu samal tahul numbriga 4.

Lahendus 2. Kahel tahul võib olla kaks ühist tippu või mitte ühtegi. Ühised tipud on kuubi serva otspunktid.

- Esimesest ja kolmandast tahust tuleneb serv otspunktidega 2 ja 5, esimesest ja viiendast tahust aga serv otspunktidega 2 ja 4. Seega esimese tahu tippude järjestus mööda servi on 1, 4, 2, 5.
- Et leidub serv otspunktidega 2 ja 5, siis selle serva vastasserv kolmandal tahul on otspunktidega 7 ja 8. Viienda tahu tähtede põhjal peavad olema ühendatud 2 ja 7. Seega kolmanda tahu tippude järjestus mööda servi on 2, 5, 8, 7.
- Et leidub serv otspunktidega 1 ja 4, siis selle serva vastasserv neljandal tahul on otspunktidega 3 ja 6. Viienda tahu tähtede põhjal peavad olema ühendatud 4 ja 3. Seega neljanda tahu tippude järjestus mööda servi on 1, 4, 3, 6.

Eelnevast tulenevalt on viiendal tahu tippude järjestus mööda servi 2, 7, 3, 4 teisel tahul 3, 6, 7, 8 (joonis 8). Üle jääb tahk tippudega 1, 5, 8, 6. Kuubi diagonaal, mis algab tipust numbriga 8, lõpeb tipus numbriga 4.

Eesti LXIV matemaatikaolümpiaad

7. veebruar 2017 | Piirkonnavoor | **9. klass**

I osa vastused

1. 2211.

2. −2016.

3. 106 km/h.

4. 7,5.

5. 10.

6. 80°.

7. 3 cm^2.

8. 6 cm.

9. 6.

10. 32.

Lahendused

1. Arv 2010 jagub arvuga 201. Suuruselt järgmine arv, mis jagub arvuga 201, on $2010 + 201$ ehk 2211. Et $2010 < 2017$ ja $2211 > 2017$, on 2211 vähim arvust 2017 suurem arv, mis jagub arvuga 201.

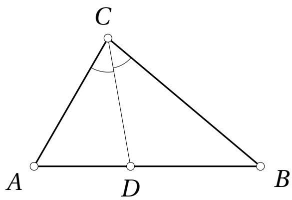
2. Kaksliikme ruudu valemi abil saame

$$\begin{aligned}
2017^2 + 2018^2 - 2017\cdot 2018 - 2017\cdot 2019 &= \\
&= 2017^2 + 2018^2 - 2\cdot 2017\cdot 2018 + 2017\cdot 2018 - 2017\cdot 2019 = \\
&= (2017-2018)^2 + 2017\cdot(2018-2019) = \\
&= 1 - 2017 = \\
&= -2016.
\end{aligned}$$

3. Igas minutis 100 meetrit annab tunnis kokku $60\cdot 100$ meetrit ehk 6 kilomeetrit. Auto peaks sõitma kiirusega $100+6$ ehk 106 kilomeetrit tunnis.

4. Andmetest saame $c^2 = \dfrac{ac\cdot bc}{ab} = \dfrac{6\cdot 8}{3} = 16$. Seega $c = 4$. Nüüd $a = \dfrac{6}{c} = 1{,}5$ ja $b = \dfrac{8}{c} = 2$. Järelikult $a + b + c = 7{,}5$.

5. Arvu ruut jagub algarvuga 5 parajasti siis, kui arv ise jagub arvuga 5. Seega tuleb leida vähim 5-ga jaguv naturaalarv n, mille korral $(n+2)^2$ jagub 9-ga. Juhul $n = 0$ ja $n = 5$ saame vastavalt $(n+2)^2 = 4$ ja $(n+2)^2 = 49$, mis ei jagu 9-ga. Juhul $n = 10$ aga $(n+2)^2 = 144 = 9\cdot 16$.

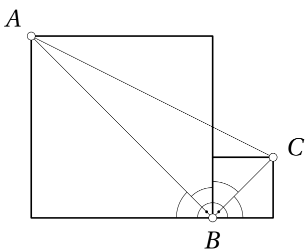


Joonis 9

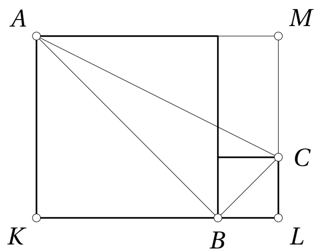
6. Kolmnurga BCD nurk suurusega 100° ei saa olla tipu B juures, sest vastavalt eeldusele on kolmnurk ABC teravnurkne, ega ka tipu C juures, sest pool kolmnurga nurgast ei saa olla nürinurk (joonis 9). Sellest tulenevalt $\angle BDC = 100^\circ$, millest saame $\angle ADC = 80^\circ$. Kolmnurga ACD nurk suurusega 60° ei saa järelikult olla tipu D juures ja samuti ei saa see olla tipu C juures, sest pool teravnurgast on alla 45°. Seega $\angle DAC = 60^\circ$. Kolmnurgas ACD saame nüüd $\angle ACD = 180^\circ - 80^\circ - 60^\circ = 40^\circ$, kust $\angle ACB = 2 \cdot 40^\circ = 80^\circ$.

7. *Lahendus 1.* Et suure ruudu pindala $9\,\text{cm}^2$ avaldub rombi pindala valemiga kujul $\frac{1}{2}|AB|^2$ ja väikse ruudu pindala sarnaselt kujul $\frac{1}{2}|BC|^2$, siis $|AB| = \sqrt{18}\,\text{cm}$ ja $|BC| = \sqrt{2}\,\text{cm}$. Lõigud AB ja BC on omavahel risti, sest $\angle ABC = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$ (joonis 10). Seega kolmnurga ABC pindala on $\dfrac{|AB| \cdot |BC|}{2}$ ehk $3\,\text{cm}^2$.

Lahendus 2. Olgu K ja L vastavalt suure ruudu ja väikse ruudu tipud, mille vahele jääb punkt B (joonis 11). Olgu punkt M selline, et $AKLM$ on rist-



Joonis 10



Joonis 11

külik. Tähistagu $S_{\mathscr{K}}$ kujundi $\mathscr{K}$ pindala. Saame

$$\begin{aligned} S_{AKB} &= \frac{3\text{ cm}\cdot 3\text{ cm}}{2} = 4{,}5\text{ cm}^2,\\ S_{BLC} &= \frac{1\text{ cm}\cdot 1\text{ cm}}{2} = 0{,}5\text{ cm}^2,\\ S_{CMA} &= \frac{2\text{ cm}\cdot 4\text{ cm}}{2} = 4\text{ cm}^2. \end{aligned}$$

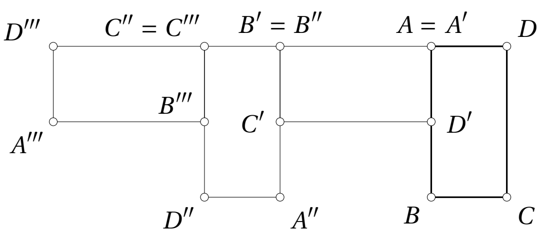
Lisaks $S_{AKLM} = 3\text{ cm}\cdot 4\text{ cm} = 12\text{ cm}^2$. Järelikult

$$S_{ABC} = S_{AKLM} - (S_{AKB} + S_{BLC} + S_{CMA}) = 3\text{ cm}^2.$$

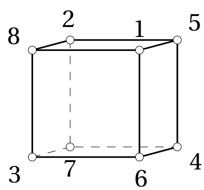
8. Esimesel pööramisel jääb punkt A paigale, punkt B aga satub sirgele, kus algselt paiknevad punktid A ja D. Teisel pööramsel jääb punkt B paigale, punkt C aga satub eelnevalt jutuks olnud sirgele. Kolmandal pööramisel jääb punkt C paigale ja punkt D satub samale sirgele. Kokkuvõttes on D algse ja pööramiste järgse asukoha vaheline kaugus võrdne ristküliku ümbermõõduga $2\cdot(1+2)$ ehk 6 sentimeetrit. Joonisel 12 on punktide A, B, C, D asukohad pärast esimest pööramist tähistatud vastavalt A', B', C', D', pärast teist pööramist vastavalt A'', B'', C'', D'' ja pärast kolmandat pööramist vastavalt A''', B''', C''', D'''.

9. Kui aluse pikkus on 5 cm, siis saab temast lühema haara pikkus olla 4 cm või 3 cm, sest kahe veelgi lühema haara pikkuste summa oleks väiksem kui 5 cm. Kui haara pikkus on 5 cm, siis saab temast pikema aluse pikkus olla 6 cm, 7 cm, 8 cm või 9 cm, sest edasi ületaks aluse pikkus kahe haara pikkuste summa. Kokku on otsitavaid kolmnurki 6.

10. *Lahendus 1.* Iga tipp kuulub kolmele tahule. Viie tahu tippude loeteludes esinevad numbrid 1, 4, 5, 6 kaks korda ja ülejäänud numbrid kolm korda. Seega puuduva tahu tippudes on numbrid 1, 4, 5, 6. Kaks kuubi tippu on kuubi diagonaali otspunktid parajasti siis, kui nad ei asu ühel ja samal tahul. Tahkudel olevate numbrite loeteludest näeme, et number 4 ei



Joonis 12



Joonis 13

asu samal tahul numbriga 8, mis annab korrutise 32. Et leida ülejäänute seas kaks suurema korrutisega numbrit, peaks üks teguritest olema 7, sest $6 \cdot 5 = 30 < 32$. Teine tegur peaks olema 6 või 5, kuid 7 esineb nii 6-ga kui ka 5-ga ühel tahul.

Lahendus 2. Kahel tahul võib olla kaks ühist tippu või mitte ühtegi. Ühised tipud on kuubi serva otspunktid.

- Esimesest ja kolmandast tahust tuleneb serv otspunktidega 2 ja 5, esimesest ja viiendast tahust aga serv otspunktidega 2 ja 8. Seega esimese tahu tippude järjestus mööda servi on 1, 8, 2, 5.
- Et leidub serv otspunktidega 2 ja 5, siis selle serva vastasserv kolmandal tahul on otspunktidega 4 ja 7. Viienda tahu tähtede põhjal peavad olema ühendatud 2 ja 7. Seega kolmanda tahu tippude järjestus mööda servi on 2, 5, 4, 7.
- Et leidub serv otspunktidega 1 ja 8, siis selle serva vastasserv neljandal tahul on otspunktidega 3 ja 6. Viienda tahu tähtede põhjal peavad olema ühendatud 8 ja 3. Seega neljanda tahu tippude järjestus mööda servi on 1, 8, 3, 6.

Eelnevast tulenevalt on viiendal tahu tippude järjestus mööda servi 2, 8, 3, 7 teisel tahul 3, 6, 4, 7 (joonis 8). Üle jääb tahk tippudega 1, 5, 4, 6. Kuubi diagonaalide otspunktides on numbrid 1 ja 7, numbrid 2 ja 6, numbrid 3 ja 5 ning numbrid 4 ja 8. Suurima korrutise 32 annavad 4 ja 8.

II osa lahendused

1. *Vastus:* a) $5a + 8b$; b) 397.

a) Arvud reas on a, b, $a + b$, $a + 2b$, $2a + 3b$, $3a + 5b$ ja $5a + 8b$.

b) Ülesande tingimuse kohaselt $5a + 8b = 2017$. Mida suurem on a väärtus, seda väiksem on b väärtus, mistõttu suurima võimaliku a väärtuse leidmiseks piisab leida vähim võimalik b väärtus. Et avaldise $2017 - 8b$ väärtus jaguks 5-ga, peab tema viimane number olema 0 või 5. See tähendab, et avaldise $8b$ väärtus lõpeb vastavalt numbriga 7 või 2. Number 7 ei ole võimalik, sest on paaritu. Vähim b väärtus, mille korral $8b$ väärtus lõpeb 2-ga, on 4. Siis $a = \frac{2017 - 32}{5} = 397$.

Märkus. Ülesande b-osa lahenduses piisab vähima võimaliku b väärtuse leidmiseks lihtsalt juhud $b = 1, 2, 3, 4$ läbi kontrollida ja veenduda, et 4 on esimene väärtus, mille puhul avaldise $2017 - 8b$ väärtus jagub 5-ga.

2. *Vastus:* $(20 + 2\pi)$ cm ja 20 cm.

Et poolringjoone LM raadius on 2 sentimeetrit, siis selle poolringjoone pikkus on 2π sentimeetrit. Poolringjoonega LM ristkülikust $ABCD$ eraldatud kujundi $ALMD$ ümbermõõt on niisiis $4 + 2 \cdot 8 + 2\pi$ ehk $20 + 2\pi$ sentimeetrit.

Olgu lõikude LB ja MC pikkus x sentimeetrit. Poolringjoonega LM eraldatud kujundite $ALMD$ ja $BLMC$ pindalad on siis vastavalt $4 \cdot 8 - \frac{4\pi}{2}$ ehk $32 - 2\pi$ ja $4x + \frac{4\pi}{2}$ ehk $4x + 2\pi$ ruutsentimeetrit. Et need pindalad on võrdsed, siis $32 - 2\pi = 4x + 2\pi$, kust $x = 8 - \pi$. Poolringjoonega LM ristkülikust $ABCD$ eraldatud kujundi $BLMC$ ümbermõõt on seega $4 + 2 \cdot (8 - \pi) + 2\pi$ ehk 20 sentimeetrit.

3. *Vastus:* 7,5.

Olgu t aeg, mis kulus Hendrikul ühest peatusest teise kõndimiseks. Ülesande tingimuse põhjal liikus Toomas $\frac{1}{3}$ teest Hendrikuga kaasa. Et liiguti ühtlase kiirusega, siis ajavahemik, mille jooksul Toomas liikus koos Hendrikuga, oli $\frac{1}{3}t$. Järelikult ka ajavahemik, millega Toomas liikus tagasi eelmisse trammipeatusse, oli $\frac{1}{3}t$. Kokku kulutas Toomas jala liikumisele aja $\frac{2}{3}t$. Sel hetkel jäi Hendrikul veel aega $\frac{1}{3}t$ järgmisse peatusse jõudmiseni. Ülesande tingimuse järgi alustas tramm eelmisest peatusest sõitu 1 minut pärast seda hetke. Et tramm liikus poistest 5 korda kiiremini, liikus tramm ühest peatusest teise ajaga $\frac{1}{5}t$. Kokkuvõttes $\frac{1}{3}t - \frac{1}{5}t = 1$ min, kust $t = 7{,}5$ min.

II osa lahendused

1. *Vastus:* a) jah; b) ei.
   a) Liites lugejale kahtesid 7 korda ja nimetajale kolmesid 6 korda, saame murru $\frac{15}{20}$, mis võrdub arvuga $\frac{3}{4}$.
   b) Liites nimetajale kolmesid, jääb nimetaja jääk 3-ga jagamisel samaks. Algul on see 2, mistõttu nimetaja ei saa ka pärast liitmisi 3-ga jaguda. Murru väärtus $\frac{5}{6}$ aga tähendaks, et lugeja ja nimetaja esituvad pärast liitmisi vastavalt kujul $5a$ ja $6a$, kus a on mingi täisarv. Saame vastuolu, sest $6a = 3 \cdot 2a$.

2. *Vastus:* a) $\frac{1}{4}$; b) 80 cm^2.
   Tähistagu $S_{\mathscr{K}}$ kujundi $\mathscr{K}$ pindala ning olgu veel $|AB| = |CD| = a$ ja $|BC| = |DA| = b$. Saame

$$
\begin{aligned}
S_{ONA} &= \frac{\frac{b}{2} \cdot \frac{a}{4}}{2} = \frac{S_{ABCD}}{16},\\
S_{OAK} &= \frac{\frac{a}{2} \cdot \frac{3b}{4}}{2} = \frac{3S_{ABCD}}{16},\\
S_{OLC} &= \frac{\frac{b}{2} \cdot \frac{3a}{4}}{2} = \frac{3S_{ABCD}}{16},\\
S_{OCM} &= \frac{\frac{a}{2} \cdot \frac{b}{4}}{2} = \frac{S_{ABCD}}{16},\\
S_{MDN} &= S_{KBL} = \frac{\frac{a}{2} \cdot \frac{b}{2}}{2} = \frac{2S_{ABCD}}{16}.
\end{aligned}
$$

   a) Ülal toodud arvutustest tulenevalt

$$S_{KLO} = S_{ABCD} - \frac{1+3+3+1+2\cdot 2}{16} S_{ABCD} = \frac{4S_{ABCD}}{16}$$

   ehk $\frac{S_{KLO}}{S_{ABCD}} = \frac{1}{4}$.
   b) Seitsme kolmnurga ONA, OAK, OLC, OCM, MDN, KBL ja KLO pindalade hulgas esineb neli suurust $\frac{S_{ABCD}}{16}$, $\frac{2S_{ABCD}}{16}$, $\frac{3S_{ABCD}}{16}$ ja $\frac{4S_{ABCD}}{16}$. Neist vaid kaks keskmist suhtuvad nagu $10 : 15$. Järelikult $\frac{2S_{ABCD}}{16} = 10$ cm^2, kust $S_{ABCD} = 80$ cm^2.

3. *Vastus:* 27,5.

Tund kõneaega kulutab akut samapalju kui 22 tundi ooteaega. Oletame, et aku pidas ülesandes kirjeldatud juhul vastu x tundi. See tähendab, et Pille kõneles telefoniga $\frac{x}{3}$ tundi ja telefon oli ootel $\frac{2}{3}x$ tundi. Teisendades akukulu ooteajaks, saame võrrandi $\frac{1}{3}x \cdot 22 + \frac{2}{3}x = 220$, kust $8x = 220$ ehk $x = 27{,}5$.

II osa lahendused

1. *Vastus:* 6999999999999.

Et $12 \cdot 9^2 = 972 < 1000$, peab otsitavas arvus olema vähemalt 13 numbrit. Et $6^2 + 12 \cdot 9^2 = 1008 > 1000$, ei ole otsitav arv suurem kui 6999999999999. Seega on otsitav arv täpselt 13-kohaline. Et $5^2 + 12 \cdot 9^2 = 997 < 1000$, ei saa tema ükski number olla väiksem kui 6. Seega on otsitava arvu esimene number 6. Et $6^2+8^2+11\cdot 9^2 = 991 < 1000$, ei saa ükski ülejäänud numbritest olla väiksem kui 9. Kokkuvõttes 6999999999999 ongi otsitav.

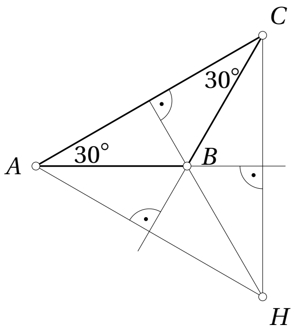
2. *Vastus:* $2016 \cdot 2017$.

Lahendus 1. Et $\dfrac{2017 \cdot a}{2017 + a} = 2017 - \dfrac{2017^2}{2017 + a}$, siis arv $2017 \cdot a$ jagub arvuga $2017 + a$ parajasti siis, kui arv 2017^2 jagub arvuga $2017 + a$. Et 2017 on algarv, on arvu 2017^2 ainsad tegurid 1, 2017 ja 2017^2. Arv $2017 + a$ saab võrduda neist ainult arvuga 2017^2. Sel juhul $a = 2017^2 - 2017 = 2016 \cdot 2017$.

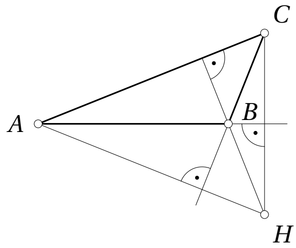
Lahendus 2. Olgu $\dfrac{2017 \cdot a}{2017 + a} = k$ mingi positiivse täisarvu k korral. Siis $2017a = 2017k + ak$. Kuna nii $2017a$ kui $2017k$ jaguvad arvuga 2017, peab ka ak jaguma arvuga 2017. Et 2017 on algarv, siis kas a või k jagub 2017-ga. Kui k jaguks 2017-ga, peaks $\dfrac{a}{2017 + a}$ olema positiivne täisarv, mis pole võimalik. Järelikult a jagub 2017-ga, st $a = 2017b$ mingi positiivse täisarvu b korral. Asendades selle esialgsesse võrdusesse, saame $\dfrac{2017^2 b}{2017 + 2017b} = k$ ehk $\dfrac{2017b}{b+1} = k$. Kuna b ja $b + 1$ on ühistegurita, peab 2017 jaguma arvuga $b+1$. Ainus võimalus on $b = 2016$. See annab $k = 2016$ ning $a = 2017 \cdot 2016$.

3. *Vastus:* jah.

Lahendus 1. Olgu $\angle ABC = 120^\circ$ ja $\angle BCA = \angle CAB = 30^\circ$ ning olgu kolmnurga ABC kõrguste lõikepunkt H (joonis 14). Et $CH \perp AB$, siis $\angle BCH = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$. Seega $\angle ACH = 60^\circ$ ning et $BH \perp AC$, siis $\angle BHC = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$. Järelikult on BCH võrdhaarne kolmnurk tipunurgaga B juures. Sellest tipust tõmmatud kõrgus poolitab aluse CH. Järelikult paiknevad C ja H sümmeetriliselt sirge AB suhtes.



Joonis 14



Joonis 15

Lahendus 2. Võtame võrdhaarse kolmnurga ACH nii, et $|AC| = |AH|$, ja olgu B kolmnurga ACH kõrguste lõikepunkt (joonis 15). Et $AH \perp BC$ ja $BH \perp AC$, siis H on kolmnurga ABC kõrguste lõikepunkt. Võrdhaarse kolmnurga tipunurgast tõmmatud kõrgus ühtib mediaaniga, mistõttu H ja C paiknevad sümmeetriliselt sirge AB suhtes.

Märkus. Kõik ülesande tingimust rahuldavad näited on saadavad lahenduses 2 kirjeldatud viisil. Lahenduses 1 kasutatud konstruktsioon on erijuht, kus kolmnurk ACH on võrdkülgne.

4. *Vastus:* ei.

Olgu mingil sammul ümber värvitavate ruutude seas m musta ja v valget. Siis pärast ümbervärvimist on nende ruutude seas v musta ja m valget. Nii mustade kui valgete ruutude arv muutub $|m - v|$ võrra. Et $m + v = 6$ ja 6 on paarisarv, on m ja v sama paarsusega, mistõttu ka $|m - v|$ on paarisarv. Järelikult muutuvad mustade ja valgete ruutude arvud igal sammul paarisarvu võrra ja säilitavad seega oma algse paarsuse. Niisiis näiteks seisust, kus täpselt üks ruut on valge ja ülejäänud mustad, ei ole võimalik jõuda seisu, kus kõik ruudud on mustad.

Lahendused

1. *Vastus:* 60.

Olgu padja raadius r ja purust puhastatava ringi raadius x. Siis pärast sellelt ringilt puru eemaldamist on puruga kaetud osa pindala $\pi r^2 - \pi x^2$ ehk $\pi(r^2 - x^2)$. Ülesande tingimuste järgi on puruga kaetud ala raadius pärast puru kokkuvalgumist $0{,}8r$. Et kihi paksus ei muutu, on puruga kaetud ala endise pindalaga ehk $\pi(0{,}8r)^2 = \pi(r^2 - x^2)$, kust $x^2 = r^2 - 0{,}64r^2 = 0{,}36r^2$. Seega $x = \sqrt{0{,}36r^2} = 0{,}6r$. Järelikult moodustab purust puhastatud ringi raadius padja raadiusest 60 protsenti.

2. *Vastus:* $(-29, 21)$.

Et $324 = 2^2 \cdot 3^4$, siis võrrandi vasak pool võrdub suurusega $2^{2x+2y} \cdot 3^{4x+4y}$. Et $4 = 2^2$, siis võrrandi parem pool võrdub suurusega $2^{x+y-8} \cdot 3^{x-3}$. Sama algarvu astendajate võrdustest saame süsteemi

$$\begin{cases} 2x + 2y = x + y - 8, \\ 4x + 4y = x - 3. \end{cases}$$

Lihtsustades saame samaväärse süsteemi

$$\begin{cases} x + y = -8, \\ 3x + 4y = -3. \end{cases}$$

Korrutades esimese võrrandi 3-ga ja lahutades teisest võrrandist, saame $y = 21$. Esimesse võrrandisse asendades saame $x = -29$.

3. *Lahendus 1.* Sobib valida $a = 3n$, $b = 4n$, $c = 6n$ ja $d = 12n$, kus n on suvaline positiivne täisarv, sest

$$\frac{1}{3n} - \frac{1}{4n} = \frac{1}{4n} - \frac{1}{6n} = \frac{1}{6n} - \frac{1}{12n} = \frac{1}{12n}.$$

Et arvu n saab valida lõpmata paljudel viisidel, saame nii lõpmata palju sobivaid näiteid.

Lahendus 2. Üks tingimusi rahuldav nelik on $(3, 4, 6, 12)$, sest

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6} - \frac{1}{12} = \frac{1}{12}.$$

Kui täisarvude nelik (a, b, c, d) rahuldab ülesande tingimusi, siis ka nelik (an, bn, cn, dn) rahuldab ülesande tingimusi iga positiivse täisarvu n korral, sest $\frac{1}{an} - \frac{1}{bn} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$ ja analoogselt teiste paaridega. Et arvu n saab valida lõpmata paljudel viisidel, saame nii lõpmata palju sobivaid näiteid.

4. *Vastus:* 5 liitrit.

Toimeaine kontsentratsiooni suurenemine mingi arv kordi tähendab lahuse koguse vähenemist sama arv kordi. Olgu esimest lahust pärast keetmist a liitrit ja teist b liitrit; siis $a = \frac{3{,}5}{x}$ ja $b = \frac{4{,}5}{y}$, kust

$$ab = \frac{3{,}5 \cdot 4{,}5}{xy} = \frac{3{,}5 \cdot 4{,}5}{3} = 5{,}25 = \frac{21}{4}.$$

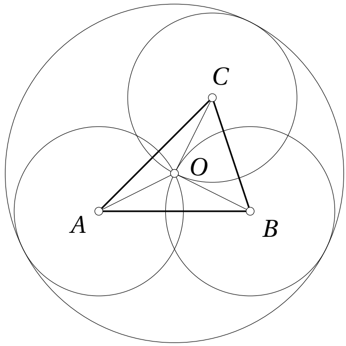
Selleks, et valminud $a + b$ liitrit jooki mahuks täpselt pooleliitristesse purkidesse, peab $2(a + b)$ olema täisarv. Kuna arvud a ja b on ruutvõrrandi $x^2 - (a + b)x + ab$ lahendid, siis selle võrrandi diskriminant $(a + b)^2 - 4ab$ on mittenegatiivne, st $(a + b)^2 \geqslant 4ab = 21$. Kui $a + b \leqslant 4{,}5$, siis kehtib vastupidine võrratus $(a + b)^2 \leqslant 20{,}25 < 21$. Juht $a + b = 5$ on aga võimalik näiteks kui $a = 3{,}5$ ja $b = 1{,}5$, st esimest lahust ei keedeta üldse ja teise lahuse kontsentratsiooni suurendatakse 3 korda.

Märkus. Võrratust $(a + b)^2 \geqslant 21$ saab näidata mitmel muul viisil. Näiteks kuna $(a+b)^2 - 4ab = a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2 \geqslant 0$, siis $(a+b)^2 \geqslant 4ab = 21$. Samuti järeldub tuntud aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vahelisest võrratusest, et $a + b \geqslant 2\sqrt{ab} = \sqrt{4ab} = \sqrt{21}$, kust omakorda $(a + b)^2 \geqslant 21$.

5. *Vastus:* kolmnurga ABC ümberringjoone keskpunktis.

Vastavalt ülesande tingimustele puutub igaüks kolmest esimesest ringjoonest neljandat ringjoont ning läbib tema keskpunkti O (joonis 16). Kuna puutepunkti tõmmatud raadius on puutujaga risti, asuvad iga kolme esimese ringjoone puhul tema ja neljanda ringjoone keskpunktid ning nende ringjoonte puutepunkt ühel sirgel. Seega neljanda ringjoone raadiused, mis on tõmmatud puutepunktidesse kolme esimese ringjoonega, langevad kokku nende kolme ringjoone diameetritega. Järelikult on kolme esimese ringjoone diameetrid ja sellest nähtuvalt ka raadiused võrdsed. Et O asub kõigil kolmel ringjoonel, mille keskpunktideks on kolmnurga ABC tipud, siis asub O selle kolmnurga tippudest võrdsel kaugusel. See tähendab, et O on kolmnurga ABC ümberringjoone keskpunkt.

6. *Lahendus 1.* Olgu ABC suurima pindalaga kolmnurk tippudega etteantud punktides. Siis ülejäänud kaks märgitud punkti peavad asuma alal, mida piirab tippu A läbiv küljega BC paralleelne sirge, tippu B läbiv küljega CA



Joonis 16

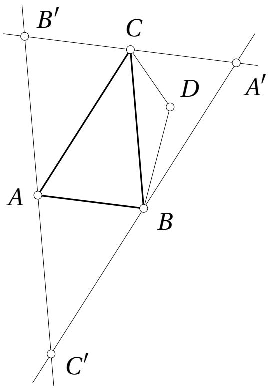
paralleelne sirge ning tippu C läbiv küljega AB paralleelne sirge. See ala on kolmnurgaga ABC sarnane kolmnurk $A'B'C'$.

Kui üks ülejäänud märgitud punktidest, D, asub kolmnurgas $A'BC$ (joonis 17), on $ABDC$ kumer nelinurk. Analoogselt saame kumera nelinurga, kui mõni ülejäänud märgitud punktidest asub kolmnurgas $AB'C$ või kolmnurgas ABC'. Jääb üle juht, kus mõlemad ülejäänud märgitud punktid D ja E asuvad kolmnurgas ABC (joonis 18). Sirge DE läbib täpselt kaht kolmnurga ABC külge. Üldisust kitsendamata olgu BC see külg, mida sirge DE ei läbi. Siis aga on $BCDE$ kumer nelinurk.

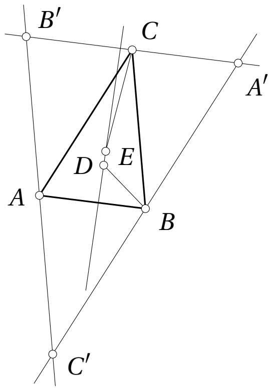
Lahendus 2. Olgu AB pikim lõik otspunktidega antud punktides. Siis kolm ülejäänud märgitud punkti asuvad lõigu AB otspunkte läbiva kahe lõiguga AB ristuva sirge vahel. Kui mõlemal pool sirget AB asuks mõni antud punkt (joonis 19), oleksid need koos punktidega A ja B kumera nelinurga tippudeks. Eeldame järgnevas, et kõik kolm ülejäänud märgitud punkti asuvad samal pool sirget AB. Kui mingist kahest antud punktist C ja D läbi tõmmatud sirge möödub lõigust AB teda lõikamata (joonis 20), siis asuvad A, B, C ja D kumera nelinurga tippudes. Vastasel korral asuvad kaks lõigule AB lähemat märgitud punkti kolmnurgas, mille tippudeks on A, B ja lõigust AB kaugeim märgitud punkt. Selle juhu analüüsime nagu lahenduses 1.

Lahendus 3. Kui antud punktihulga kõik punktid asuvad tema kumeral kattel (joonis 21), siis suvalised neli punkti selles hulgas on kumera nelinurga tippudes. Kui antud punktihulga kumeral kattel on neli punkti (joonis 22), siis on need punktid kumera nelinurga tippudes.

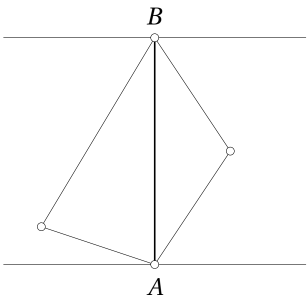
Jääb üle juht, kus antud punktihulga kumeral kattel on täpselt kolm punkti, olgu need A, B ja C. Ülejäänud kaks märgitud punkti D ja E asuvad siis kolmnurga ABC sees. Selle juhu analüüsime nagu lahenduses 1.



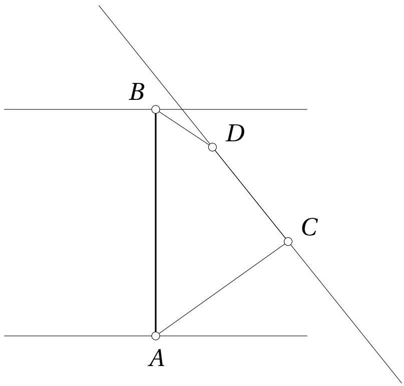
Joonis 17



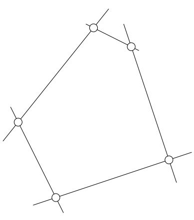
Joonis 18



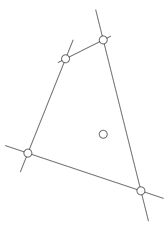
Joonis 19



Joonis 20



Joonis 21



Joonis 22

Lahendused

1. *Vastus:* $7+\sqrt{37}$.

Positiivsete arvude $7+\sqrt{37}$ ja $3\sqrt{19}$ suurusvahekord on sama nagu nende ruutudel $86+14\sqrt{37}$ ja 171. Viimaste suurusvahekord on sama mis 86 võrra väiksematel arvudel $14\sqrt{37}$ ja 85. Nende arvude suurusvahekord on omakorda sama mis nende ruutudel $196\cdot 37$ ja 7225. Et $196\cdot 37 = 7252 > 7225$, siis esimene arv on suurem.

2. *Vastus:* $18\sqrt{5}\ \mathrm{cm}^3$.

Ülesande tingimustest tulenevalt suhtuvad risttahuka servapikkused nagu $\sqrt{3} : \sqrt{4} : \sqrt{5}$, st need pikkused on $\sqrt{3}x$, $\sqrt{4}x$ ja $\sqrt{5}x$ mingi pikkuse x korral. Et diagonaali pikkus on 6 cm, saame x avaldamiseks võrrandi

$$\left(\sqrt{3}x\right)^2+\left(\sqrt{4}x\right)^2+\left(\sqrt{5}x\right)^2=(6\ \mathrm{cm})^2.$$

Siit $x^2 = 3\ \mathrm{cm}^2$, mistõttu $x=\sqrt{3}\ \mathrm{cm}$ ja $x^3 = 3\sqrt{3}\ \mathrm{cm}^3$. Järelikult risttahuka ruumala on $\sqrt{3}\cdot\sqrt{4}\cdot\sqrt{5}\cdot x^3$ ehk $\sqrt{3}\cdot 2\cdot\sqrt{5}\cdot 3\sqrt{3}\ \mathrm{cm}^3$ ehk $18\sqrt{5}\ \mathrm{cm}^3$.

3. *Vastus:* $(8,56)$, $(56,40)$ ja $(72,24)$.

Algarvu 2 astendaja arvu a^2 kanoonilises esituses on paarisarv, arvu $2b^2$ esituses aga paaritu arv. Algarvu 2 astendaja summa a^2+2b^2 kanoonilises esituses võrdub vähimaga neist kahest astendajast. Teisalt peab see astendaja olema 6, sest $6336 = 2^6\cdot 3^2\cdot 11$. Kuna 6 on paarisarv, siis arvu 2 astendaja arvu a^2 kanoonilises esituses on 6 ja arvu b^2 kanoonilises esituses vähemalt 6. Sellest tulenevalt on algarvu 2 astendaja arvu a kanoonilises esituses 3 ning ka arv b jagub 8-ga. Asendades algsesse võrrandisse $a=8x$ ja $b=8y$ ja taandades 64-ga, saame $x^2+2y^2=99$. Ilmselt $x<10$; proovides läbi kõik paaritud arvud $x=1,3,5,7,9$, saame lahendid $(x,y)=(1,7)$, $(x,y)=(7,5)$ ja $(x,y)=(9,3)$. Vastavalt on algse võrrandi lahenditeks $(a,b)=(8,56)$, $(a,b)=(56,40)$ ja $(a,b)=(72,24)$.

4. *Vastus:* $\sqrt{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-k^2}}$, $\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-k^2}}$ ja 1.

Lahendus 1. Olgu täisnurkse kolmnurga ühe teravnurga suurus α. Siis selle kolmnurga nurkade siinused on $\sin\alpha$, $\sin(90^\circ - \alpha)$ ehk $\cos\alpha$ ja $\sin 90^\circ$ ehk 1, niisiis $k = \sin\alpha\cos\alpha$. Suurused $\sin^2\alpha$ ja $\cos^2\alpha$ on vastavalt Viète'i valemitele ruutvõrrandi $x^2 - x + k^2 = 0$ lahendid, sest $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ ja $\sin^2\alpha\cos^2\alpha = k^2$. Seega taandatud ruutvõrrandi lahendivalemi põhjal $\sin\alpha, \cos\alpha = \sqrt{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - k^2}}$.

Lahendus 2. Olgu täisnurkse kolmnurga väiksema teravnurga suurus α. Selle kolmnurga nurkade siinused on $\sin\alpha$, $\sin(90^\circ - \alpha)$ ehk $\cos\alpha$ ja $\sin 90^\circ$ ehk 1, niisiis $k = \sin\alpha\cos\alpha$, kust $2k = \sin 2\alpha$. Nurga α valiku põhjal $2\alpha \leqslant 90^\circ$, mistõttu $\cos 2\alpha \geqslant 0$ ja saame

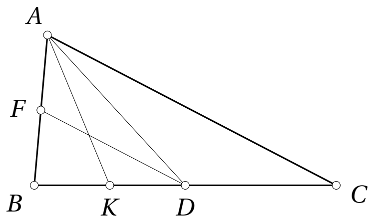
$$\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha = \sqrt{1 - \sin^2 2\alpha} = \sqrt{1 - 4k^2}.$$

Samas $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$. Lahutades ja liites eelnevalt tuletatud võrduse, saame vastavalt $2\sin^2\alpha = 1 - \sqrt{1 - 4k^2}$ ja $2\cos^2\alpha = 1 + \sqrt{1 - 4k^2}$, kust vastavalt $\sin\alpha = \sqrt{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - k^2}}$ ja $\cos\alpha = \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - k^2}}$.

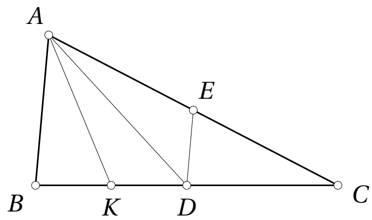
5. *Lahendus 1.* Olgu F külje AB keskpunkt (joonis 23). Siis DF on kolmnurga ABC küljega AC paralleelne kesklõik, mistõttu $|AC| = 2|DF|$. Samas $|AB| = \frac{1}{2}|BC| = |BD|$ ehk kolmnurk ABD on võrdhaarne tipunurgaga tipu B juures. Seega sümmeetria põhjal $|AK| = |DF|$ (AK ja DF on mõlemad kolmnurga ABD alusnurkadest tõmmatud mediaanid). Kokkuvõttes $|AC| = 2|AK|$.

Lahendus 2. Kolmnurgad ABC ja KBA on sarnased teguriga 2, sest tipu B juures on ühine nurk ning

$$\frac{|AB|}{|KB|} = \frac{\frac{1}{2}|BC|}{\frac{1}{4}|BC|} = 2 = \frac{|BC|}{|BA|}.$$



Joonis 23



Joonis 24

Seega $\frac{|AC|}{|KA|} = 2$.

Lahendus 3. Ülesande tingimustest nähtub, et $|AB| = \frac{1}{2}|BC| = |BD|$. Seega $\angle DAB = \angle ADB$. Olgu külje AC keskpunkt E (joonis 24). Et DE on küljega AB paralleelne kesklõik, siis $|DE| = \frac{1}{2}|AB| = \frac{1}{2}|BD| = |DK|$ ning $\angle ADE = \angle DAB = \angle ADK$. Järelikult on kolmnurgad ADE ja ADK võrdsed tunnuse KNK põhjal. Siit $|AK| = |AE| = \frac{1}{2}|AC|$, kust järeldubki ülesande väide.

6. *Vastus:* 4.

Lahendus 1. Matše peeti $\frac{5 \cdot 4}{2}$ ehk 10, iga matš andis osalistele kokku 2 punkti. Järelikult said kõik võistkonnad turniiril kokku 20 punkti. Et keegi ei võitnud ega kaotanud kõiki peetud matše, võisid kõik võistkonnad koguda 1 kuni 7 punkti.

Et kohajagamisi ei esinenud, võisid kaks esimest võistkonda saada kokku ülimalt $7 + 6$ ehk 13 punkti, ülejäänud kolm võistkonda järelikult kokku vähemalt $20 - 13$ ehk 7 punkti. Kui kolmandaks jäänud võistkond kogunuks 3 punkti, pidanuks kaks viimast saama vastavalt 2 ja 1 punkti, mis ei anna 7 punkti kokku. Seega sai kolmandaks tulnud võistkond vähemalt 4 punkti.

Sarnaselt näeme, et neljanda ja viienda koha võistkonnad pidid kokku teenima vähemalt $1 + 2$ ehk 3 punkti ja esimesed kolm seega kokku ülimalt $20 - 3$ ehk 17 punkti. Kui kolmandaks jäänud võistkond kogunuks 5 punkti, pidanuks kaks esimest saama vastavalt 7 ja 6 punkti, mis annavad kokku rohkem kui 17 punkti. Seega sai kolmandaks tulnud võistkond 4 punkti.

Lahendus 2 (Kati Iher). Sarnaselt lahendusega 1 näitame, et kokku saadi 20 punkti ning iga võistkond võis saada 1 kuni 7 punkti. Võimalike skooride summa on $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7$ ehk 28. Et osalenud 5 võistkonda said erineva arvu punkte, jääb punktitabelis sellest 7 liidetavast täpselt 2 kasutamata. Nende 2 liidetava summa peab olema $28 - 20$ ehk 8. Seega võisid tabelist puududa skoorid 1 ja 7, skoorid 2 ja 6 või skoorid 3 ja 5. Kõikidel juhtudel on kolmandaks jäänud võistkonna punktisumma 4.

Lahendused

1. *Vastus:* $a = 7$, $q = 5$.

Lahendus 1. Ülesande tingimuste kohaselt $b_2 = 4b_1 + 7$ ja $b_3 = 4(b_1 + b_2) + 7$. Lahutades teisest võrdusest esimese, saame $b_3 - b_2 = 4b_2$, kust omakorda $b_3 = 5b_2$. Et otsitakse positiivsete liikmetega geomeetrilist jada, siis $q = 5$. Seega $4b_1 + 7 = b_2 = 5b_1$, kust $a = b_1 = 7$. Geomeetrilises jadas, mille esimene liige on 7 ja tegur 5, avaldub üldliige kujul $b_n = 7 \cdot 5^{n-1}$ ja summa kujul $S_{n-1} = 7 \cdot \dfrac{5^{n-1} - 1}{4}$. Kontrollides saame, et iga $n \geqslant 2$ korral tõepoolest

$$4 \cdot S_{n-1} + 7 = 4 \cdot 7 \cdot \frac{5^{n-1} - 1}{4} + 7 = 7 \cdot 5^{n-1} - 7 + 7 = 7 \cdot 5^{n-1} = b_n.$$

Lahendus 2. Ülesande tingimuse kohaselt kehtib iga naturaalarvu $n \geqslant 2$ korral $b_n = 4S_{n-1} + 7$.

Eeldame algul, et $q \neq 1$. Geomeetrilise jada üldliikme valemi põhjal kehtib $b_n = b_1 q^{n-1}$ ja summa valemi põhjal $S_{n-1} = \dfrac{b_n - b_1}{q - 1} = b_1 \cdot \dfrac{q^{n-1} - 1}{q - 1}$. Seega

$$b_1 q^{n-1} = 4b_1 \cdot \frac{q^{n-1} - 1}{q - 1} + 7. \tag{1}$$

See on samaväärne võrdusega

$$b_1 q^{n-1} q - b_1 q^{n-1} = 4b_1 q^{n-1} - 4b_1 + 7(q - 1).$$

Tuues järjekorranumbrist n sõltuvad liikmed vasakule ja tegurdades, saame samaväärse seose

$$q^{n-1} \cdot b_1(q - 5) = 7(q - 1) - 4b_1. \tag{2}$$

Ka see peab kehtima iga $n \geqslant 2$ korral. Et aga parem pool suurusest n ei sõltu, peab ka vasak pool andma iga n korral ühe ja sama väärtuse. Kuna q^{n-1} on iga n korral erinev, on see võimalik ainult juhul, kui $b_1(q - 5) = 0$, mis $b_1 \neq 0$ tõttu tähendab, et $q = 5$. Siis ka parem pool on null ehk $7(q - 1) = 4b_1$, kust $q - 1 = 4$ tõttu $b_1 = 7$. Seoste (1) ja (2) samaväärsuse tõttu on $q = 5$ ja $b_1 = 7$ korral ülesande tingimused täidetud.

Kui $q = 1$, siis $b_n = b_1$ ja $S_{n-1} = b_1(n-1)$, millest ülesande võrdusse asendades saame $b_1 = 4b_1(n-1)+7$. Pärast järjekorranumbrist n sõltuvate liikmete ühele poole viimist saame samaväärse seose $n \cdot 4b_1 = 5b_1 - 7$. See ei saa iga n korral kehtida, sest parem pool suurusest n ei sõltu, vasak pool on aga iga n korral erinev.

2. *Vastus:* -3 ja 10.

Lahendus 1. Ülesande tingimuste kohaselt saame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} 25a - 5b + c = 144a + 12b + c, \\ 25a - 5b + c = -49a - 7b - c. \end{cases}$$

(Funktsiooni väärtus kohal 7 ei saa olla sama märgiga nagu väärtus kohtadel -5 ja 12, sest parabool ei saa lõigata sama horisontaalsirget kolmes punktis.) Esimesest võrrandist $119a = -17b$ ehk $b = -7a$. Asendades selle teise võrrandisse, saame $60a+c = -c$, kust $c = -30a$. Seega ruutfunktsioon on kujul $y = ax^2 - 7ax - 30a$. Selle nullkohad on

$$x_{1,2} = \frac{7a \pm \sqrt{49a^2 + 120a^2}}{2a} = \frac{7a \pm 13a}{2a} = \frac{7 \pm 13}{2}$$

ehk $x_1 = -3$ ja $x_2 = 10$.

Lahendus 2. Üldisust kitsendamata võib eeldada, et $a = 1$, sest kordajate taandamisel nullist erineva teguriga nullkohad ei muutu ja ülesandes kirjeldatud omadused ei teki ega kao. Olgu ruutfunktsiooni $y = x^2 + bx + c$ nullkohad $x = x_1$ ja $x = x_2$, st $x^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2)$. (Nullkohad leiduvad, sest funktsioon võtab erimärgilisi väärtusi. Ruutfunktsiooni väärtus kolmes erinevas punktis ei saa olla sama.) Olgu d funktsiooni $y = x^2 + bx + c$ väärtus kohtadel -5 ja 12. Ülesande tingimuste järgi on funktsiooni $y = x^2 + bx + (c - d)$ nullkohad -5 ja 12. Viète'i valemi põhjal $-(x_1 + x_2) = b = -(-5 + 12) = -7$. Seega $7 - x_1 = x_2$ ja $7 - x_2 = x_1$. Et kohal 7 võtab vaadeldav ruutfunktsioon väärtuse $-d$, siis $-(-5 - x_1)(-5 - x_2) = (7 - x_1)(7 - x_2) = x_1x_2$, kust lihtsustades saame $2x_1x_2 = -25 - 5(x_1 + x_2) = -25 - 35 = -60$. Seega $c = x_1x_2 = -30$. Väärtused $x_1 = -3$ ja $x_2 = 10$ rahuldavad võrdusi $x_1 + x_2 = 7$ ja $x_1x_2 = -30$, need võrdused on võrrandiga $(x - x_1)(x - x_2) = 0$ samaväärsed ja ruutvõrrandil ei ole üle kahe lahendi, järelikult need ongi antud ruutfunktsiooni nullkohad.

3. *Vastus:* $(0, 217)$, $(217, 0)$.

Lahendus 1. Võrduse $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{217}$ poolte ruututõstmisel saame uue võrduse $a+b+2\sqrt{ab} = 217$. Viies $a+b$ paremale poole ja tõstes siis võrduse pooled uuesti ruutu, saame $4ab = 217^2 - 2 \cdot 217(a+b) + (a+b)^2$. Viies liikmed kordajaga 217 vasakule ja ülejäänud paremale, saame

$$2 \cdot 217(a + b) - 217^2 = (a + b)^2 - 4ab = (a - b)^2.$$

Saadud võrduse vasak pool jagub 217-ga, mistõttu peab ka $(a-b)^2$ jaguma 217-ga. Et $217 = 7 \cdot 31$, siis peab arv $(a-b)^2$ jaguma 7-ga ja 31-ga. Et 7 ja 31 on algarvud, peab nendega jaguma ka $a-b$, mistõttu $a-b$ peab jaguma 217-ga. Arvestades tingimusi $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $\sqrt{a} \geqslant 0$, $\sqrt{b} \geqslant 0$, peavad kehtima ka võrratused $a \leqslant 217$ ja $b \leqslant 217$. Seega $a-b=0$ või $|a-b| = 217$.

Kui $a-b=0$ ehk $a=b$, siis taandub algne võrrand kujule $2\sqrt{a} = \sqrt{217}$, mis on samaväärne võrdusega $4a = 217$. Täisarvudes pole see võimalik.

Kui $|a-b| = 217$, siis ülal loetletud piiranguid arvestades on ainsad võimalused $a=0, b=217$ ja $a=217, b=0$, mis mõlemad rahuldavad antud võrrandit.

Lahendus 2. Ülesande võrdus on samaväärne võrdusega $\sqrt{b} = \sqrt{217} - \sqrt{a}$. Selle poolte ruututõstmisel saame võrduse $b = 217+a-2\sqrt{217a}$, mis ruututõstetavate suuruste mittenegatiivsuse tõttu on samuti algsega samaväärne. Siit nähtub, et $217a$ on täisruut. Et $217 = 7 \cdot 31$ ning 7 ja 31 on algarvud, siis peab a olema kujul $7 \cdot 31 \cdot k^2$ ehk $a = 217k^2$ mingi mittenegatiivse täisarvu k korral.

Algse võrrandi sümmeetria tõttu saame samamoodi ka $b = 217l^2$ mingi mittenegatiivse täisarvu l jaoks. Asendades saadud avaldised algsese võrrandisse, saame

$$k\sqrt{217} + l\sqrt{217} = \sqrt{217},$$

kust $k+l=1$. Seega $k=0, l=1$ või $k=1, l=0$. Vastavalt $(a,b) = (0,217)$ või $(a,b) = (217,0)$.

4. *Lahendus 1.* Võrdus $x^{\log_a y} = y^{\log_a x}$ kehtib parajasti siis, kui kehtib vastavate logaritmide võrdus $\log_a x^{\log_a y} = \log_a y^{\log_a x}$. See aga on astme logaritmi valemi põhjal samaväärne võrdusega $\log_a y \log_a x = \log_a x \log_a y$, mis kehtib, sest korrutis ei sõltu tegurite järjekorrast.

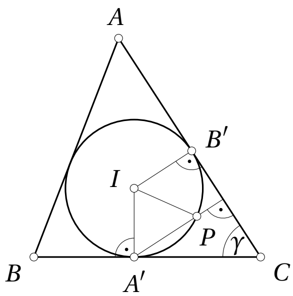
Lahendus 2. Logaritmi definitsiooni järgi $x = a^{\log_a x}$ ja $y = a^{\log_a y}$. Saame

$$\begin{aligned} x^{\log_a y} &= \left(a^{\log_a x}\right)^{\log_a y} = a^{\log_a x \cdot \log_a y}, \\ y^{\log_a x} &= \left(a^{\log_a y}\right)^{\log_a x} = a^{\log_a y \cdot \log_a x}. \end{aligned}$$

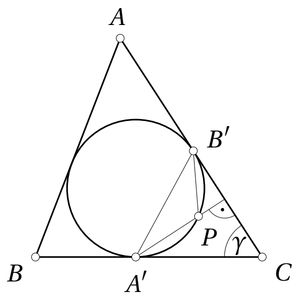
Et korrutis ei sõltu tegurite järjekorrast, on need avaldised võrdsed.

5. *Lahendus 1.* Olgu kolmnurga ABC siseringjoone keskpunkt I (joonis 25). Punkt P poolitab kolmnurga ABC siseringjoone kaare $A'B'$ parajasti siis, kui $\angle A'IP = \angle B'IP$. Tähistame $\gamma = \angle ACB$, siis $\angle CA'P = 90^\circ - \gamma$. Et $IA' \perp BC$, siis $\angle PA'I = \angle CA'I - \angle CA'P = 90^\circ - (90^\circ - \gamma) = \gamma$. Et $|IA'| = |IP|$, siis ka $\angle A'PI = \angle PA'I = \gamma$, kust

$$\angle A'IP = 180^\circ - \angle PA'I - \angle A'PI = 180^\circ - 2\gamma.$$



Joonis 25



Joonis 26

Et aga $IB' \perp AC$, siis $IB' \parallel A'P$, mistõttu põiknurkadest

$$\angle B'IP = \angle A'PI = \gamma.$$

Seega kehtib võrdus $\angle A'IP = \angle B'IP$ parajasti siis, kui $180^\circ - 2\gamma = \gamma$ ehk $\gamma = 60^\circ$.

Lahendus 2. Punkt P poolitab kolmnurga ABC siseringjoone kaare $A'B'$ parajasti siis, kui $\angle PA'B' = \angle PB'A'$ (joonis 26). Tähistame $\gamma = \angle ACB$, siis $\angle CA'P = 90^\circ - \gamma$. Puutujalõikude võrdsusest $|CA'| = |CB'|$, mistõttu $\angle CA'B' = \dfrac{180^\circ - \gamma}{2} = 90^\circ - \dfrac{\gamma}{2}$. Seega

$$\angle PA'B' = \angle CA'B' - \angle CA'P = \left(90^\circ - \frac{\gamma}{2}\right) - \left(90^\circ - \gamma\right) = \frac{\gamma}{2}.$$

Piirdenurga omadusest aga

$$\angle PB'A' = \angle CA'P = 90^\circ - \gamma.$$

Kokkuvõttes kehtib võrdus $\angle PA'B = \angle PB'A$ parajasti siis, kui $\dfrac{\gamma}{2} = 90^\circ - \gamma$, st $\gamma = 60^\circ$.

6. Olgu turniiril n võistkonda. Olgu iga $i = 1, \ldots, n$ korral tabeli i-nda rea arvude summa r_i ja i-nda veeru arvude summa v_i. Et iga arv asub täpselt ühes reas ja veerus, siis $r_1 + \ldots + r_n = v_1 + \ldots + v_n$, millest tulenevalt

$$(r_1 - v_1) + \ldots + (r_n - v_n) = 0.$$

Samuti näeme, et iga $i = 1, \ldots, n$ korral $r_i + v_i = n - 1$, sest i-nda rea ja i-nda veeru sama järjekorranumbriga elementide summa on alati 1 ning nii i-ndas reas kui ka i-ndas veerus on $n-1$ arvu. Seega

$$\begin{aligned}
\left(r_1^2 + \ldots + r_n^2\right) - \left(v_1^2 + \ldots + v_n^2\right) &= \\
&= (r_1^2 - v_1^2) + \ldots + (r_n^2 - v_n^2) = \\
&= (r_1 - v_1)(r_1 + v_1) + \ldots + (r_n - v_n)(r_n + v_n) = \\
&= (r_1 - v_1)(n-1) + \ldots + (r_n - v_n)(n-1) = \\
&= ((r_1 - v_1) + \ldots + (r_n - v_n))\,(n-1) = \\
&= 0 \cdot (n-1) = \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Seega $r_1^2 + \ldots + r_n^2 = v_1^2 + \ldots + v_n^2$.

Lp hindaja!

Käesolevas esitame kõigepealt hindamise üldised põhimõtted ning seejärel järjekorras konkreetsed hindamisjuhised iga ülesande kohta eraldi.

1. Õpilase lahenduseks tuleb esmajoones lugeda see, mida õpilane on ülesande kohta vormistanud puhtandina (sh mustandipaberile selgesti arusaadavalt kirja pandud mõttekäigud, kui need on ametlikult puhtandipaberilt viidatud). Töö mustandi arvestamine või mittearvestamine ülesande lahenduse hulka on hindaja otsustada (või piirkonna hindamiskomisjoni ühine otsus kõigi ülesannete suhtes), kuid see peab toimuma kõigis töödes ühtmoodi.

2. Alljärgnevas on 7.–9. klassi olümpiaadi I osa (testi) ning kõikide ülejäänud ülesannete hindamisjuhised esitatud erinevalt.

   Testi iga küsimuse jaoks on eraldi loetletud või kirjeldatud vastused, mille eest tuleks anda vastavalt kaks punkti või üks punkt (st vastavaid punkte ühe küsimuse piires *ei tule* liita). Testiülesannete lahendusi õpilased ei pea esitama, vaid kirjutavad ülesannete lehel vastavale punktiirile või ülesande tekstis viidatud kohta ainult vastuse.

   Seevastu kõigi teiste ülesannete kohta tuleb esitada täielikud lahendused, ainult vastustest ei piisa. Nende ülesannete lahendused on hindamisjuhistes jaotatud võimalust mööda osadeks (etappideks) ning on näidatud iga osa eest antav punktide arv (st ühe ülesande eest antava punktisumma saamiseks *tuleb* lahenduse erinevate osade eest antud punktid liita).

   Mõnes skeemis on mõne etapi kirjelduse all („*Sealhulgas:*“ järel) alapunktidena välja toodud konkreetse etapi väiksemate osade eest antavad punktid – need lähevad käiku juhul, kui lahenduse see etapp on ebatäielik või vigane ja selle osa täispunkte seetõttu ei saa anda. Alamosade punktid tuleb omavahel samuti liita.

3. Žürii lahendustes ja käesolevates hindamisjuhistes on ülesannete vastused esitatud enamasti ainult ühel, lihtsaimal või kõige tõenäolisemalt esineval kujul. Hindamisel (sh testid!) tuleb võrdselt õigeks lugeda ka sama vastuse teised mõistlikud esitusviisid – sh taandatud hariliku murruna, segaarvuna, kümnendmurruna, sõnadega välja kirjutatuna –, seejuures ka osana pikemalt (nt täislausega, koos sobiva liigisõnaga või koos selgitustega) antud

vastusest. Juhud, kus ülesande sisu tingib erandeid sellest üldreeglist, on eraldi mainitud vastava ülesande hindamisjuhises.

Ühik arvu järel on vastuses vajalik juhul, kui ülesandes on küsitud suurust, mis teatud ühikutes avaldub. Näiteks küsimusele „Kui suur pindala …?" saab õige vastus olla „120 cm^2", kuid mitte „120" (kui ülesande tekstis pole kasutatud ühikuta pikkusi/pindalasid). Teistes ühikutes väljendatud sama suurus tuleb lugeda õigeks, näiteks vastused „120 cm^2" ja „1,2 dm^2" on samaväärsed. Ühik vastuses ei ole nõutav, kui ülesandes on küsitud kindlate ühikute arvu. Näiteks küsimusele „Mitu ruutsentimeetrit …?" antud vastused „120" ja „120 cm^2" tuleb võrdväärseks lugeda samal alusel nagu küsimusele „Mitu karu …?" antud vastused „3" ja „3 karu" (vastus koos liigisõnaga). Teistes ühikutes antud vastus tuleb aga lugeda valeks, vastused „120 cm^2" ja „1,2 dm^2" ei ole siin samaväärsed.

4. Mõnede ülesannete kohta, mida saab lahendada mitmel oluliselt erineval viisil, anname eraldi hindamisskeemid erinevate lahendusviiside jaoks. Rõhutame, et iga konkreetset mittetäielikku lahendust tuleb hinnata ainult *ühe* sellise skeemi järgi (selle järgi, mille kohaselt ta saaks kõige rohkem punkte).

5. Enamiku ülesannete korral (v.a testid ja tõestusülesanded) on hindamisjuhiste lõpus eraldi näidatud, mitu punkti anda ainult õige vastuse eest. See hinne on mõeldud juhuks, kui töös on ülesande kohta toodud ainult õige vastus või õige vastus koos mõttekäiguga, mis ei annaks skeemi järgi rohkem punkte kui on ette nähtud õige vastuse eest.

6. Kahtlemata esineb õpilaste töödes ka mõttekäike, mis ei mahu meie poolt pakutud skeemidesse. Selliste lahenduste hindamisel tuleb lähtuda sellest, *kui suur osa* antud ülesandest on õpilasel lahendatud, kasutades lahenduse üksikute osade kaalu määramisel võimaluse korral võrdluseks punktide jaotust meie pakutud hindamisskeemides.

7. *Mistahes* täieliku ja matemaatiliselt korrektse lahenduse eest tuleb igal juhul anda maksimumpunktid, sõltumata selle lahenduse pikkusest või otstarbekusest võrreldes teiste lahendusviisidega.

I osa hindamisjuhised

1.	∘ Antud õige vastus 8:	2 p
2.	∘ Antud õige vastus 340 (või $\frac{340}{1}$):	2 p
	∘ Antud vastus taandamata murru kujul:	0 p
3.	∘ Antud õige vastus 3461:	2 p
4.	∘ Antud õige vastus 60:	2 p
5.	∘ Antud õige vastus 20:	2 p
6.	∘ Antud õige vastus 30°:	2 p
	∘ Antud vastuseks 30 ilma kraadimärgita:	1 p
7.	∘ Antud õige vastus 8 cm^2:	2 p
	∘ Antud vastuseks 8 ilma ühikuta või vale ühikuga:	1 p
8.	∘ Antud õige vastus C:	2 p
	∘ Antud vastuseks C koos valede tippudega:	0 p
9.	∘ Antud õige vastus 15 cm:	2 p
	∘ Antud vastuseks 15 ilma ühikuta või vale ühikuga:	1 p
10.	∘ Antud täielikult õige vastus (A, D, E, F suvalises järjestuses):	2 p
	∘ Antud vastus, mis pole täielikult õige, aga kus on vähemalt kolm õiget tähte ja ülimalt üks vale täht:	1 p

I osa hindamisjuhised

1. ◦ Antud õige vastus 6: 2 p

2. ◦ Antud õige vastus -2: 2 p

3. ◦ Antud õige vastus 653718: 2 p

4. ◦ Antud õige vastus 24: 2 p

5. ◦ Antud õige vastus 10: 2 p

6. ◦ Antud õige vastus 40°: 2 p
◦ Antud vastuseks 40 ilma kraadimärgita: 1 p

7. ◦ Antud õige vastus 2,5 cm^2: 2 p
◦ Antud vastuseks 2,5 ilma ühikuta või vale ühikuga: 1 p

8. ◦ Antud õige vastus $1{,}5\pi$ cm: 2 p
◦ Antud vastuseks $1{,}5\pi$ ilma ühikuta või vale ühikuga: 1 p
◦ Antud vastuseks 4,71 või täpsem ligikaudne väärtus õige ühikuga või ilma ühikuta: 1 p

9. ◦ Antud õige vastus 13 cm: 2 p
◦ Antud vastuseks 13 ilma ühikuta või vale ühikuga: 1 p

10. ◦ Antud õige vastus 4: 2 p

I osa hindamisjuhised

1. ◦ Antud õige vastus 2211: 2 p

2. ◦ Antud õige vastus -2016: 2 p

3. ◦ Antud õige vastus 106 km/h: 2 p
◦ Antud vastuseks 106 ilma ühikuta või vale ühikuga: 1 p

4. ◦ Antud õige vastus 7,5: 2 p

5. ◦ Antud õige vastus 10: 2 p

6. ◦ Antud õige vastus 80°: 2 p
◦ Antud vastuseks 80 ilma kraadimärgita: 1 p

7. ◦ Antud õige vastus 3 cm^2: 2 p
◦ Antud vastuseks 3 ilma ühikuta või vale ühikuga: 1 p

8. ◦ Antud õige vastus 6 cm: 2 p
◦ Antud vastuseks 6 ilma ühikuta või vale ühikuga: 1 p

9. ◦ Antud õige vastus 6: 2 p

10. ◦ Antud õige vastus 32: 2 p

II osa hindamisjuhised

1.
- Lahendatud a-osa: 2 p

  Sealhulgas:
  - Leitud kolmanda ja neljanda arvu avaldis a ja b kaudu: *1 p*
  - Leitud ka viienda, kuuenda ja seitsmenda arvu avaldis a ja b kaudu: *1 p*
- Lahendatud b-osa: 5 p

  Sealhulgas:
  - Koostatud võrrand $5a + 8b = 2017$ või sõnades väljendatud teadmist, et avaldise $5a + 8b$ väärtus on 2017: *1 p*
  - Märgitud, et a suurima väärtuse korral on b väärtus vähim: *1 p*
  - Ammendava põhjendusega (nt juhtude 1, 2, 3, 4 läbivaatuse või viimaste numbrite analüüsi teel nagu žürii lahenduses) leitud b vähim väärtus 4: *2 p*
  - Leitud vastav a väärtus 397: *1 p*

Ainult õigete vastuste ($5a+8b$ ja 397) eest ilma selgitusteta anda kummaski osas 1 punkt.

2.
- Leitud poolringjoone LM raadius 2 cm: 1 p
- Leitud selle abil kujundi $ALMD$ täpne ümbermõõt: 1 p
- Leitud kujundi $ALMD$ pindala $(32 - 2\pi)$ cm^2: 1 p
- Koostatud kujundite $ALMD$ ja $BLMC$ pindalade võrdsust väljendav võrrand: 1 p
- Võrrand õigesti lahendatud: 1 p
- Leitud kujundi $BLMC$ täpne ümbermõõt: 2 p

Kui vastuses on ühik puudu või vale, anda kokku 1 punkt vähem. Kui täpsete väärtuste asemel on kasutatud ligikaudseid väärtusi, mis on õiged vähemalt teise komajärgse kohani, siis anda kokku 1 punkt vähem, ebatäpsemate arvutuste korral 2 punkti vähem. Sulgude puudumise eest $20 + 2\pi$ ümber lõppvastuses punkte mitte alandada.

Ainult õigete vastuste ($(20 + 2\pi)$ cm ja 20 cm) eest ilma selgitusteta anda kummagi kujundi puhul 1 punkt.

3.

- Märgitud, et hetkel, kui Toomas jõudis tagasi eelmisse peatusse, oli Hendrik läbinud $\frac{2}{3}$ oma teest järgmisse peatusse (või et oli kulunud $\frac{2}{3}$ otsitavast ajavahemikust): 1 p
- Märgitud, et tramm läbis peatuste vahelise tee 5 korda lühema ajaga kui Hendrik: 1 p
- Koostatud õige võrrand otsitava ajavahemiku suhtes (žürii lahenduses $\frac{1}{3}t - \frac{1}{5}t = 1$ min): 3 p

  Sealhulgas:
  - Sõnadega seletatud, et trammi sõiduaja ja eelmises peatuses seismise aja summa võrdub kolmandikuga küsitud ajavahemikust: *1 p*
- Võrrandi lahendamisel saadud õige vastus: 2 p

Kui võrrand on koostatud mingi teise suuruse, mitte otsitava ajavahemiku suhtes (nt kolmandiku või viiendiku osa suhtes), siis anda võrrandi koostamise eest 1 punkt vähem ja lisada 1 punkt selle eest, kui võrrandi lahendi järgi on pärast leitud õige vastus.

Ainult õige vastuse (7,5) eest ilma selgitusteta anda 2 punkti.

II osa hindamisjuhised

1.
- Lahendatud a-osa: 2 p
  Sealhulgas:
  - Näidatud, mitu kahte peab liitma lugejale ja mitu kolme nimetajale, et murd oleks võrdne arvuga $\frac{3}{4}$: *2 p*
- Lahendatud b-osa: 5 p
  Sealhulgas:
  - Esitatud nimetaja üldkuju suvalise arvu kolmede liitmise järel (nt $3x + 2$) või selgitatud (nagu žürii lahenduses), et nimetaja ei saa kunagi 3-ga jaguda: *2 p*
  - Märgitud, et $\frac{5}{6}$ saamiseks on vaja, et nimetaja jaguks 6-ga (või esituks kujul $6a$, kus a on täisarv): *1 p*
  - Järeldatud, et nimetaja peaks jaguma ka 3-ga: *1 p*
  - Vastuolust järeldatud eitav vastus: *1 p*

Ainult kummagi osa õige vastuse (jah ja ei) eest ilma selgitusteta anda 0 punkti.

2.
- Õigesti arvutatud kuue kolmnurga ONA, OAK, OLC, OCM, MDN ja KBL pindalad kogu ristküliku pindala või muutujatega tähistatud ristküliku külgede pikkuste kaudu: 3 p
- Nende pindalade abil leitud korrektse tehtega a-osa õige vastus: 1 p
- Viidud kõigi seitsme kolmnurga pindalade avaldised ühisele nimetajale: 1 p
- Märgitud, et ainult $\frac{2}{16}$ ja $\frac{3}{16}$ ristküliku kogupindalast saavad olla vastavalt $10\ \text{cm}^2$ ja $15\ \text{cm}^2$: 1 p
- Leitud ristküliku pindala $80\ \text{cm}^2$: 1 p

Skeemi esimeses reas anda iga kahe kolmnurga õigesti välja arvutatud pindala eest 1 punkt.

Skeemi kolmanda rea eest punkti mitte anda, kui ühisele nimetajale viimisel on mõni seitsmest kolmnurgast arvestamata jäänud.

Kui b-osa vastuses on ühik puudu või vale, siis anda kokku 1 punkt vähem.

Ainult õigete vastuste ($\frac{1}{4}$ ja $80\ \text{cm}^2$) eest ilma selgitusteta anda kummaski osas 1 punkt.

3.
- Mainitud, et telefon oli ootel $\frac{2}{3}$ aku tühjenemisele kulunud ajast: 1 p
- Koostatud õige lineaarvõrrand ooteaja suhtes (žürii lahenduses $\frac{1}{3}x \cdot 22 + \frac{2}{3}x = 220$) koos ammendava selgitusega, kuidas see on saadud: 4 p
- Lahendatud võrrand ja saadud õige vastus: 2 p

Kui võrrand on koostatud mitte otsitava ajavahemiku, vaid mõne teise suuruse suhtes, siis anda võrrandi koostamise eest 1 punkt vähem ja lisada 1 punkt selle eest, kui on pärast leitud võrrandi lahendi abil õige vastus.

Ainult õige vastuse (27,5) eest ilma selgitusteta anda 2 punkti.

II osa hindamisjuhised

1.
- Põhjendatud, et otsitavas arvus on vähemalt 13 numbrit: 1 p
- Põhjendatud, et otsitav arv pole suurem kui 6999999999999: 2 p
- Põhjendatud, et otsitava arvu esimene number on 6: 2 p
- Põhjendatud, et ülejäänud numbrid peavad olema 9-d: 2 p

Ainult õige vastuse (6999999999999) eest ilma selgitusteta anda 1 punkt.

2. Anname eraldi skeemid kahe erineva lähenemise puhuks.

Skeem täisarvu eraldamist kasutava lahenduse järgi (žürii lahendus 1).

- Põhjendatud, et arv $2017a$ jagub arvuga $2017 + a$ parajasti siis, kui arv 2017^2 jagub arvuga $2017 + a$: 3 p
- Mainitud, et 2017 on algarv: 1 p
- Järeldatud, et $2017 + a = 2017^2$: 2 p
- Viimasest seosest avaldatud a: 1 p

Skeem jaguvuse omadusi kasutava lahenduse järgi (žürii lahendus 2).

- Saadud $2017a = 2017k + ak$ või sellega ilmselgelt samaväärne võrdus, kus k on positiivne täisarv ja 2017 ei ole sulgude sees: 1 p
- Järeldatud, et ak jagub 2017-ga: 1 p
- Mainitud, et 2017 on algarv: 1 p
- Põhjendatud, et k ei jagu 2017-ga: 1 p
- Kirjutatud $a = 2017b$, kus b on positiivne täisarv, ja saadud $\dfrac{2017b}{b+1} = k$ või mõni sellega ilmselgelt samaväärne võrdus: 1 p
- Põhjendatud, et 2017 jagub arvuga $b + 1$: 1 p
- Saadud lõppvastus: 1 p

Skeemi esimese rea järgi punkti andmiseks pole võrdus $2017a = (2017+a)k$ piisav, sest paremal on 2017 sulgudest välja toomata. Seevastu nt võrduse $2017(a - k) = ak$ eest tuleb anda punkt.

Ainult õige vastuse $(2016 \cdot 2017)$ eest ilma selgitusteta anda 1 punkt.

3. Anname eraldi skeemid kahe erineva lähenemise puhuks.

Skeem kolmnurgast ABC nurkade suurustega $\angle BAC = \angle BCA = 30^\circ$ lähtuva lahenduse järgi (žürii lahendus 1).

- Võetud kolmnurga ABC nurkade suurusteks $\angle ABC = 120^\circ$ ja $\angle ABC = \angle ACB = 30^\circ$ (piisab kahest nurgast): 2 p
- Leitud $\angle BCH = 30^\circ$: 1 p
- Leitud $\angle BHC = 30^\circ$: 2 p
- Põhjendatud, et H ja C paiknevad sümmeetriliselt sirge AB suhtes: 2 p

Skeem kolmnurgast ACH kõrguste lõikepunktiga B lähtuva lahenduse järgi (žürii lahendus 2).

- Esitatud mingi konstruktsioon, kus B on kolmnurga ACH kõrguste lõikepunkt ja $|AC| = |AH|$, ning need mõlemad tingimused on mainitud (vajadusel tõestatud): 3 p
- Põhjendatud, et H on kolmnurga ABC kõrguste lõikepunkt: 2 p
- Põhjendatud, et H ja C paiknevad sümmeetriliselt sirge AB suhtes: 2 p

Teise skeemi esimese rea eest anda 2 punkti, kui üks kahest tingimusest pole konstruktsioonis mainitud ega tõestatud, ja 1 punkt, kui kumbki kahest tingimusest pole mainitud ega tõestatud. Näiteks kui ACH on võrdkülgne kolmnurk ja B tema mediaanide lõikepunkt, siis anda 2 punkti, kui ei mainita, et mediaanid on ka kõrgused vms. Puuduva punkti võib anda juurde järgmiste ridade juures, kui need on ammendavalt tehtud.

Ainult õige vastuse (jah) eest ilma selgitusteta anda 0 punkti.

4.
- Märgitud kas mustade või valgete ruutude kohta, et nende arv muutub igal sammul $|m - v|$ võrra, kus m ja v on vastavalt mustade ja valgete ruutude arv ümbervärvitaval alal: 2 p
- Järeldatud, et sama värvi ruutude arv muutub igal sammul paarisarvu võrra: 2 p
- Näidatud kaks seisu, milles on sama värvi ruutude arvud erineva paarsusega, koos märkusega, et neid pole üksteisest võimalik saada: 3 p

Ainult õige vastuse (ei) eest ilma selgitusteta anda 0 punkti.

Eesti LXIV matemaatikaolümpiaad

7. veebruar 2017 Piirkonnavoor **10. klass**

Hindamisjuhised

1.
- Avaldatud puruga kaetud ala pindala pärast purust puhastamist sisemise ringi raadiuse (žürii lahenduses x) kaudu: 2 p
- Avaldatud puruga kaetud ala pindala pärast puru kokkuvalgumist: 1 p
- Koostatud võrrand otsitava leidmiseks: 1 p
- Võrrand õigesti lahendatud: 2 p
- Tehtud õige lõppjäreldus: 1 p

Ainult õige vastuse (60) eest ilma selgitusteta anda 1 punkt.

2.
- Kirjutatud võrrandi vasak pool 2 ja 3 astmete korrutisena: 2 p

  Sealhulgas:
  - Leitud arvu 324 kanooniline esitus: *1 p*
- Kirjutatud võrrandi parem pool 2 ja 3 astmete korrutisena: 1 p
- Koostatud võrrandisüsteem, mis võrdsustab sama algarvu astendajad: 2 p
- Võrrandisüsteem õigesti lahendatud: 2 p

Ainult õige vastuse ($(-29, 21)$) eest ilma selgitusteta anda 1 punkt.

3. Esitame eraldi skeemid kahe erineva lähenemise puhuks.

Skeem otsese lahenduse järgi (žürii lahendus 1).

- Esitatud ühest või enamast muutujast sõltuv nelik (a, b, c, d), mille korral alati $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{b} - \frac{1}{c} = \frac{1}{c} - \frac{1}{d}$: 4 p
- Nõutud võrduse universaalne kehtivus kontrollitud: 2 p
- Märgitud, et nii saab lõpmata palju sobivaid näiteid: 1 p

Skeem erilahendi olemasolu kaudu argumenteeriva lahenduse järgi (žürii lahendus 2).

- Esitatud üks konkreetne sobiv arvukomplekt (a, b, c, d): 2 p
- Nõutud võrduse kehtivus sellel arvukomplektil kontrollitud: 1 p
- Põhjendatud, et siis ka (an, bn, cn, dn) rahuldab tingimusi iga positiivse täisarvu n korral: 3 p
- Märgitud, et nii saab lõpmata palju sobivaid näiteid: 1 p

4.
- Märgitud, et esimest lahust on pärast keetmist $\frac{3{,}5}{x}$ ja teist $\frac{4{,}5}{y}$ liitrit: 2 p
- Näidatud, et lahuste kogused liitrites annavad korrutamisel arvu $\frac{21}{4}$: 1 p
- Järeldatud, et lahuste summaarne kogus on vähemalt $\sqrt{21}$ liitrit, või midagi ilmselgelt samaväärset: 2 p
- Sellest omakorda järeldatud, et lahuste summaarne kogus peab olema üle 4,5 liitri: 1 p
- Näidatud, et lahuste summaarne kogus võib olla 5 liitrit: 1 p

Ainult õige vastuse (5 liitrit) eest ilma põhjenduseta anda 1 punkt.

5.
- Ülesande tingimustest järeldatud, et neljanda ringjoone raadius on võrdne kolme esimese ringjoone diameetriga: 3 p
- Sellest järeldatud, et kolme esimese ringjoone raadiused peavad olema võrdsed: 1 p
- Sellest omakorda järeldatud, et O on kolmnurga ABC ümberringjoone keskpunkt: 3 p

Kui õige vastuseni on jõutud eeldusel, et kolme esimese ringjoone raadiused on võrdsed, ning seda eeldust pole kuidagi põhjendatud, siis anda kokku 3 punkti skeemi viimase rea järgi.

Ainult õige vastuse (kolmnurga ABC ümberringjoone keskpunktis) eest ilma põhjenduseta anda 1 punkt.

6. Anname kolm eraldi skeemi kolme võimaliku lähenemise puhuks.

Skeem suurima kolmnurga kaudu argumenteeriva lahenduse järgi (žürii lahendus 1).

- Käsitletud suurima pindalaga kolmnurka ABC tippudega antud punktides: 1 p
- Korrektselt määratletud piirid, milles saavad asuda ülejäänud kaks punkti: 1 p
- Ammendavalt vaadeldud juht, kus üks punktidest asub väljaspool kolmnurka ABC: 2 p
- Vaadeldud juht, kus mõlemad punktid asuvad kolmnurga ABC sees: 3 p

Kui töös pole räägitud suurima pindalaga kolmnurgast, kuid mõttekäik on vastava lahendusega analoogiline, siis jätta skeemi kahe esimese rea järgi 2 punkti andmata, teiste ridade järgi anda punkte vastavalt toodud mõttekäigu sarnasusele täislahendusega. Kui töös on tehtud lisaks midagi, mis olulisel määral kompenseerib puuduvat eeldust, et kolmnurk ABC on suurima pindalaga, siis võib selle eest anda skeemi kahe esimese rea punkte.

Skeem pikima vahekauguse kaudu argumenteeriva lahenduse järgi (žürii lahendus 2).

- Käsitletud üksteisest kõige kaugemal asuvate punktide paari (A, B): 1 p
- Korrektselt määratletud piirid, milles saavad asuda ülejäänud kolm punkti: 1 p
- Ammendavalt vaadeldud juht, kus kummalgi pool sirget AB asub vähemalt üks märgitud punkt: 1 p
- Ammendavalt vaadeldud juht, kus mingi kahe ülejäänud märgitud punkti C ja D korral sirge CD ei lõika lõiku AB: 1 p
- Ammendavalt vaadeldud juht, kus iga kahe ülejäänud märgitud punkti C ja D korral sirge CD lõikab lõiku AB: 3 p

Kui töös pole räägitud suurima vahekaugusega punktidest, kuid mõttekäik on vastava lahendusega analoogiline, siis jätta skeemi kahe esimese rea järgi 2 punkti andmata, teiste ridade järgi anda punkte vastavalt toodud mõttekäigu sarnasusele täislahendusega. Kui töös on tehtud lisaks midagi, mis olulisel määral kompenseerib puuduvat eeldust, et AB on pikim, siis võib selle eest anda skeemi kahe esimese rea punkte.

Skeem kumera katte kaudu argumenteeriva lahenduse järgi (žürii lahendus 3).

- Käsitletud antud viie punkti kumerat katet: 2 p
- Ammendavalt vaadeldud juht, kus kumeral kattel asuvad kõik viis punkti: 1 p
- Ammendavalt vaadeldud juht, kus kumeral kattel asub täpselt neli punkti: 1 p
- Ammendavalt vaadeldud juht, kus kumeral kattel asub täpselt kolm punkti: 3 p

Hindamisjuhised

1.
- Leitud võrreldavate arvude ruudud: 2 p
- Liidetud saadud arvudele sama konstant nii, et üks võrreldav on kujul $a\sqrt{b}$ ja teises juuri pole: 1 p
- Teise ruututõstmisega kaotatud juured (või esitatud mõlemad arvud ruutjuurena mingist täisarvust): 2 p
- Õigesti tuvastatud saadud arvude suurusvahekord: 1 p
- Tehtud õige lõppjäreldus: 1 p

Ainult õige vastuse ($7+\sqrt{37}$) eest ilma selgitusteta anda 0 punkti.

2.
- Tähistatud risttahuka servapikkused $\sqrt{3}x$, $\sqrt{4}x$ ja $\sqrt{5}x$ mingi tundmatu pikkuse x korral: 1 p
- Koostatud sobiv võrrand x avaldamiseks risttahuka diagonaali pikkuse kaudu: 2 p
- Võrrandi lahendamisel saadud õige x väärtus: 2 p
- Leitud risttahuka ruumala: 2 p

Kui lõppvastuses on ühik puudu või vale, anda kokku 1 punkt vähem. Täisruudu juure alla jätmise eest punkte mitte alandada.

Ainult õige vastuse ($18\sqrt{5}\ \mathrm{cm}^3$) eest ilma selgitusteta anda 1 punkt, ühiku puudumise või vale ühiku korral anda 0 punkti.

3.
- Korrektse arutlusega taandatud ülesandes antud võrrand kujule $x^2+2y^2=99$, kus $x=\frac{a}{8}$ ja $y=\frac{b}{8}$: 3 p
- Leitud lahendid $(x,y)=(1,7)$, $(x,y)=(7,5)$ ja $(x,y)=(9,3)$: 1 p
- Ammendavalt põhjendatud, et rohkem lahendeid pole: 2 p
- Leitud vastavad originaalvõrrandi lahendid: 1 p

Skeemi esimese rea eest täispunktide saamiseks peab olema põhjendatud, miks a ja b jaguvad 8-ga. Taandamist võib teha ühekorraga, kasutades algarvude astmeid nagu žürii lahenduses, või ka järk-järgult, jagades võrrandit kolm korda 2-ga (siis peab iga kord olema põhjendatud, miks kõik jagatavad liikmed on paaris). Viimasel juhul anda iga põhjendatud ja korrektse 2-ga taandamise eest 1 punkt.

Ainult täieliku õige vastuse ($(8,56)$, $(56,40)$ ja $(72,24)$) eest ilma põhjenduseta anda 1 punkt, osaliselt õige vastuse eest 0 punkti.

4. Anname eraldi hindamisskeemid kahe erineva lähenemise puhuks.

Skeem Viète'i valemeid kasutava lahenduse järgi (žürii lahendus 1).

- Näidatud, et $k = \sin\alpha\cos\alpha$, kus α on kolmnurga ühe teravnurga suurus: 2 p
- Järeldatud, et $\sin^2\alpha$ ja $\cos^2\alpha$ on ruutvõrrandi $x^2 - x + k^2 = 0$ lahendid: 3 p
- Leitud $\sin\alpha, \cos\alpha = \sqrt{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - k^2}}$: 1 p
- Antud õige lõppvastus: 1 p

Skeem trigonomeetriliste funktsioonide teisendusvalemeid kasutava lahenduse järgi (žürii lahendus 2).

- Näidatud, et $k = \sin\alpha\cos\alpha$, kus α on kolmnurga ühe teravnurga suurus: 2 p
- Näidatud sellele tuginedes, et $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \sqrt{1-4k^2}$, kus α on kolmnurga väiksema teravnurga suurus: 2 p
- Võrrandisüsteemist saadud $\sin\alpha, \cos\alpha = \sqrt{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - k^2}}$: 2 p
- Antud õige lõppvastus: 1 p

Ainult täieliku õige vastuse ($\sqrt{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - k^2}}$, $\sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - k^2}}$ ja 1) ilma selgitusteta anda 1 punkt, osaliselt õige vastuse eest 0 punkti.

5. Anname eraldi hindamisskeemid kahe erineva lähenemise puhuks.

Skeem kolmnurga ABD võrdhaarsust kasutava lahenduse järgi (žürii lahendus 1).

- Märgitud, et $|AB| = |BD|$: 1 p
- Vaadeldud külje AB keskpunkti (žürii lahenduses F): 1 p
- Põhjendatud kesklõigu omaduse kaudu või kiirteteoreemiga, et $|AC| = 2|DF|$: 2 p
- Põhjendatud, et $|AK| = |DF|$: 2 p
- Saadud vahetulemustele tuginedes jõutud lõppjärelduseni: 1 p

Skeem kolmnurkade sarnasust kasutava lahenduse järgi (žürii lahendus 2).

- Tähele pandud, et $|AB| = 2|KB|$: 2 p

  Sealhulgas:
  - Tähele pandud, et $|AB| = |BD|$: *1 p*
- Põhjendatud, et kolmnurgad ABC ja KBA on sarnased teguriga 2: 4 p

  Sealhulgas:

    - Esitatud idee kolmnurkade sarnasust vaadelda: *1 p*
    - Märgitud ilma ammendava põhjenduseta, et kolmnurgad ABC ja KBA on sarnased teguriga 2: *1 p*
    - Toodud viide sarnasustunnusele KNK ilma selgituseta, millised nurgad on võrdse suurusega või millised küljed on vastavalt võrdelised: *1 p*
  - Sarnasusest järeldatud ülesande väide: 1 p

6.
  - Tõestatud, et kokku teenisid võistkonnad 20 punkti: 1 p
  - Põhjendatud ülesande andmetele tuginedes, et iga võistkond sai teenida 1 kuni 7 punkti: 1 p
  - Ammendavalt põhjendatud, et kolmandaks jäänud võistkond teenis vähemalt 4 punkti, või et see võistkond teenis ülimalt 4 punkti: 3 p
  - Ammendavalt põhjendatud ka teine eelmisel real mainitud võrratus: 2 p

Ainult õige vastuse (4) eest ilma põhjenduseta anda 1 punkt.

Eesti LXIV matemaatikaolümpiaad

7. veebruar 2017 Piirkonnavoor **12. klass**

Hindamisjuhised

1. Anname eraldi skeemid kahe erineva lähenemise puhuks.

   Skeem jada kaht järjestikust liiget kasutava lahenduse järgi (žürii lahendus 1).

   - Kirjutatud ülesandes antud jada üldliikme valemi põhjal välja kahe järjestikuse liikme avaldised (žürii lahenduses b_2 ja b_3): 1 p
   - Lahendatud neid kaht võrdust süsteemina: 1 p
   - Jõutud selle põhjal järeldusele, et $q = 5$: 1 p
   - Koostatud õige võrrand esimese liikme suhtes: 1 p
   - Võrrandist leitud $a = 5$: 1 p
   - Kontrollitud, et geomeetriline jada esimese liikmega 5 teguriga 7 tõepoolest rahuldab ülesande võrdust iga n korral: 2 p

   Kontroll on selles lahenduses väga tähtis, sest võrrand saadakse ainult kahe järjestikuse liikme vahelistest seostest. Nii ei anna võrrand mingit garantiid ülesandes antud valemi kehtivusele teiste liikmete korral. Kontrolli puudumisel või selle tegemisel ainult mõne üksiku konkreetse n jaoks anda skeemi viimase rea järgi 0 punkti.

   Skeem geomeetrilise jada summa valemit kasutava lahenduse järgi (žürii lahendus 2).

   - Asendatud ülesandes antud üldliikme võrrandisse geomeetrilise jada üldliikme ja summa avaldised: 1 p
   - Teisendatud võrrandit nii, et jada liikme järjekorranumbrist sõltuvad üksliikmed on kas ainsana võrduse ühel pool või esineb järjekorranumber ainult ühes kohas: 2 p
   - Konstantsuse/mittekonstantsuse analüüsiga leitud, et $q = 5$: 2 p
   - Võrduse teisest poolest saadud $a = 7$: 1 p
   - Ammendavalt käsitletud ka juht $q = 1$: 1 p

   Ainult täieliku õige vastuse ($a = 7, q = 5$) eest ilma selgitusteta anda 1 punkt. Ainult $a = 7$ või ainult $q = 5$ eest anda 0 punkti.

2. Anname eraldi hindamisskeemid kahe erineva lähenemise puhuks.

   Skeem võrrandisüsteemiga lahenduse järgi.

   - Koostatud võrrand, mis esitab ruutfunktsiooni väärtuste võrdust kohtadel -5 ja 12: 1 p

- Koostatud võrrand, mis väljendab, et ruutfunktsiooni väärtused kohtadel -5 ja 7 (või 12 ja 7) on absoluutväärtuselt võrdsed, aga vastasmärgilised: 1 p
- Põhjendatud, miks ruutfunktsiooni väärtus kohal 7 ei võrdu selle funktsiooni väärtusega kohtadel -5 ja 12: 1 p
- Leitud funktsiooni üldkuju $y = ax^2 - 7ax - 30a$: 2 p
- Ruutvõrrandi lahendivalemiga leitud nullkohad -3 ja 10 ning antud õige vastus: 2 p

Skeem Viète'i valemeid kasutava lahenduse järgi.

- Tehtud üldisust mitte kitsendav eeldus, et ruutliikme kordaja on 1: 1 p
- Esitatud ruutfunktsioon kujul $y = (x - x_1)(x - x_2)$, kus x_1 ja x_2 on otsitavad nullkohad: 1 p
- Viète'i valemite abil (või sümmeetria põhjal) näidatud võrdus $x_1 + x_2 = 7$: 2 p
- Saadud seos $(-5 - x_1)(-5 - x_2) = -x_1 x_2$ (või midagi ilmselgelt samaväärset): 1 p
- Leitud $x_1 x_2 = -30$: 1 p
- Tuvastatud lahendid $x_1 = -3$ ja $x_2 = 10$: 1 p

Ruutvõrrandi lahendivalemi kasutamise asemel võib kaks lahendit ära arvata, kontrollida sobivust ja märkida, et ruutvõrranditel üle kahe lahendi pole.

Ainult täieliku õige vastuse (-3 ja 10) eest ilma selgitusteta anda 1 punkt. Ainult ühe õige nullkoha eest anda 0 punkti.

3. Anname eraldi skeemid kahe erineva lähenemise puhuks.

Skeem juurte kaotamisega lahenduse järgi (žürii lahendus 1).

- Võrrandi pooled ruutu tõstetud nii, et kahest juurega liikmest jääb alles üks: 1 p
- Teise ruututõstmisega kaotatud juurtega liikmed: 1 p
- Põhjendatud, et arv $(a - b)^2$ jagub 217-ga: 1 p
- Arv 217 õigesti tegurdatud: 1 p
- Korrektselt järeldatud, et arv $a - b$ jagub 217-ga: 1 p
- Välistatud juht $a = b$: 1 p
- Ammendavalt vaadeldud juht $|a - b| = 217$: 1 p

Kui sümmeetriline lahend on unustatud, siis võtta 1 punkt maha.

Skeem juurealuse täisruudu tuvastamisega lahenduse järgi (žürii lahendus 2).

- Viidud üks liidetav teisele poole võrdusmärki ja tõstetud siis pooled ruutu: 1 p

- Märgitud, et $217a$ (või $217b$, olenevalt sellest, milline liige algul poolt vahetas) on täisruut: 1 p
- Arv 217 õigesti tegurdatud: 1 p
- Järeldatud, et $a = 217k^2$ mingi täisarvu k jaoks: 1 p
- Mainitud, et samamoodi kehtib ka $b = 217l^2$ mingi täisarvu l jaoks: 1 p
- Asendades saadud avaldised algsesse võrrandisse, leitud võimalused $k = 0, l = 1$ ja $k = 1, l = 0$: 1 p
- Tuvastatud algse võrrandi lahendid: 1 p

Kui lahenduse lõpus on leitud üks lahend ja teine (sümmeetriline) on unustatud, siis võtta skeemi viimase kahe rea järgi kokku 1 punkt maha.

Ainult täieliku õige vastuse ($(0, 217)$ ja $(217, 0)$) eest ilma selgitusteta anda 1 punkt. Ainult ühe lahendi eest anda 0 punkti.

4. Anname eraldi hindamisskeemid kahe erineva lähenemise puhuks.

Skeem samaväärsusteisendusi kasutava lahenduse järgi (žürii lahendus 1).

- Tõestatava võrduse pooltest võetud logaritm alusel a: 3 p
- Rakendatud mõlemas pooles astme logaritmi valemit: 3 p
- Tehtud lõppjäreldus: 1 p

Skeem logaritmi definitsiooni kasutava lahenduse järgi (žürii lahendus 2).

- Esitatud arvud x ja y logaritmi definitsiooni järgi vastavalt kujul $a^{\log_a x}$ ja $a^{\log_a y}$: 3 p
- Astme astendamise valemi järgi leitud $x^{\log_a y} = a^{\log_a x \log_a y}$ ja $y^{\log_a x} = a^{\log_a y \log_a x}$: 3 p
- Tehtud lõppjäreldus: 1 p

5. Anname eraldi hindamisskeemid kahe erineva lähenemise puhuks.

Skeem võrdusele $\angle A'IP = \angle B'IP$ taandamist kasutava lahenduse järgi (žürii lahendus 1).

- Märgitud, et punkt P poolitab kaare $A'B'$ parajasti siis, kui $\angle A'IP = \angle B'IP$, kus I on kolmnurga ABC siseringjoone keskpunkt: 1 p
- Saadud võrdus $\angle CA'P = 90^\circ - \angle ACB$ või midagi ilmselgelt samaväärset: 1 p
- Märgitud, et $\angle IA'P = \angle IPA'$: 1 p
- Avaldatud suurus $\angle A'IP$ suuruse $\angle ACB$ kaudu: 1 p
- Avaldatud suurus $\angle B'IP$ suuruse $\angle ACB$ kaudu: 1 p
- Võrdsustatud $\angle A'IP$ ja $\angle B'IP$ avaldised ning saadud lahend $\angle ACB = 60^\circ$: 2 p

Kui $\angle A'IP$ ja $\angle B'IP$ on avaldatud mitte $\angle ACB$, vaid mingi muu ühe ja sama suuruse kaudu, mis omakorda on $\angle ACB$ kaudu hõlpsasti avalduv, siis anda skeemi neljanda ja viienda rea järgi kokku 1 punkt vähem. Selle eest, kui on näidatud lahendi samaväärsus võrdusega $\angle ACB = 60^\circ$, anda 1 punkt lisaks.

Skeem võrdusele $\angle PA'B = \angle PB'A'$ taandamist kasutava lahenduse järgi (žürii lahendus 2).

- Märgitud, et punkt P poolitab kaare $A'B'$ parajasti siis, kui $\angle PA'B' = \angle PB'A'$: 1 p
- Saadud võrdus $\angle CA'P = 90^\circ - \angle ACB$ või midagi ilmselgelt samaväärset: 1 p
- Puutujalõikude omaduse abil leitud seos võrdhaarse kolmnurga $CA'B'$ alusnurga suuruse ja $\angle ACB$ vahel: 1 p
- Avaldatud $\angle PA'B'$ ja $\angle PB'A'$ samuti $\angle ACB$ kaudu: 2 p

  Sealhulgas:
  - Avaldatud ainult üks nurga suurus kahest: *1 p*
- Võrdsustatud $\angle PA'B'$ ja $\angle PB'A'$ avaldised ning saadud lahend $\angle ACB = 60^\circ$: 2 p

Kui $\angle PA'B'$ ja $\angle PB'A'$ on avaldatud mitte $\angle ACB$, vaid mingi muu ühe ja sama suuruse kaudu, mis omakorda on $\angle ACB$ kaudu hõlpsasti avalduv, siis anda skeemi neljanda rea järgi 1 punkt vähem. Selle eest, kui on näidatud lahendi samaväärsus võrdusega $\angle ACB = 60^\circ$, anda 1 punkt lisaks.

Kui töös läbi viidud mõttekäik on õige ainult ühes järeldamise suunas (näiteks eeldab õpilane, et $\angle ACB = 60^\circ$, kasutab seda läbivalt võrduse $\angle PA'B' = \angle PB'A'$ tõestamise käigus ning vastupidises suunas tõestus puudub), siis anda kokku 4 punkti. Juhul, kui oluline osa ühesuunaliselt läbi viidud teisendussammudest on ka ümberpööratult õiged, võib anda sedavõrd rohkem punkte, kui suur osa mõttekäigust on pööratav.

6.
- Põhjendatud, et turniiritabeli reasummade summa võrdub veerusummade summaga (või midagi ilmselgelt samaväärset): 2 p
- Põhjendatud, et sama numbriga rea ja veeru summade summa on $n - 1$, kus n on võistkondade arv: 2 p
- Teisendatud vahet $(r_1^2 + \ldots + r_n^2) - (v_1^2 + \ldots + v_n^2)$ ruutude vahe valemi korduva rakendamise teel: 1 p
- Näidatud, et see vahe on 0: 1 p
- Tehtud lõppjäreldus: 1 p

Kokkuvõtteks

Sel aastal vaatasid üleriigilise žürii parandajad 8.–12. klassides läbi kõik ülesanded kõigis töödes, mis olid Tartusse saata ette nähtud ja mis ka meile jõudsid. Probleeme tekitas žürii poolne eksimus punktipiiride kommunikeerimisel piirkondadesse, kuhu vea tagajärjel jõudsid mingi varasema aasta punktipiirid, mitte need, mis olid žürii poolt tänavuste tulemuste alusel otsustatud. Seetõttu saabus meile 7.–10. klassi töid oodatust vähem ja 11.–12. klassi töid oodatust rohkem. Klassides, kus algul saadeti ettenähtust vähem töid, küsiti vea ilmnemisel töid juurde, kuid osas piirkondades olid tööd juba kätte jagatud ja neist kõik ei jõudnudki meile. 11. klassis on aga töödes, mis saadeti liiast, osa ülesandeid meie poolt läbi vaatamata.

Žürii palub tekkinud olukorra pärast vabandust. Samuti tuleb tunnistada mitmeid vigu tänavuses ülesannete komplektis.

- Mõiste *kõrguste lõikepunkt*, mida kasutas 9. klassi ülesanne 3, tekitas segadust. Kuna kõrgus defineeritakse kui teatav lõik, siis sõnasõnaliselt tõlgendades nürinurkse kolmnurga kõrgused ei lõiku ja žürii pakutud lahendus ei sobi. Tegelikult on *kõrguste lõikepunkt* eraldi mõiste, mis pole interpreteeritav sõnasõnaliselt. Kõrguste lõikepunktiks nimetatakse punkti, kus lõikuvad kolmnurga kõrgused või nende pikendused. Selle ülesande valikut piirkonnavooru võib aga õigustatult pidada ebaõnnestunuks, sest kõrguste lõikepunkt tänapäeval Eesti kooliprogrammi enam ei kuulu.
- 10. klassi ülesandes 3 oli puudu sõna „erinevate“, mistõttu muutus ülesanne kavandatust tunduvalt lihtsamaks.
- 11. klassi ülesande 2 venekeelsest tekstist oli originaalvariandis puudu sõna „ruudud“. Kuigi võistluse ajal viga märgati ja teatati õpilastele, jäi see osal juhtudel siiski õpilasele märkamata või röövis valesti püstitatud lahenduse ümbertegemine väärtuslikku aega.
- 11. klassi ülesande 5 skeemi oli sisse lipsanud näpuviga. Punkt oli ette nähtud võrduse $|AB| = |AD|$ märkamise eest, kuid mõeldud oli muidugi võrdust $|AB| = |BD|$ (võrdus $|AB| = |AD|$ üldjuhul ei kehtigi). Uues versioonis on viga parandatud.

Raskuse poolest ühegi klassi komplekt väga murdev ei olnud. 12. klassi kooliülesanne 1 oli raskevõitu, kuid seeeest oli komplektis väga lihtne tõestusülesanne 4. 10. klassi ülesanne 1 osutus aga liigagi lihtsaks. Üks suhteliselt kõige raskem ülesanne omas klassis oli 9. klassi ülesanne 2, kus oli vaid üks täislahendus. Üldse paistavad tulemuste järgi põhikooli komplektid suhteliselt raskemad olevat. Ainsana puudus 9. klassis täisskoor ning ka 7. ja 8. klassis oli pingerea ülemine ots tavatult hõre.

Lõpuks tasub märkida ka seda, et ilmselt seoses piirkonnavooru toimumisega tööpäeval oli enamikus klassides tunduvalt rohkem osalejaid kui varasemalt, vaid 12. klassis erilist vahet polnud märgata.

Kontrollijate kommentaarid (Reimo Palm, Evely Kirsiaed)

Test

Testis oli punktimuudatusi vähe, esinesid need vaid kolmes ülesandes: Ülesandes 2 taandamata murru kujul esitatud vastused said 0 punkti. Ülesandes 3, kui kirjas oli lisaks õigele vastusele ka mõni vale vastus, saadi 0 punkti. Ülesandes 10 õige vastus suvalises järjestuses andis 2 punkti.

Tüüpvigadest saab rääkida vaid ülesande 9 korral, kus tihti pakuti vastuseks 9 cm. Ilmselt võeti vähimad paaritud arvud ja saadi $1 + 3 + 5 = 9$, kuid küljed 1, 3 ja 5 ei moodusta kolmnurka, sest $1 + 3 < 5$.

Ülesanne 1

Enamasti oli see ülesanne lahendatud õigesti. Punktimuutusi oli üsna vähe, peamiselt ühtlustamised 1–2 punkti piirides. Mõnikord polnud ammendavalt põhjendatud, miks leitud a väärtus on vähim, sel juhul võeti maha 1–2 punkti vastavalt hindamisskeemile.

Ülesanne 2

Esines mitmeid tähelepanematuse vigu: segi aeti poolringjoone raadius ja diameeter, poolringjoone pikkuseks võeti kogu ringjoone pikkus või poolringi pindalaks kogu ringi pindala. Esines ka töid, kus olid segi aetud mõisted ümbermõõt ja pindala. Peamiselt kaotati aga punkte täpsuse nõude eiramise tõttu (valdavalt kasutati lähendit $\pi \approx 3{,}14$, kuid paaris töös ka $\pi \approx 3$).

Ülesanne 3

Mõnikord oli võrrand esitatud sõnalise kirjelduse kujul, sel juhul punkte maha ei võetud. Kui võrrandi lahendamise käik polnud piisavalt välja toodud, siis võeti maha 1 punkt.

Kontrollijate kommentaarid (Elts Abel, Mart Abel)

Laekus 71 tööd. Vaadati läbi kõikide tööde kõik ülesanded.

Test

Test oli lahendatud tavapäraselt küllaltki hästi. Vastavalt hindamisjuhisele tuli kuuel juhul teha siiski ka parandusi punktitabelisse. (Ligikaudne vastus või vale vastus oli loetud õigeks, õige ligikaudne vastus jäetud arvestamata, ühikute olemasolu hinnatud ebatäpselt.) Ühes töös oli küsimuse 4 korral kujundite koguarvu asemel antud ruutude ja kolmnurkade arvud eraldi. Seda hindas žürii 1 punkti vääriliselt antud 2 punkti asemel.

Enam muret valmistasid geomeetriaküsimused 7–9, eriti küsimus 8. Ootamatult palju valesid vastuseid anti ka küsimusele 1.

Ülesanne 1

Selles ülesandes oli peamiseks hindamisprobleemiks otsustada, millised väited vajavad pikemat põhjendust ja millised mitte. Mõnes piirkonnas oli õigete väidete eest jäetud punktid andmata, sest arvati, et mingi osa žürii poolt toodud lahenduses mainitud sammudest oli tegemata. Samas sai ülesannet lahendada ka mõnest sammust osavalt „üle hüpates“. Üheks suuremaks punktimuutuste põhjuseks oli žürii punktiskeemis osa b) esimene väide, mille eest võis anda 2 punkti. Seal oli toodud välja seos $2 + 3k$ murru nimetaja jaoks, kuid samuti öeldud, et ka ilma selle valemita on võimalik õige sõnalise põhjenduse/tähelepaneku eest lubatud 2 punkti välja anda. Mitmel pool oli aga selle osa sõnaliste põhjenduste eest jäetud punktid andmata. Teine probleemne koht oli teise osa juures see, et mõnedes töödes asuti lugeja ja nimetaja võimalikke väiksemaid väärtusi (näiteks nimetajaid $2, 5, \dots, 41$ ja lugejaid $1, 3, \dots, 21$) vaatlema. Nähti, et esimeste väärtuste abil ei ole võimalik murdu $\frac{5}{6}$ saada ning seepeale väideti, et „kuna esimeste arvudega seda teha ei saanud, ei saa ka edaspidi“. See mõttekäik ilma mingite täpsemate jaguvusega seotud põhjendusteta oli mõnel pool hinnatud täispunktide vääriliseks, teisal oli midagi, kolmandas piirkonnas palju maha võetud. Ühtlase hindamise mõttes otsustas žürii sellise mõttekäigu korral anda teise osa eest 2 punkti. Üldjuhul tuli aga žüriil selles ülesandes punkte pigem tõsta kui langetada.

Ülesanne 2

Geomeetriaülesanne oli selle komplekti töömahukaim ja nõudis nii head orienteerumist oma teadmistes kui ka selgitamise oskusi. Kümmekond lahendajat said sellega väga hästi hakkama (6–7 punkti). Suurem osa õpilaste lahendustest sarnanes žürii poolt antud lahendusega. Suur erinevus aga oli selles, et pea pooled neist valisid ristküliku mõõtmeteks mingid täiesti juhuslikult võetud arvud ning sooritasid edasised arvutused nendega. Kuigi jõuti ka õigete vastusteni, anti nii a-osa kui ka b-osa selliste lahenduste eest maksimaalselt 2 punkti. Kui aga sellest, et täisnurkse kolmnurga pindala on 10 cm^2, järeldati, et kaatetite pikkused on näiteks 2 cm ja 5 cm, kaotati veel 1 punkt.

Oli ka teine lahendus nelinurga $KLMN$ abil, mida hinnati järgmise skeemi kohaselt:

- Näidatud, et nelinurga $KLMN$ pindala on pool ristküliku $ABCD$ pindalast: 1 p
- Näidatud, et kolmnurga KLO pindala on pool nelinurga $KLMN$ pindalast: 2 p
- Leitud a-osa õige vastus: 1 p
- Näidatud, et on nelja liiki kolmnurkade pindalasid: 1 p
- Leitud kolmnurkade paar, mille pindalad suhtuvad nagu 10 : 15: 1 p
- Leitud ristküliku $ABCD$ pindala: 1 p

Ülesanne 3

See ülesannete osutus veidi ahhaa-tüüpi ülesandeks. Enamik ebaõnnestujaist ei mõistnud, et $\frac{1}{3}$ kõneaega ja $\frac{2}{3}$ ooteaega tuli leida just sellest otsitavast ajast. Mõnel üksikul juhul ei olnud tööde parandajad õiglaselt hinnanud võrrandeid, mis erinesid žürii lahenduses pakutud võrrandist, mõnel juhul aga olid mittetäielikud lahendused ülehinnatud. Ühtlustamisel anti juhtudel, kus osalistes lahendustes ei oldud küll jõutud võrrandini, aga oldi saadud mõned olulised andmed selle koostamiseks, lisaks 1–2 punkti (näiteks fakti eest, et sama pikk kõneaeg kulutab akut 22 korda kiiremini akut kui ooteaeg).

Kontrollijate kommentaarid (Raul Kangro, Janno Veeorg)

Test

Testi raskusaste tundus paras. Maksimumpunktidega töid ei olnud liiga palju.

Viimases ülesandes esines paljudes töödes vastusena 56. Võimalik, et selle põhjustas vale arusaam sellest, mis on kuubi diagonaal.

Ülesanne 1

Ülesanne oli kergemate killast, kuid detailideni korrektseid lahendusi ei olnudki kuigi palju. Väga sageli lihtsalt väideti ilma korrektsete põhjendusteta, et väikseima arvu saame, kui võtame 12 üheksat ja sinna ette võimalikult väikese numbri. Seda väide vajab kindlasti täiendavaid põhjendusi, sest väga sarnase ülesande korral, kus numbrite ruutude asemel summeeritaks ruutjuuri numbritest, ei oleks see õige. Seetõttu peab korrektses lahenduses olema selgelt põhjendatud, miks leitud arvust 6999999999999 väikseimaid ülesande tingimustele vastavaid arve ei ole võimalik saada. Hindamisskeemis oli selle põhjenduse eest ette nähtud 2 punkti, kuid kahjuks enamik parandajatest selles osas skeemi ei järginud. Sellest tulenes vajadus paljudes töödes kahandada skoori 1–2 punkti võrra, sest neis olid vastavad põhjendused puudu.

Ülesanne 2

Ülesanne oli raske. Täislahendusi oli ainult üks, lisaks veel mõned peaaegu täislahendused.

Tüüpiline viga oli, et eeldati kohe alguses, et a peab jaguma 2017-ga ilma seda korrektselt põhjendamata. Samuti valmistas probleeme põhjendamine, miks võrdusest $\dfrac{2017b}{b+1} = k$ järeldub, et 2017 jagub arvuga $b + 1$.

Peamiselt muudeti punkte põhjusel, et piirkondades oli antud punkte väidete eest, mis ei olnud piisavalt korrektselt põhjendatud.

Ülesanne 3

Kahjuks esines siin mõningane arusaamatus mõistega *kõrguste lõikepunkt*. Mõned õpilased mõistsid seda nii, et kui lõikuvad kõrguste pikendused, siis ei ole tegemist kõrguste lõikepunktiga. Juhul kui sellistes töödes oli ära põhjendatud, et teravnurkses ja täisnurkses kolmnurgas ei saa kõrguste lõikepunkt olla punkti C peegeldus sirge AB suhtes ning põhjendatud, miks nürinurkses kolmnurgas kõrguste asemel lõikuvad nende pikendused, said sellised tööd maksimumpunktid.

Üldiselt oli ülesanne küllaltki hästi lahendatud.

Ülesanne 4

Ülesanne oli raske ja enamikul õpilastest puudus vähimgi idee, milliste tähelepanekute abil saaks veenvalt põhjendada, et nende valitud seisust ei ole kuidagi võimalik jõuda ainult musti ruute sisaldava seisuni. Väga palju esines valesid väiteid (nt et soovitud seisu saab jõuda ainult siis, kui valgete ruutude arv algseisus jagub 6-ga). Palju oli lahendusi, kus lihtsalt prooviti mingeid asendusi ja väideti, et nähtu põhjal on selge, et mitte kuidagi ei ole võimalik jõuda soovitud seisuni.

Lähtudes erinevate piirkondade hindamise praktikast ja ülesande iseloomust, said pärast ühtlustamist ülesande eest punkte ainult lahendused, kus oli mingil kujul välja toodud tähelepanek, et valgete/mustade ruutude paarsused jäävad teisenduste käigus samaks. Täispunktide saamiseks pidi see tähelepanek olema korrektselt põhjendatud.

Kontrollijate kommentaarid (Oleg Košik, Kristjan Kongas)

Ülesanne 1

Ülesanne oli väga lihtne, ülevaatusele jõudnud töödest anti kõigile 7 punkti, välja arvatud kaks tööd, millel alandati pisivigade tõttu punktisumma 6-le.

Ülesanne 2

Ülesanne osutus lihtsaks. Kõige rohkem jäid lahendused pooleli enne võrrandi poolte kanoonilisele kujule viimist.

Hindamise ühtlustamisel anti peamiselt punkte juurde, sest lahenduses esinevat tähelepanematusviga karistatakse üldjuhul 1 punkti maha võtmisega.

Ülesanne 3

Kuigi olümpiaadi ajal kasutatud ülesande sõnastus, mis ei nõudnud arvude erinevust, võimaldas ka triviaalset lahendinelikut ($a = b = c = d$), ei osutunud ülesanne sellele vaatamata väga lihtsaks. Ilmselt ka paljud õpilased ei oodanud, et see ülesanne nii lihtsalt lahenduda võib.

Ülesanne oli selline, et seda võis kas ära lahendada või mitte ära lahendada, ning žüriile saadetud tööde hulgas poolikuid lahendusi, mis oleks saanud 2 kuni 4 punkti, ei esinenud. Valdav enamus lahendajaid said kas 7 või 0 punkti.

Ülesanne 4

Ülesanne oli keskmise raskusastmega.

Väga vähe saadi maksimumpunkte, sest õpilased, kes tõestasid, et joogi ruumala ei saa olla väiksem kui 5 l, eeldasid tavaliselt, et see ongi vähim võimalik maht. Mõnes lahenduses oli leitud ruutvõrrand x jaoks ja lahendi eksisteerimise üle otsustati vaid diskriminandi abil. Selline lahendus ignoreeris ülesande tekstist tulenevat lisatingimust $x, y \geqslant 1$. Seesugust viga oleks olnud lihtne vältida, kui oleks ühe lahenditest välja arvutanud ja kontrollinud, et x ja y rahuldavad kõiki tingimusi.

Palju oli ka lahendusi, mis leidsid (x, y) paari 5 l mahu jaoks, aga midagi sisukat väiksemate mahtude kohta ei tõestatud. Sellised lahendused said hindamisskeemi järgi üldjuhul 3 p.

Ülesanne 5

Valmistas rõõmu, et žüriile saadetud tööde hulgas taipas enamus lahendajaid üldjoones ära, mis ülesandes toimub, ning kas pakuti välja õige vastus või vähemalt avastati, et väiksemad ringjooned on võrdse raadiusega.

Täispunktide saamiseks ei piisanud siiski vaid äramärkimisest, et väiksema ringjoone diameeter on võrdne suurema ringjoone raadiusega. See väide vajas kindlasti ka põhjendust, mida paljudel kahjuks ei olnud, või polnud see piisavalt korralik.

Samuti ei ole piisav väide, et punkt O on selline, mis asub kolmnurga tippudest võrdsel kaugusel. Õpilane pidi näitama, et ta mõistab, et selline punkt on tõesti ainus; selleks piisas äramärkimisest, et tegemist on ümberringjoone keskpunkti või keskristsirgete lõikepunktiga.

Ülesanne 6

Ülesannet sai lahendada mitmel erineval viisil (lisaks žürii pakutud lahendustele), samas esines ka mitmeid tõestusideid, mis paika ei pidanud. Erinevate lahendusmeetodite paljusus valmistas paratamatult nii mõnigi kord raskusi hindajatele piirkondades.

Üks tüüpiline valelahendus põhines väitel, et kui neljas punkt paigutada kolmnurgast väljapoole, tekib alati kumer nelinurk. Kuigi see väide tegelikult ei kehti, loeti mõnel juhul piirkondades sellele väitele tuginevaid lahendusi täispunktide vääriliseks.

Kontrollijate kommentaarid (Härmel Nestra, Markus Rene Pae)

Ülesanne 1

Ülesanne osutus nii parandajatele kui ka lahendajatele küllalt lihtsaks. Lisaks žürii pakutud lahendusele hinnati täispunktidega lahenduskäiku, milles oli leitud kolmas arv, mis jääb kahe olemasoleva arvu vahele ning põhjendatud nende suurusvahekord. Selleks sobivaks arvuks oli 13,08, sest

$$13{,}08 = 3 \cdot 4{,}36 = 3 \cdot \sqrt{4{,}36^2} = 3 \cdot \sqrt{19{,}0096} > 3 \cdot \sqrt{19},$$

$$13{,}08 = 7 + 6{,}08 = 7 + \sqrt{6{,}08^2} = 7 + \sqrt{36{,}9664} < 7 + \sqrt{37}.$$

Peamised punktimuutused tingis erinevate piirkondade erinev hindamismudel selle alternatiivse lahenduse hindamisel.

Selle ülesande puhul oli levinud veaks ümardamine, sest olemasolevate arvude ümardamise korral võib nende suurusvahekord muutuda.

Ülesanne 2

Ülesanne oli ootuspäraselt lihtne ning enamasti said õpilased selle lahendamisega ilusti hakkama. Seda kinnitab ka ülesande eest antud keskmine punktisumma. Üksikutes töödes esines viga ülesande püstituse tõlgendamisel:

- oli arvestatud, et risttahuka küljepikkused (mitte nende ruudud) suhtuvad nagu $3:4:5$;
- esitati antud suhe kujul $3a^2 = 4b^2 = 5c^2$, kuid selle korral ei vasta küljepikkuste ruutude suhe ülesande tekstile (õige oleks $\dfrac{a^2}{3} = \dfrac{b^2}{4} = \dfrac{c^2}{5}$).

Ülesanne 3

Ülesanne oli õpilastele keeruline lahenduskäigu alustamise mõttes. Enamvähem kõik, kes tabasid ära, et a ja b peavad jaguma 8-ga, jõudsid ka täislahenduseni. Küllalt tüüpiline lahenduskäik uuris erinevaid üheliste arve, mis nii a kui ka b väärtusel olla saab. Paraku ei jõutud sedasi piisavate kitsendusteni ning lahendust hinnati madalalt, kui oli kitsendustega lahend kaotatud või tehtud põhjendamatu kitsendus. Täispunktid said ka kõik need lahendused, kes olid põhjendanud ära a ja b väärtuste võimaliku vahemiku ning vaadelnud püstitatud vahemikus kõiki võimalikke väärtusi.

Ülesanne 4

Tüüpilisimad punktid selle ülesande eest olid 7, 6 ja 2. Neile, kes oskasid lisaks otse ülesande tingimustest nähtuvale seosele $\sin\alpha\cos\alpha = k$ juurde võtta $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, oli juba lihtne teisendada süsteem biruutvõrrandiks ja lahendada. Paraku paljud lahendajad jõudsid vaid seoseni $\sin\alpha\cos\alpha = k$ ja ei mõistnud edasi midagi peale hakata. Tundub, et põhjuseks võis olla ülesande püstituse valestimõistmine. Reaalarvu k sissetoomine tekstis viitab sellele, et nurkade siinuste avaldamisel tohib seda arvu kasutada. Siinused tuli väljendada k kaudu. Reaalsuses pakkusid mitmed õpilased vastuseks $\sin\alpha = \dfrac{k}{\sin\beta}$ ja $\sin\beta = \dfrac{k}{\sin\alpha}$, mis avaldab nurkade siinused nende endi kaudu (lisaks suurusele k) ja ei sobi vastuseks.

Mõnes töös ei olnud jõutud ka võrduseni $\sin\alpha\cos\alpha = k$. Andsime 1 punkti, kui oli tehtud nähtavat progressi selle saamise suunas.

Rangelt võttes pidi vastuseks esitama kolm avaldist, lisaks teravnurkade siinustele ka täisnurga siinuse 1. Mitmetes töödes oli viimane unustatud, kuid selle eest me punkti maha ei võtnud, kui lahenduskäigust oli selge, et õpilane on täisnurga siinuse võrdumist 1-ga mõistnud ja sellega arvestanud.

Ülesanne 5

Ülesanne oli üllatavalt hästi lahendatud. Mõlemat žürii poolt välja pakutud lahendust esines paljudes töödes. Uuendatud materjalis on esitatud ka kolmas tüüplahendus külje AC keskpunkti kaudu.

Piirkondades oli tihti näpuvigade eest punkt maha võetud, mille andsime tagasi. Mõnikord andsime punkti juurde ka üksikute tähelepanekutega töödel, kui tähelepanekud küljepikkuste suhete kohta olid märgitud joonisel ja piirkonnas nähtavasti arvestamata jäänud. Žürii hindamisjuhistes olnud näpuviga (punkt oli muidugi ette nähtud võrduse $|AB| = |BD|$, mitte $|AB| = |AD|$ mainimise eest, mis üldjuhul ei kehtigi) ei paistnud olevat arusaamatusi põhjustanud.

Ülesanne 6

Ka see ülesanne osutus üllatavalt lihtsaks, kuid siin alandasime siiski paljudel juhtudel tulemust paari punkti ulatuses, kui õpilase põhjendused ei olnud meie arvates piisavalt veenvad.

Ühe tüüplahendusena esines töödes mõttekäik, mis ei kasuta võistkondade poolt teenitud punktide summat. Nagu žürii lahenduses näidati, et suurim ühe võistkonna teenitud punktide arv on 7 ja vähim on 1. Kuna erinevad võistkonnad kogusid erineva arvu punkte, pidi kolmandaks jäänud võistkond saama ülimalt 5 punkti ja vähemalt 3 punkti. Oletades, et see võistkond kogus 5 punkti ja vaadates läbi võimalikud matšide tulemused, jõuame vastuoluni. Sama juhtub eeldusel, et kolmandaks jäänud võistkond sai 3 punkti. Sellest mõttekäigust oli tüüpiliselt olemas tõestus, et kolmandaks jäänud võistkond sai 3 kuni 5 punkti, selle eest andsime 3 punkti (koos skeemis ette nähtud punktiga näitamise eest, et iga võistkonna punktisaak jääb 1 ja 7 vahele). Edasine oli tavaliselt vähem või rohkem ähmane jutt. Vaid mõnes üksikus töös oli järgnev juhtude läbivaatus veenvalt ilma aukudeta kirja pandud, mis võimaldas anda täispunktid.

Üks väga elegantne lisalahendus on jõudnud ka uuenenud žürii materjalidesse.

Kontrollijate kommentaarid (Urve Kangro, Kairi Hennoch)

Ülesanne 1

Ülesanne oli keskmiselt hästi lahendatud. Need, kes tulid idee peale vaadelda kahte järjestikust jada liiget, jõudsid enamasti lahendusega ka lõpuni. Suhteliselt palju oli ka neid, kes unustasid kontrolli teha, seetõttu täispunkte oli ehk vähem, kui oleks võinud olla. Leidus ka õpilasi, kes millegipärast arvasid, et a ja q peavad olema täisarvud, ja üritasid lahendada tegurdamise abil. Punkte muudeti peamiselt kontrolli puudumise ja pisivigade tõttu.

Ülesanne 2

See ülesanne oli komplekti lihtsaim. Põhiliselt tekitas raskusi absoluutväärtustega tegutsemine. Ülesandes antud tingimus, et funktsiooni väärtus kohal 7 on absoluutväärtuselt sama, mis funktsiooni väärtus kohal -5 (või 12), *ei ole* samaväärne tingimusega $|f(7)| = f(-5)$, sest $f(-5)$ võib olla ka negatiivne, samamoodi pole korrektne ka $f(7) = |f(-5)|$. Sellise vea eest (mis küll tegelikult lahenduskäiku oluliselt ei mõjutanud) võtsime maha ühe punkti. Korrektne oleks olnud kirjutada kas $|f(7)| = |f(-5)|$ või siis $f(7) = \pm f(-5)$. Tegelikult siin ülesandes oli $f(7) = -f(-5)$, aga kui sellel polnud mingisugust lisapõhjendust, siis võtsime ka selle eest ühe punkti maha (kuigi selles ülesandes võisid mõned õpilased seda ka ilmseks pidada).

Ülesanne 3

Ülesanne osutus keskmiselt raskeks. Enamus õpilasi suutsid võrrandi ruutu tõsta, ent paljudel juhtudel ei osatud edasi minna. Punkte muudeti peamiselt põhjenduste puudulikkuse ja tõestamata/valede väidete kasutamise eest.

Ülesanne 4

See ülesanne oli küllaltki standardne ja üsna hästi tehtud. Siiski oli paljudes töödes kasutatud logaritmi alusel x (või y) ning seda tehes tuleb alati eraldi vaadelda juhtu $x = 1$ (või $y = 1$). Sellised tööd kaotasid ühe punkti, kuna tegelikult see juht on ilmne. Mõnedes töödes alustati lahendust nii: olgu $\log_a x = b$ ja $\log_a y = c$, siis $x = a^b$ ja $y = a^c$. Nii võis saada täiesti korrektse lahenduse, aga piirkondades oli seda väga erinevalt hinnatud, mõnikord isegi 0 punktiga.

Mõnedes töödes ei olnud vist aru saadud, mida on vaja teha, selle asemel püüti näiteks võrrandit lahendada.

Ülesanne 5

See ülesanne osutus nii õpilastele kui piirkondade parandajatele raskeks. Raskusi paistis tekitavat mõistest „parajasti siis“ aru saamine, mistõttu suur osa piirkondades 7 punkti saanud töödest langesid üle parandades 4 punkti peale, kuna tegelikult oli tõestus tehtud ainult ühes suunas. Tüüpilises sedasorti lahenduses alustati väitega, et punkt P poolitab kaare parajasti siis, kui ta asub nurga ACB poolitajal (mis on õige), ja edasises lahenduses eeldati, et ta asubki seal nurgapoolitajal, ning jõuti selleni, et nurk $\angle ACB = 60^\circ$. Selline lahendus aga ei tõesta, et kui $\angle ACB = 60^\circ$, siis P peab asuma sellel nurgapoolitajal. Leidus ka lahendusi, kus kasutati sisuliselt mõlemat väidet korraga eeldusena – eeldati nii seda, et P asub nurga ACB poolitajal, kui seda, et $\angle ACB = 60^\circ$. Sellised lahendused said maksimaalselt 1 punkti. Leidus ka lahendusi, kus millegipärast arvati, et kuna kolmnurga mediaanid lõikuvad ühes punktis, peab punkt P asuma just kolmnurga $A'CB'$ mediaanide lõikepunktis.

Ülesanne 6

See ülesanne oli komplekti kõige raskem. Paljud ei osanud siin midagi teha. Esines omajagu väiteid, et kuna mõlemas ruutude summas esinevad samad liidetavad, siis on ka need summad ilmselt võrdsed, või siis iga rea summa jaoks leidub mingi veerg, mille summa on sama, mis pole ilmselt õige.

Mõned õpilased püüdsid väidet tõestada matemaatilise induktsiooniga: kui kõik võistkonnad mängiksid omavahel viiki, siis väide ilmselt kehtib. Kui nüüd hakata ükshaaval parandama nende mängude tulemusi, mis tegelikult ei läinud viiki, siis võime eeldada, et enne parandamist väide kehtis, ning näitame, et peale parandamist jääb väide samuti kehtima. Nii on täiesti võimalik seda ülesannet lahendada, kuid enamuses töödes, mis seda lähenamist kasutasid, oli kas kasutatud eeldust, et kõik teised mängud jäid viiki (siis pole see enam induktsiooni samm, vaid töötab ainult esimese paranduse puhul), või siis tehtud induktsiooni samm näiteks eeldusel, et võistkondade arv on 5 ja parandame 3. ja 5. võistkonna vahelist tulemust.

Kui midagi muud punktiväärilist ei olnud, siis andsime ühe punkti tähelepaneku eest, et kui kohal (i, j) on kas 1, 0,5 või 0, siis kohal (j, i) on vastavalt kas 0, 0,5 või 1.