Piirkonnavoor 2016

Eesti LXIII matemaatikaolümpiaad

30. jaanuar 2016 Piirkonnavoor **7. klass**

I osa. *Lahendamisaegа on 40 minutit.*
Sellele lehele kirjuta ainult vastused, lahendamiseks võid kasutada lisapaberit.
Iga ülesande õige vastus annab 2 punkti.
Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.

1. Leia arvu 12345677777777654321 numbrite summa.

. . . .

2. Leia arvu 2016 suurim paarituarvuline jagaja.

. . . .

3. Tabeli igas reas ja igas veerus peaks kolme arvu summa olema 1. Mõned arvud on juba kantud tabelisse. Milline arv peaks olema tabeli keskmises ruudus?

7		
		-2
	6	-7

. . . .

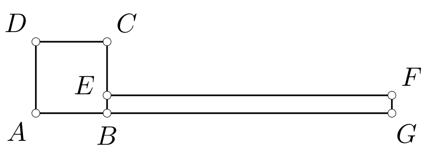
4. Kert asus leiutama uut arvude rida. Esimeseks arvuks valis ta arvu 2. Iga järgneva arvu sai ta siis, kui lahutas arvust 1 viimati kirjutatud arvu pöördarvu. Milline oli kahekümnes arv selles reas?

. . . .

5. Multikaid näidati eile alates kella 16.20-st kuni kella 20.16-ni. Iga multikas kestis täpselt 16 minutit ja iga kahe multika vahel oli täpselt 4 minutit reklaami. Mitu multikat eile näidati?

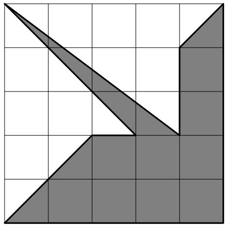
. . . .

6. Ruudu $ABCD$ ja ristküliku $EFGB$ pindalad on 36 cm^2. Lõigu EF pikkus on võrdne ruudu $ABCD$ ümbermõõduga. Leia lõigu FG pikkus.



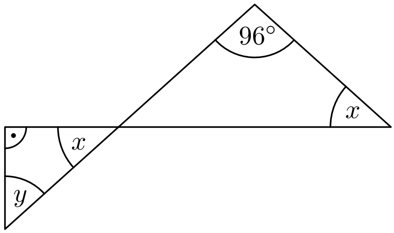
. . . .

7. Ruudustiku kogupindala on $25\ \mathrm{cm}^2$. Leia tumedaks värvitud kujundi pindala.



. . . .

8. Leia tähega y tähistatud nurga suurus, kui tähega x tähistatud nurgad on omavahel võrdse suurusega.



. . . .

9. Pitsa jaotati seitsmeks tükiks nii, et 6 tükki olid võrdsed ning seitsmes tükk moodustas $\frac{1}{3}$ osa kogu pitsast. Kui suure osa pitsast moodustas kõige väiksem lõigatud tükkidest?

. . . .

10. Juku märkis ringjoonele 7 punkti ja joonestas kõik neid punkte paarikaupa ühendavad kõõlud. Osutus, et kolm neist olid sama pikad kui selle ringjoone diameeter. Mitu tõmmatud kõõlu olid diameetrist lühemad?

. . . .

Eesti LXIII matemaatikaolümpiaad

30. jaanuar 2016 Piirkonnavoor **8. klass**

I osa. *Lahendamisaega on 40 minutit.*
Sellele lehele kirjuta ainult vastused, lahendamiseks võid kasutada lisapaberit.
Iga ülesande õige vastus annab 2 punkti.
Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.

1. Leia arvu 80818283848586878889 8 numbrite summa.

....

2. Kell 18.00 oli välistemperatuur $-5\,^\circ$C. Ilmaennustus hoiatas, et lähema 10 tunni jooksul võib temperatuur langeda iga tunniga $2\,^\circ$C võrra. Mis kell selle ennustuse kohaselt oleks temperatuur $-19\,^\circ$C?

....

3. Leia naturaalarv k, kui

$$k = \frac{20162016}{2} - \frac{20162016}{4} - \frac{20162016}{8}.$$

....

4. Üheksa naturaalarvu $1, 2, 3, \ldots, 9$ seast tuleks kustutada üks nii, et ülejäänud kaheksa arvu vähim ühiskordne oleks võimalikest vähim. Milline arv tuleks kustutada?

....

5. Leia jääk, mis tekib, kui jagada summa

$$2016^3 + 2016^2 + 2016^1 + 2016^0$$

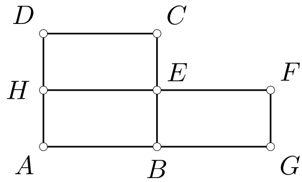
arvuga 9.

....

6. Kõigile jooksujalatsitele kehtis soodustus 20% tavahinnast. Kati ostis ühed soodustusega jalatsid ja maksis 16 eurot tavahinnast vähem. Kui palju Kati maksis oma jalatsite eest?

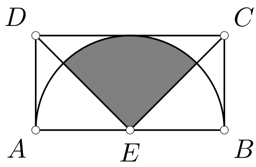
. . . .

7. Ruudu $ABCD$ ja ristküliku $HAGF$ pindalad on 36 cm^2. Punkt H on lõigu AD keskpunkt. Leia kuusnurga $AGFECD$ ümbermõõt.



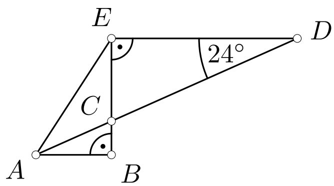
. . . .

8. Ristkülikusse $ABCD$ on joonestatud poolring diameetriga AB ja keskpunktiga E. Poolring puutub külge DC. Leia tumedaks värvitud kujundi täpne pindala, kui ristküliku $ABCD$ pindala on 32 cm^2.



. . . .

9. Punkt C on lõikude AD ja EB lõikepunkt. Kolmnurk ACE on võrdhaarne. Leia nurga EAB suurus.



. . . .

10. Jukul oli musta pliiatsiga joonestatud ringjoon ja sellele sama värvi pliiatsiga tõmmatud üks diameeter. Punase pliiatsiga tõmbas Juku veel neli selle ringjoone diameetrit ja märkis punasega ka nende diameetrite otspunktid. Maksimaalselt mitu sellist punaseid ringjoone punkte ühendavat kõõlu saab ta tõmmata, mis ei lõikuks musta diameetriga?

. . . .

Eesti LXIII matemaatikaolümpiaad

30. jaanuar 2016 Piirkonnavoor **9. klass**

I osa. *Lahendamisaega on 40 minutit.*
Sellele lehele kirjuta ainult vastused, lahendamiseks võid kasutada lisapaberit.
Iga ülesande õige vastus annab 2 punkti.
Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.

1. Leia arvu 1929939994999959999969999997999999 numbrite summa.

....

2. Kui n^* on arvu n kõikide paaritute jagajate summa, siis millega võrdub $20^* + 16^*$?

....

3. Leia täisarv k, kui

$$k = \frac{2016 \cdot 2017^2 - 2016 \cdot 2015^2}{2016^2}.$$

....

4. Korrutada võib ainult sellist kahte tabelisse kirjutatud arvu, mis asuvad naaberruutudes (ühist külge omavad ruudud). Mitu sel viisil saadud korrutist on väiksemad arvust 6^4?

2^5	3^6	2^4
3^5	2^3	3^7
2^6	3^4	2^2

....

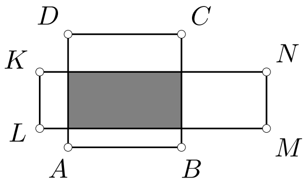
5. Kalle tellis netipoest tahvelarvuti, mille eest ta tasus koos saatekuluga 180 eurot. Kui saatekulu oleks olnud 3 korda suurem, oleks tal tulnud tasuda 240 eurot. Kui palju tulnuks Kallel tasuda siis, kui saatekulu oleks olnud 3 korda väiksem?

....

6. Kui palju on selliseid naturaalarve x, mille korral on avaldise $18 + \frac{19 - x}{2}$ väärtus suurem avaldise $6 - \frac{x - 7}{2}$ väärtusest ning kehtib $0 < x \leqslant 99$?

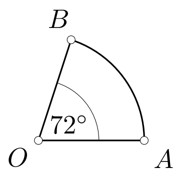
. . . .

7. Ruudu $ABCD$ ja ristküliku $KLMN$ pindalad on 36 cm^2. Leia tumedaks värvitud ristküliku pindala, kui ristküliku $KLMN$ pikkuse ja laiuse suhe on 4.



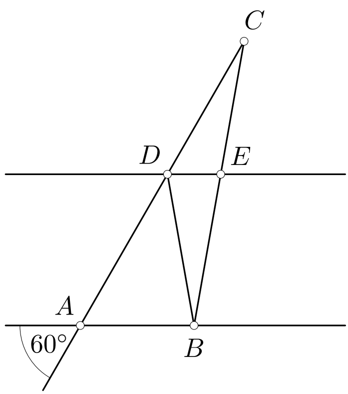
. . . .

8. Ringi sektori AOB pindala on $1{,}8\pi$ cm^2 ja kesknurga AOB suurus on 72°. Leia kaare AB täpne pikkus sentimeetrites.



. . . .

9. Sirged DE ja AB on paralleelsed. Sirged AD ja BE lõikuvad punktis C ning kehtivad võrdused $|DB| = |DC| = |BE|$. Leia nurga DCE suurus.



. . . .

10. Tarmo paigutas ringjoonele 9 erinevat punkti nii, et saaks tõmmata läbi nende punktide võimalikult palju selliseid erinevaid kõõle, mis läbiksid ringjoone keskpunkti. Maksimaalselt kui palju saab ta nende punktide vahele tõmmata erinevaid kõõle, mis ei läbi ringjoone keskpunkti?

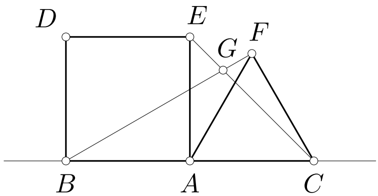
. . . .

Eesti LXIII matemaatikaolümpiaad

30. jaanuar 2016 Piirkonnavoor **7. klass**

II osa. *Lahendamisaega on 2 tundi.*
Ülesannete lahendused kirjuta eraldi lehele.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti. Ainult vastusest ei piisa!
Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.

1. Ruudu $ABDE$ ja võrdkülgse kolmnurga ACF küljed BA ja AC asuvad ühel sirgel ning on mõlemad pikkusega 1 meeter. Sirged EC ja BF lõikuvad punktis G. Leia nurga EGB suurus.



2. Jüri sõitis jalgrattaga 2 km kiirusega 20 km/h ja seejärel 8 km kiirusega 40 km/h. Ka Mari läbis jalgrattaga kogu selle teekonna, kuid ühtlasel kiirusel ning tal kulus selleks $\frac{1}{3}$ võrra rohkem aega kui Jüril. Leia Mari sõidukiirus.

3. Nelja täisarvu, a, b, c ja d kohta on teada, et

1) korrutis abc jagub 9-ga, aga ei jagu 27-ga;
2) korrutis bcd jagub 3-ga, aga ei jagu 9-ga;
3) korrutis acd jagub 9-ga, aga ei jagu 27-ga.

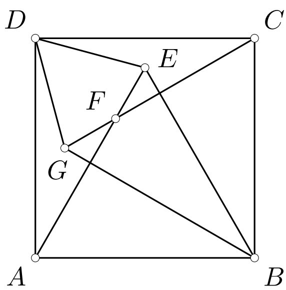
Millised neist neljast arvust a, b, c ja d jaguvad 3-ga?

Eesti LXIII matemaatikaolümpiaad

30. jaanuar 2016 Piirkonnavoor **8. klass**

II osa. *Lahendamisaega on 2 tundi.*
Ülesannete lahendused kirjuta eraldi lehele.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti. Ainult vastusest ei piisa!
Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.

1. Ruudus $ABCD$ asuvad võrdkülgsed kolmnurgad ABE ja BCG. Leia nelinurga $DEFG$ nurkade suurused.



2. Ärimehel oli pangaarvel x eurot ja y senti, kusjuures arv x jagus 7-ga ja arv y jagus 3-ga. Kui ta oli ostu eest tasunud 77 eurot ja 22 senti, jäi ta pangaarvele y eurot ja x senti. Kui palju jäi ta arvele raha?

3. Maanteel sõitis reka pikkusega 15,5 meetrit ühtlase kiirusega 80 km/h. Talle järgnes sõiduauto ühtlase kiirusega 100 km/h. Ühel hetkel oli nendevaheline kaugus 15 meetrit, 9 sekundi pärast aga oli sõiduauto möödunud rekast ja nendevaheline kaugus oli taas 15 meetrit. Mitu sekundit möödus sellest hetkest, mil autode tagatuled olid kohakuti, kuni selle hetkeni, mil autode esituled olid kohakuti?

Eesti LXIII matemaatikaolümpiaad

30. jaanuar 2016 Piirkonnavoor **9. klass**

II osa. *Lahendamisaega on 4 tundi.*
Ülesannete lahendused kirjuta eraldi lehele.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti. Ainult vastusest ei piisa!
Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.

1. Naturaalarvud 1 kuni 10 kirjutatakse mingis järjestuses ritta. Ütleme, et arv on *ilus*, kui tal on reas järgmise arvuga ühest suurem ühistegur. Leia suurim võimalik ilusate arvude arv.

2. Koolivaheajal luges Mari läbi hulga kirjandusteoseid. Neist ühed olid teaduslik fantastika, teised olid seiklusjutud maalt ja merelt, kõik ülejäänud aga olid põnevad mõrvalood. Kui Mari oleks lugenud lisaks veel seiklusjutte arvul, mis on kahe võrra suurem loetud teadusliku fantastika teoste arvust, siis oleks ta lugenud teadusliku fantastika teoseid ja seiklusjutte kokku täpselt kaks korda rohkem kui tegelikult. Tõesta, et kui Mari oleks lugenud lisaks hoopis kaks korda rohkem mõrvalugusid kui ta luges seiklusjutte, aga pooled Mari poolt tegelikult loetud mõrvalood oleksid olnud seiklusjutud, siis oleks Mari loetud mõrvalugude arv olnud kahe võrra suurem kui seiklusjuttude arv.

3. Täisnurkse trapetsi $ABCD$ alustega ristuva haara AD keskpunkt on M. Punktist M sirgele BC tõmmatud ristlõigu aluspunkt on F. Lõigu MF pikkus on pool haara AD pikkusest. Tõesta, et kolmnurk BMC on täisnurkne.

4. Kaks tantsijat alustab rivitantsu. Saatelaulu teise salmi algul astub kolmas tantsija nende vahele, nii et moodustub kolmene rivi. Samamoodi astub iga järgmise salmi algul iga kahe rivis järjestikku asuva tantsija vahele üks uus tantsija. Mitu tantsijat on rivis kümnenda salmi ajal?

Eesti LXIII matemaatikaolümpiaad

30. jaanuar 2016 Piirkonnavoor **10. klass**

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.

1. a) Kas arv 222000111666 jagub arvuga 33?

b) Kas arv 201620162016 jagub arvuga 33?

2. Mihkel kõnnib hommikuti ühtlase kiirusega kodust kooli 20 minutiga ja jõuab kohale 5 minutit enne tundide algust. Ühel päeval, olles täpselt poolel teel, avastab ta, et on oma nutitelefoni koju unustanud. Kas tal on võimalik oma telefon kodust ära tuua ja õigeks ajaks tundi jõuda, kui ta jooksukiirus on 2 korda suurem kui kõndimiskiirus?

3. Kas on võimalik valida n positiivset täisarvu, mille summa võrdub nende arvude vähima ühiskordsega, kui

a) $n = 2$?

b) $n = 3$?

4. Kas võrrandil

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 3 + xy + yz + zw$$

leidub lahend, mille korral x, y, z ja w on kõik erinevad täisarvud?

5. Tasandil on kolmnurk ABC. Väljaspool kolmnurka ABC paiknev ringjoon keskpunktiga A' puutub nurga BAC mõlemat haara ja kolmnurga külge BC. Väljaspool kolmnurka ABC paiknev ringjoon keskpunktiga B' puutub nurga CBA mõlemat haara ja kolmnurga külge CA. Väljaspool kolmnurka ABC paiknev ringjoon keskpunktiga C' puutub nurga ACB mõlemat haara ja kolmnurga külge AB. Tõesta, et kolmnurga $A'B'C'$ kõrguste lõikepunkt asub kolmnurga ABC siseringjoone keskpunktis.

6. Kuuekorruselise hoone kõik korrused koosnevad ühesuurustest ruudukujulise põrandapinnaga tubadest, iga korruse toad on paigutatud ühtviisi 6×6 tabelina. Iga kahe naabertoa vahelises seinas on uks ja iga kahe üksteise peal paikneva toa vahel läheb trepp. Kas ehitusjärelvalve inspektoril on võimalik see hoone läbi käia, külastades iga tuba täpselt ühe korra ja jõudes lõpuks tagasi tuppa, kust alustas?

Eesti LXIII matemaatikaolümpiaad

30. jaanuar 2016 Piirkonnavoor **11. klass**

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.

1. Juku isa brutopalk võrdub 20-kordse tulumaksuvaba miinimumiga, Juku ema brutopalk aga vaid 2-kordse tulumaksuvaba miinimumiga. Pärast aastast teenistust kaotas isa töö ja on edaspidi sissetulekuta. Kui kaua peab ema pärast isa töökaotust endise palga eest edasi töötama, et vaadeldava perioodi (alates päevast, mil isa tööle asus) keskmine netosissetulek oleks emal ja isal võrdsed, eeldusel et tulumaksumäär on püsivalt 20% ning tulumaksuvaba miinimum vaadeldava perioodi jooksul ei muutu?

Märkus. Tulumaksuvaba miinimum on palga osa, millest ei võeta tulumaksu. *Brutopalk* ja *netopalk* on vastavalt palk enne ja pärast tulumaksu mahavõtmist. Töötuskindlustusmaksu ja pensionisammastega mitte arvestada.

2. Korrapärase kuusnurga $ABCDEF$ tipud asuvad ringjoonel raadiusega 1. Leia vektori $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF}$ pikkus.

3. Kas leiduvad erinevad positiivsed täisarvud a ja b, mille korral summa $a + b + \text{SÜT}(a, b)$ on üle 2 korra suurem kui kumbki arvudest a ja b?

4. Ruutvõrrandil $x^2 + px + q = 0$ on kaks erinevat täisarvulist lahendit. Tõesta, et juurvõrrandil

$$\sqrt{x^2 + px + q} = \left|x + \frac{p}{2}\right| - \frac{1}{2}$$

on kaks erinevat reaalarvulist lahendit.

5. Olgu u ja v positiivsed reaalarvud, $u > v$. Tasandil valitakse punktid O, A, B, P ja Q nii, et lõigud OA ja OB on võrdse pikkusega u ning nelinurk $APBQ$ on romb küljepikkusega v. Tõesta, et $|OP| \cdot |OQ| = u^2 - v^2$.

6. Koordinaattasandil on ring raadiusega 100. Tõesta, et selle ringi sees asub rohkem kui 30000 punkti, mille mõlemad koordinaadid on täisarvud.

Eesti LXIII matemaatikaolümpiaad

30. jaanuar 2016 Piirkonnavoor **12. klass**

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.

1. Geomeetrilise jada esimese 20 liikme summa on 20 korda väiksem kui järgmise 40 liikme summa. Mitu korda on selle jada esimese 30 liikme summa väiksem kui järgmise 60 liikme summa?

2. Kas arvu 6 logaritm alusel 10 on suurem või väiksem arvust $\frac{7}{9}$?

3. Leia suurim võimalik naturaalarv n, mille korral on võimalik valida algarvud (mitte tingimata erinevad) $p_1, p_2, \ldots, p_n$ nii, et arvud

$$p_1, \quad p_1 + p_2, \quad \ldots, \quad p_1 + p_2 + \ldots + p_n$$

on samuti algarvud.

4. Olgu α, β, γ kolmnurga nurgad. Tõesta, et

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = 1.$$

5. Nelinurga $ABCD$ tipud paiknevad ühel ringjoonel raadiusega 1. Leia selle nelinurga suurim võimalik pindala.

6. Paberile kirjutatakse n erinevat positiivset täisarvu, kus $n > 1$. Seejärel moodustatakse kõikvõimalikud paarid (a, b), kus a ja b on mingid paberil olevad arvud. Tõesta, et rohkem kui pooltel neist paaridest on liikmete summa suurem kui n.

Märkus. Kui $a \neq b$, siis loetakse paarid (a, b) ja (b, a) erinevateks.

LXIII Олимпиада Эстонии по математике

30 января 2016 г. Региональный тур **7 класс**

I часть. *Время, отводимое для решения: 40 минут.*
На этом листке написать только ответы, для решения можно использовать дополнительную бумагу.
Верный ответ каждой задачи даёт 2 балла.
Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.

1. Найти сумму цифр числа 12345677777654321.

. . . .

2. Найти наибольший нечётный делитель числа 2016.

. . . .

3. Сумма трёх чисел в каждом ряду и в каждом столбце таблицы должна быть равна 1. Некоторые числа уже записаны в таблицу. Какое число должно быть записано в центральной клетке таблицы?

7		
		-2
	6	-7

. . . .

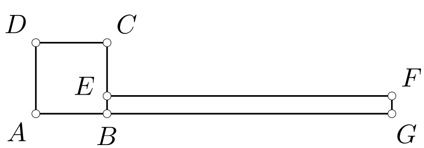
4. Костя стал придумывать новый числовой ряд. Первым числом ряда он поставил число 2. Каждым следующим числом своего ряда он ставил число, которое получалось при вычитании из числа 1 числа, обратного последнему записанному числу. Какое число оказалось в этом ряду двадцатым?

. . . .

5. Вчера мультики начали показывать, когда время на часах было 16.20, и закончили показ в 20.16. Каждый мультик длился ровно 16 минут, и между каждыми двумя мультиками ровно 4 минуты показывали рекламу. Сколько мультиков вчера показали?

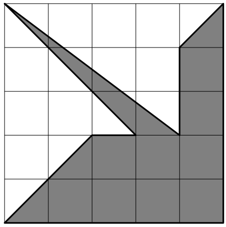
. . . .

6. Площади квадрата $ABCD$ и прямоугольника $EFGB$ равны 36 см^2. Длина отрезка EF равна периметру квадрата $ABCD$. Найти длину отрезка FG.



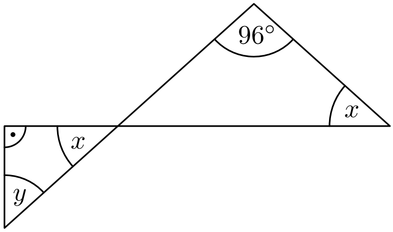
. . . .

7. Площадь всей клетчатой доски на рисунке равна 25 см^2. Найти площадь фигуры, покрашенной в тёмный цвет.



. . . .

8. Найти величину угла, обозначенного буквой y, если величины обозначенных буквой x углов равны.



. . . .

9. Пиццу поделили на семь кусочков так, что 6 кусочков были равны между собой, а седьмой кусочек составлял $\frac{1}{3}$ часть от целой пиццы. Какую часть от целой пиццы составлял наименьший из полученных кусочков?

. . . .

10. Эдик обозначил на окружности 7 точек, и для любой пары обозначенных точек он начертил соединяющую эти точки хорду. Оказалось, что из всех начерченных хорд три хорды имели длину, равную длине диаметра данной окружности. Сколько он начертил таких хорд, которые оказались короче диаметра данной окружности?

. . . .

I часть. *Время, отводимое для решения: 40 минут.*
На этом листке написать только ответы, для решения можно использовать дополнительную бумагу.
Верный ответ каждой задачи даёт 2 балла.
Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.

1. Найти сумму цифр числа 808182838485868788898.

. . . .

2. Сейчас на часах 18.00, а температура воздуха на улице $-5\,^\circ$C. Только что служба прогноза погоды сообщила, что в течение ближайших 10 часов температура воздуха может за час понижаться на $2\,^\circ$C. В который час по этому прогнозу температура воздуха может стать $-19\,^\circ$C?

. . . .

3. Найти натуральное число k, если

$$k = \frac{20162016}{2} - \frac{20162016}{4} - \frac{20162016}{8}.$$

. . . .

4. Среди девяти натуральных чисел $1, 2, 3, \ldots, 9$ нужно стереть одно число так, чтобы наименьшее общее кратное оставшихся восьми чисел было наименьшим возможным. Какое число нужно стереть?

. . . .

5. Найти остаток, который получится при делении суммы

$$2016^3 + 2016^2 + 2016^1 + 2016^0$$

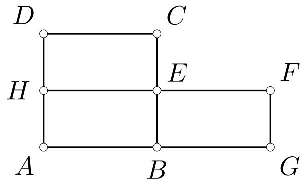
на число 9.

. . . .

6. На покупку любых кроссовок распространялась скидка 20% от обычной цены. Катя купила одну пару кроссовок и заплатила за них на 16 евро меньше их обычной цены. Сколько заплатила Катя за купленные кроссовки?

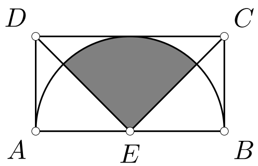
. . . .

7. Площади квадрата $ABCD$ и прямоугольника $HAGF$ равны 36 см^2. Точка H является серединой отрезка AD. Найти периметр шестиугольника $AGFECD$.



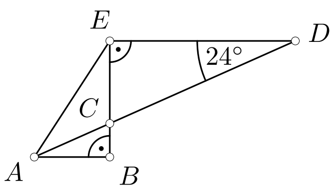
. . . .

8. Внутри прямоугольника $ABCD$ нарисована полуокружность с диаметром AB и центром E. Полуокружность касается стороны DC. Найти точную площадь покрашенной в тёмный цвет фигуры, если площадь прямоугольника $ABCD$ равна 32 см^2.



. . . .

9. Точка C является точкой пересечения отрезков AD и EB. Треугольник ACE равнобедренный. Найти величину угла EAB.



. . . .

10. Сначала Ваня чёрным карандашом нарисовал окружность и тем же карандашом начертил один её диаметр. Затем красным карандашом он начертил ещё четыре диаметра этой окружности и также красным цветом обозначил крайние точки этих диаметров. Какое наибольшее число хорд этой окружности может теперь начертить Ваня так, чтобы каждая хорда соединяла две красные точки окружности и не пересекала чёрный диаметр?

. . . .

LXIII Олимпиада Эстонии по математике

30 января 2016 г. Региональный тур **9 класс**

I часть. *Время, отводимое для решения: 40 минут.*
На этом листке написать только ответы, для решения можно использовать дополнительную бумагу.
Верный ответ каждой задачи даёт 2 балла.
Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.

1. Найти сумму цифр числа 19299399949999599999699999979999999.

. . . .

2. Если n^* является суммой всех нечётных делителей числа n, то чему равно $20^* + 16^*$?

. . . .

3. Найти целое число k, если

$$k = \frac{2016 \cdot 2017^2 - 2016 \cdot 2015^2}{2016^2}.$$

. . . .

4. Перемножать можно только такие два записанные в таблицу числа, которые записаны в соседних клетках (то есть в клетках, имеющих общую сторону). Сколько из полученных таким образом произведений меньше числа 6^4?

2^5	3^6	2^4
3^5	2^3	3^7
2^6	3^4	2^2

. . . .

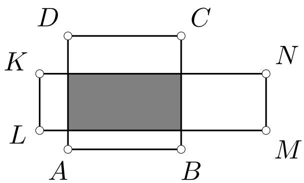
5. Коля из интернет-магазина заказал планшет, за который он вместе с платой за пересылку заплатил всего 180 евро. Если бы плата за пересылку была в 3 раза больше, то ему пришлось бы заплатить 240 евро. Сколько бы Коле нужно было заплатить, если бы плата за пересылку была в 3 раза меньше?

. . . .

6. Сколько всего таких натуральных чисел x, при которых значение выражения $18+\dfrac{19-x}{2}$ больше значения выражения $6-\dfrac{x-7}{2}$ при условии, что $0 < x \leqslant 99$?

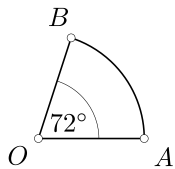
. . . .

7. Площади квадрата $ABCD$ и прямоугольника $KLMN$ равны 36 см^2. Найти площадь покрашенного в тёмный цвет прямоугольника, если отношение длины и ширины прямоугольника $KLMN$ равно 4.



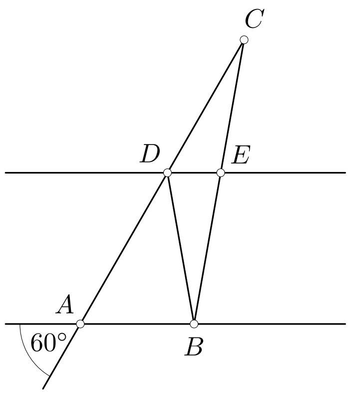
. . . .

8. Площадь сектора AOB равна $1{,}8\pi$ см^2, а величина его центрального угла AOB равна 72°. Найти точную длину дуги AB в сантиметрах.



. . . .

9. Прямые DE и AB параллельны. Прямые AD и BE пересекаются в точке C, и действует равенство $|DB| = |DC| = |BE|$. Найти величину угла DCE.



. . . .

10. Тимур обозначил на окружности 9 различных точек так, чтобы, попарно соединяя эти точки, можно было провести как можно больше хорд, проходящих через центр данной окружности. Какое наибольшее количество различных хорд он может при данном выборе точек провести так, чтобы каждая проведённая хорда соединяла обозначенные на окружности точки и не проходила через центр окружности?

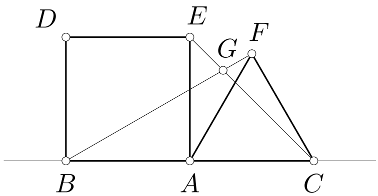
. . . .

LXIII Олимпиада Эстонии по математике

30 января 2016 г. Региональный тур **7 класс**

II часть. *Время, отводимое для решения: 2 часа.*
Решения задач написать на отдельном листе.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов. Написать только ответ недостаточно!
Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.

1. Сторона BA квадрата $ABDE$ и сторона AC равностороннего треугольника ACF находятся на одной прямой и равны обе 1 метру. Прямые EC и BF пересекаются в точке G. Найти величину угла EGB.



2. Юра проехал на велосипеде 2 км со скоростью 20 км/ч, а после этого ещё 8 км со скоростью 40 км/ч. Маша проехала на велосипеде такой же весь путь, но с равномерной скоростью, потратив на это на $\frac{1}{3}$ больше времени чем Юра. Найти скорость движения Маши.

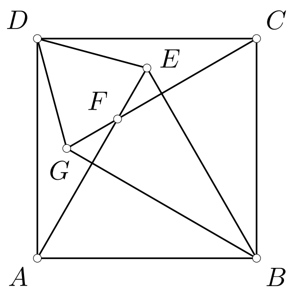
3. Про четыре целых числа a, b, c и d известно, что

1) произведение abc делится на 9, но не на 27;
2) произведение bcd делится на 3, но не на 9;
3) произведение acd делится на 9, но не на 27.

Какие из этих четырёх чисел a, b, c и d делятся на 3?

II часть. *Время, отводимое для решения: 2 часа.*
Решения задач написать на отдельном листе.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов. Написать только ответ недостаточно!
Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.

1. Внутри квадрата $ABCD$ расположены равносторонние треугольники ABE и BCG. Найти величины углов четырёхугольника $DEFG$.



2. На банковском счету бизнесмена было x евро и y центов, причём число x делилось на 7, а число y делилось на 3. После того, как он заплатил за покупку 77 евро и 22 цента, на счету у него осталось y евро и x центов. Сколько денег осталось у него на счету?

3. Фура длиной 15,5 метров ехала по шоссе с равномерной скоростью 80 км/ч. За ней следовала легковушка с равномерной скоростью 100 км/ч. В один момент расстояние между ними было 15 метров, 9 секунд спустя легковушка уже обогнала фуру, и расстояние между ними снова стало 15 метров. Сколько секунд прошло с того момента, как машины поравнялись задними фарами, до того момента, как машины поравнялись передними фарами?

LXIII Олимпиада Эстонии по математике

30 января 2016 г. Региональный тур **9 класс**

II часть. *Время, отводимое для решения: 4 часа.*
Решения задач написать на отдельном листе.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов. Написать только ответ недостаточно!
Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.

1. Натуральные числа от 1 до 10 записаны в каком-то порядке в ряд. Назовём число *красивым*, если у этого числа со следующим в ряду числом есть общий делитель больше единицы. Найти наибольшее возможное количество красивых чисел.

2. За время школьных каникул Маша прочитала ряд книг. Одни из них были научной фантастикой, другие приключениями на море и на суше, а все остальные были детективами. Если бы Маша прочитала в дополнение столько приключений, что дополнительно прочитано было бы на две книги больше, чем книг из научной фантастики, то приключений и научной фантастики она бы прочитала в сумме ровно в два раза больше, чем прочитала их в действительности. Доказать, что если бы вместо этого Маша прочитала дополнительно в два раза больше детективов, чем прочитала в действительности приключений, а половина детективов, реально прочитанных Машей, были бы приключениями, то количество детективов, прочитанных Машей, было бы на два больше количества приключений.

3. Точка M – середина перпендикулярной основаниям боковой стороны AD прямоугольной трапеции $ABCD$. Точка F – основание перпендикуляра, опущенного из точки M на прямую BC. Длина отрезка MF равна половине длины боковой стороны AD. Доказать, что треугольник BMC прямоугольный.

4. Два танцора начинают танцевать танец в шеренгу. Перед началом второго куплета песни между ними встраивается третий танцор, так что образуется шеренга из трёх человек. Таким же образом перед началом каждого следующего куплета между каждыми двумя соседними танцорами в шеренге встратривается ещё один новый танцор. Сколько всего танцоров в шеренге во время десятого куплета?

LXIII Олимпиада Эстонии по математике

30 января 2016 г. Региональный тур **10 класс**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.

1. а) Делится ли число 222000111666 на 33?

б) Делится ли число 201620162016 на 33?

2. По утрам Миша доходит с равномерной скоростью из дома до школы за 20 минут и приходит при этом на 5 минут раньше начала уроков. Однажды утром ровно на полпути он обнаруживает, что забыл свой смартфон дома. Успеет ли он забрать свой смартфон из дома и вовремя попасть на занятия, если бегает он в 2 раза быстрее, чем ходит?

3. Можно ли подобрать такие n положительных целых чисел, чтобы их сумма равнялась их же наименьшему общему кратному, если

а) $n = 2$?

б) $n = 3$?

4. Существует ли такое решение уравнения

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 3 + xy + yz + zw,$$

при котором x, y, z и w различные целые числа?

5. На плоскости расположен треугольник ABC. Окружность с центром в точке A', лежащая вне треугольника ABC, касается обеих сторон угла BAC, а также сторону треугольника BC. Окружность с центром в точке B', лежащая вне треугольника ABC, касается обеих сторон угла CBA, а также сторону треугольника CA. Окружность с центром в точке C', лежащая вне треугольника ABC, касается обеих сторон угла ACB, а также сторону треугольника AB. Доказать, что точка пересечения высот треугольника $A'B'C'$ является центром окружности, вписанной в треугольник ABC.

6. На каждом этаже шестиэтажного дома комнаты, все одинакового размера и с одинаковой квадратной формой пола, расположены в виде таблицы 6×6. В стене между каждыми двумя соседними комнатами есть дверь, а между комнатами, находящимися друг над другом, есть лестница. Может ли инспектор обойти всё здание, посещая каждую комнату ровно один раз так, чтобы вернуться в ту же комнату, откуда он начал?

LXIII Олимпиада Эстонии по математике

30 января 2016 г. Региональный тур **11 класс**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.

1. Зарплата брутто отца Юры составляла 20-кратный не облагаемый налогом минимум, а брутто-зарплата его матери была лишь в 2 раза больше не облагаемого налогом минимума. После одного года работы отец остался безработным и не имеет в дальнейшем доходов. Как долго после потери работы отца должна мать Юры продолжать работать за свою прежнюю зарплату, чтобы средний нетто-доход родителей за рассматриваемый период (начиная со дня, как отец устроился на работу) был о обоих родителей одинаков, полагая, что уровень подоходного налога равен постоянно 20%, а необлагаемый налогом минимум за рассматриваемый период не меняется?

Примечание. Не облагаемый налогом минимум – это часть зарплаты, из которой не берётся подоходный налог. *Заплата брутто* и *зарплата нетто* – это, соответственно, зарплата до и после вычита налогов. Налог по страхованию от безработицы и взносы в пенсионные фонды не учитывать.

2. Вершины правильного шестиугольника $ABCDEF$ расположены на окружности радиусом 1. Найти длину вектора $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF}$.

3. Найдутся ли различные положительные целые числа a и b, при которых сумма $a + b + \text{НОД}(a, b)$ более чем в 2 раза больше каждого из чисел a и b?

4. У квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$ имеется два различных целочисленных решения. Доказать, что у уравнения

$$\sqrt{x^2 + px + q} = \left|x + \frac{p}{2}\right| - \frac{1}{2}$$

имеется два различных решения в действительных числах.

5. Пусть u и v – положительные действительные числа, $u > v$. На плоскости выбирают точки O, A, B, P и Q так, что отрезки OA и OB имеют равную длину u, а четырёхугольник $APBQ$ является ромбом с длиной стороны v. Доказать, что $|OP| \cdot |OQ| = u^2 - v^2$.

6. На координатной плоскости расположен круг радиуса 100. Доказать, что внутри этого круга находится больше чем 30000 точек, обе координаты которых – целые числа.

LXIII Олимпиада Эстонии по математике

30 января 2016 г. Региональный тур **12 класс**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.

1. Сумма первых 20 членов геометрической прогрессии в 20 раз меньше, чем сумма следующих 40 членов. Во сколько раз сумма первых 30 членов этой прогрессии меньше, чем сумма следующих 60 членов?

2. Которое из чисел больше: $\frac{7}{9}$ или логарифм числа 6 по основанию 10?

3. Найти наибольшее возможное натуральное число n, при котором можно выбрать простые числа (не обязательно различные) $p_1, p_2, \ldots, p_n$ так, что числа

$$p_1, \quad p_1 + p_2, \quad \ldots, \quad p_1 + p_2 + \ldots + p_n$$

также окажутся простыми.

4. Пусть α, β, γ – углы треугольника. Доказать, что

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = 1.$$

5. Все вершины четырёхугольника $ABCD$ лежат на одной окружности с радиусом 1. Найти наибольшую возможную площадь этого четырёхугольника.

6. На бумаге записываются n различных положительных целых чисел, где $n > 1$. Затем составляются все возможные пары (a, b), где a и b – какие-либо числа с бумаги. Доказать, что более чем в половине таких пар сумма членов пары больше, чем n.

Примечание. Если $a \neq b$, то пары (a, b) и (b, a) считаются различными.

Eesti LXIII matemaatikaolümpiaad

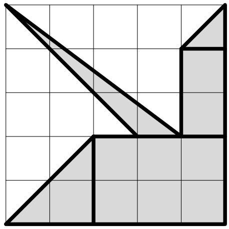
30. jaanuar 2016 | Piirkonnavoor | **7. klass**

I osa vastused

1. 91.
2. 63.
3. 11.
4. 0,5.
5. 12.
6. 1,5 cm.
7. 12 cm^2.
8. $48°$.
9. $\frac{1}{9}$.
10. 18.

Lahendused

1. $(1+6)+(2+5)+(3+4)+7\cdot 7+(6+1)+(5+2)+(4+3)=13\cdot 7=91$.
2. Esitame arvu 2016 algtegurite korrutisena $2016=2^5\cdot 3^2\cdot 7$. Suurim paarituarvuline jagaja on $3^2\cdot 7=63$.
3. Alumises vasakus ruudus peaks olema arv $1-(6+(-7))=2$. Vasakpoolse veeru keskmises ruudus peaks olema arv $1-(7+2)=-8$. Tabeli keskmises ruudus peaks olema arv $1-((-8)+(-2))=11$.
4. Teine arv selles reas on $1-\frac{1}{2}=0{,}5$. Kolmas arv selles reas on $1-\frac{1}{0{,}5}=-1$. Neljas arv selles reas on $1-\frac{1}{-1}=2$. Seega reas korduvad tsükliliselt arvud 2, 0,5 ja -1. Kuna 20 annab 3-ga jagades jäägi 2, siis kahekümnes arv selles reas on 0,5.
5. Ühes tunnis näidati kolm multikat ja kolm tsüklit reklaami. Et multikaid näidati 16.20-st 20.16-ni, st 4 minutit vähem kui 4 tundi ja reklaami pikkus on 4 minutit, siis näidati eile $4\cdot 3=12$ multikat.
6. Ruudu $ABCD$ külje pikkus on 6 cm, ümbermõõt $4\cdot 6$ cm $=24$ cm. Lõigu FG pikkus on 36 cm^2 : 24 cm $=1{,}5$ cm.
7. Väikese ruudu küljepikkus on 1 cm ja pindala 1 cm^2. Jaotame tumedaks värvitud kujundi kolmnurkadeks ja ristkülikuteks (vt joonis 1). Tumedaks värvitud kujundi pindala on $\frac{2\cdot 2}{2}+\frac{1\cdot 3}{2}+\frac{1\cdot 1}{2}+6+2=12$ ruutsentimeetrit.



Joonis 1

8. Tippnurkade võrdsuse tõttu on suurem kolmnurk võrdhaarne ning

$$x = (180^\circ - 96^\circ) : 2 = 42^\circ.$$

Täisnurksest kolmnurgast saame

$$y = 90^\circ - 42^\circ = 48^\circ.$$

9. Et seitsmes tükk moodustas $\frac{1}{3}$ osa pitsast, siis esimesed kuus võrdset tükki kokku moodustasid $\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$ osa pitsast. Pisemad tükid moodustasid kõik pitsast $\frac{1}{9}$ osa.

10. Igast punktist saab tõmmata 6 kõõlu, kuid sel juhul on kõik kõõlud loetud topelt. Seega kõõle on kokku $\frac{7 \cdot 6}{2} = 21$. Kuna diameetrist pikemaid kõõle ei eksisteeri, siis kõik $21 - 3 = 18$ kõõlu olid diameetrist lühemad.

Eesti LXIII matemaatikaolümpiaad

30. jaanuar 2016 Piirkonnavoor **8. klass**

I osa vastused

1. 133.

2. 01.00.

3. 2520252.

4. 7.

5. 1.

6. 64 eurot.

7. 36 cm.

8. 4π cm^2.

9. 57°.

10. 12.

Lahendused

1. $11 \cdot 8 + (0+9) + (1+8) + (2+7) + (3+6) + (4+5) = 88 + 5 \cdot 9 = 133$.

2. Temperatuur langeb $-5 - (-19) = 14$ kraadi võrrra ennustuse kohaselt $14 : 2 = 7$ tunniga ehk kella 01.00-ks.

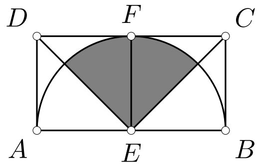
3. $k = 20162016 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right) = 20162016 \cdot \frac{1}{8} = 2520252$.

4. Arvude $1, 2, 3, \ldots, 9$ vähim ühiskordne on $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$. Arvu 9 kustutamisel väheneks vähim ühiskordne 3 korda, arvu 8 kustutamisel väheneks 2 korda, arvu 7 kustutamisel väheneks 7 korda, arvu 5 kustutamisel väheneks 5 korda. Ülejäänud arvude kustutamine vähimat ühiskordset ei mõjuta.

5. Et 2016 jagub 9-ga, siis $2016^3 + 2016^2 + 2016^1$ jagub 9-ga. Arv $2016^0 = 1$ annab jagades jäägi 1.

6. Kuna 16 eurot moodustab 20%, siis tavahind on $16 : 0{,}2 = 80$ eurot. Kati maksis $80 - 16 = 64$ eurot.

7. Ruudu $ABCD$ külje pikkus on $\sqrt{36\ \text{cm}^2} = 6$ cm. Ristküliku külgede pikkused on $|AH| = 6\ \text{cm} : 2 = 3$ cm ning $|AG| = 36\ \text{cm}^2 : 3\ \text{cm} = 12$ cm. Kuusnurga $AGFECD$ ümbermõõt on $12 + 3 + 6 + 3 + 6 + 6 = 36$ sentimeetrit.



Joonis 2

8. Ristküliku pikem külg on lühemast 2 korda pikem, seega lõik EF (vt joonis 2) jaotab ristküliku kaheks ruuduks küljepikkusega

$$|DA| = |AE| = |EB| = |BC| = \sqrt{32\ \text{cm}^2 : 2} = 4\ \text{cm}.$$

Kuna kolmnurgad DAE ja EBC on võrdhaarsed täisnurksed, siis

$$\angle DEA = \angle CEB = 45^\circ.$$

Tumedaks värvitud kujund on ringi sektor kesknurgaga $180^\circ - 2 \cdot 45^\circ = 90^\circ$ ning pindalaga $\dfrac{1}{4} \cdot \pi (4\ \text{cm})^2 = 4\pi\ \text{cm}^2$.

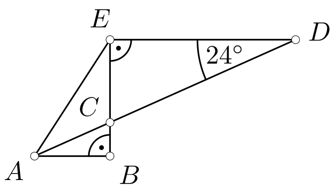
9. *Lahendus 1.* Täisnurksest kolmnurgast DEC avaldame teise teravnurga $\angle ECD = 90^\circ - 24^\circ = 66^\circ$ (vt joonis 3). Kuna $\angle ECD$ on kolmnurga ECA välisnurk, siis $\angle AEC + \angle EAC = 66^\circ$. Kolmnurk ECA on võrdhaarne, seega $\angle AEC = \angle EAC = 66^\circ : 2 = 33^\circ$. Täisnurksest kolmnurgast ABE leiame

$$\angle EAB = 90^\circ - \angle AEB = 90^\circ - \angle AEC = 90^\circ - 33^\circ = 57^\circ.$$

Lahendus 2. Sirged ED ja AB on paralleelesed, sest sirge EB on nende mõlemaga risti. Põiknurkade võrdsuse tõttu $\angle CAB = \angle EDC = 24^\circ$. Täisnurksest kolmnurgast ABE saame, et $\angle EAC + \angle AEC = 90^\circ - 24^\circ = 66^\circ$. Kuna kolmnurk ACE on võrdhaarne, siis $\angle EAC = 66^\circ : 2 = 33^\circ$. Kokkuvõttes

$$\angle EAB = \angle EAC + \angle CAB = 33^\circ + 24^\circ = 57^\circ.$$

10. Mustast diameetrist ühel pool on 4, teisel pool 4 punast punkti. Nelja punkti ühendamiseks saab joonestada 6 kõõlu. Kokku on seega $2 \cdot 6 = 12$ kõõlu.



Joonis 3

I osa vastused

1. 280.

2. 7.

3. 4.

4. 2.

5. 160 eurot.

6. 99.

7. 18 cm^2.

8. 1,2π cm.

9. 20°.

10. 32.

Lahendused

1. Et $1+2+3+4+5+6+7=28$, siis numbrite summa on $28+28\cdot 9=280$.

2. Arvu 20 paaritud jagajad on 1 ja 5, arvu 16 ainus paaritu jagaja on 1. Jagajate summa on $1+5+1=7$.

3. $k=\dfrac{2016\cdot(2017-2015)\cdot(2017+2015)}{2016^2}=\dfrac{2016\cdot 2\cdot(2\cdot 2016)}{2016^2}=4.$

4. Naaberruutudes asuvate arvude korral üks on alati arvu 2 aste ning teine arvu 3 aste. Et $6^4=2^4\cdot 3^4$, tasub vaadelda ainult neid naaberruutude paare, milledes vähemalt ühe arvu astendaja on väiksem kui 4. Arvust 4 väiksemaid astendajaid esineb tabelis ainult kahes kohas. Tabeli keskel asuva arvu 2^3 korrutamisel naaberruutudes asetsevate arvudega on 6^4-st väiksem vaid $2^3\cdot 3^4$. All paremal asuva arvu 2^2 korral on 6^4-st väiksem vaid $2^2\cdot 3^4$.

5. Saatekulu oli $(240-180):2=30$ eurot. Kui saatekulu oleks kolm korda väiksem ehk 10 eurot, tuleks Kallel tasuda $180-30+10=160$ eurot.

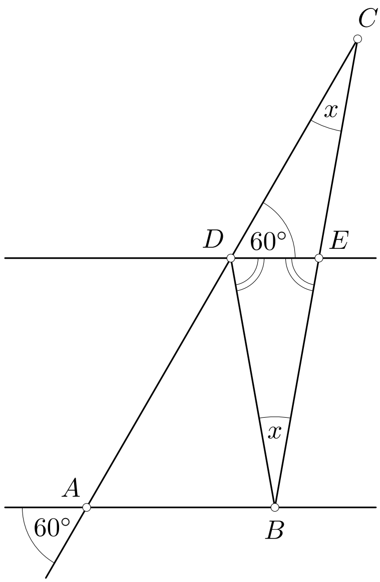
6. Avaldise

$$18+\frac{19-x}{2}=27{,}5-\frac{x}{2}$$

väärtus on iga x väärtuse korral suurem avaldise

$$6-\frac{x-7}{2}=9{,}5-\frac{x}{2}$$

väärtusest, sest nende avaldiste vahe võrdub alati arvuga 18. Piirkonnas $0<x\leqslant 99$ on kokku 99 naturaalarvu.



Joonis 4

7. Ruudu $ABCD$ küljepikkus on $\sqrt{36\ \text{cm}^2} = 6$ cm. Olgu ristküliku $KLMN$ külgede pikkused a ja $4a$, siis võrrandist $4a^2 = 36\ \text{cm}^2$ saame $a = 3$ cm. Tumedaks värvitud ristküliku pindala on $6\ \text{cm} \cdot 3\ \text{cm} = 18\ \text{cm}^2$.

8. Sektor moodustab täisringist $\dfrac{72}{360} = \dfrac{1}{5}$ osa. Olgu $r = |OA|$ ringi raadiuse pikkus. Kuna $\dfrac{1}{5}\pi r^2 = 1{,}8\pi\ \text{cm}^2$, siis $r = 3$ cm. Kaare AB pikkus on $\dfrac{1}{5} \cdot 2\pi r = 1{,}2\pi$ cm.

9. Kuna $AB \parallel DE$, siis tipp- ja põiknurkade võrdsuse tõttu $\angle CDE = 60^\circ$ (vt joonis 4). Olgu $\angle DCE = x$. Võrdusest $|DB| = |DC|$ saame, et kolmnurk BDC on võrdhaarne, seega $\angle DBE = x$. Kuna $\angle DEB$ on kolmnurga DEC välisnurk, võime kirjutada, et $\angle DEB = 60^\circ + x$. Võrdusest $|DB| = |BE|$ saame, et kolmnurk DBE on võrdhaarne, seega $\angle EDB = 60^\circ + x$. Kolmnurga DBE sisenurkade summa on $(60^\circ + x) + x + (60^\circ + x) = 180^\circ$, millest $x = 20^\circ$.

10. Tarmo paigutas punktid nii, et ta sai tõmmata 4 kõõlu, mis läbisid ringjoone keskpunkti. Kuna 9 punkti vahel on võimalik tõmmata $\dfrac{8 \cdot 9}{2} = 36$ kõõlu, siis 32 neist ei läbi ringjoone keskpunkti.

II osa lahendused

1. *Vastus:* 75°.

Lahendus 1. Kolmnurk EAC on täisnurkne võrdhaarne, seega $\angle ECA = 45^\circ$. Kolmnurk BAF on võrdhaarne tipunurgaga $\angle BAF = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ ja alusnurgaga $\angle FBA = (180^\circ - 120^\circ) : 2 = 30^\circ$. Vaatleme nüüd kolmnurka BGC (vt joonis 5). Et otsitav nurk on selle välisnurk, saame

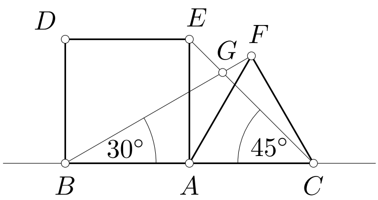
$$\angle EGB = \angle GCB + \angle GBC = \angle ECA + \angle FBA = 45^\circ + 30^\circ = 75^\circ.$$

Lahendus 2. Kolmnurk EAC on täisnurkne võrdhaarne, seega $\angle AEC = 45^\circ$. Kolmnurk BAF on võrdhaarne tipunurgaga $\angle BAF = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ ja alusnurgaga $\angle ABF = (180^\circ - 120^\circ) : 2 = 30^\circ$. Vaatleme nüüd nelinurka $BDEG$. Selles $\angle GBD = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$, $\angle DEG = 90^\circ + 45^\circ = 135^\circ$ ning $\angle EGB = 360^\circ - 60^\circ - 90^\circ - 135^\circ = 75^\circ$.

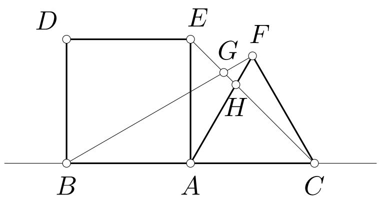
Lahendus 3. Olgu lõikude FA ja EC lõikepunkt H (vt joonis 6). Kolmnurk EAC on täisnurkne võrdhaarne, seega $\angle ECA = 45^\circ$. Kuna $\angle FCA = 60^\circ$, saame avaldada nurga $\angle FCH = 60^\circ - 45^\circ = 15^\circ$ ning kolmnurga FCH välisnurga $\angle FHG = 60^\circ + 15^\circ = 75^\circ$. Et $\angle FAE = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$, siis võrdhaarse kolmnurga BAF alusnurk $\angle BFA = \big(180^\circ - (30^\circ + 90^\circ)\big) : 2 = 30^\circ$. Kolmnurgast GFH leiame nüüd $\angle FGH = 180^\circ - 30^\circ - 75^\circ = 75^\circ = \angle EGB$.

2. *Vastus:* 25 km/h.

Jüri sõitis rattaga 2 km : 20 km/h + 8 km : 40 km/h = 0,3 h. Maril kulus sama maa läbimiseks $0{,}3\ \mathrm{h} \cdot \dfrac{4}{3} = 0{,}4\ \mathrm{h}$. Mari läbis selle maa kiirusega (2 km + 8 km) : 0,4 h = 25 km/h.



Joonis 5



Joonis 6

3. *Vastus:* a ja c.

Lahendus 1. Kuna abc jagub 9-ga, kuid bcd ei jagu 9-ga, siis a algtegurite seas esineb arv 3 sagedamini kui arvu d algtegurite seas, seega a jagub 3-ga. Nüüd on kaks võimalust, kas a jagub ka 9-ga või jagub ta ainult 3-ga. Kui a jaguks 9-ga, siis tingimuste 1 ja 3 põhjal arvud b, c ja d enam 3-ga jaguda ei saa. See oleks aga vastuolu tingimusega 2. Seega a ei jagu 9-ga ning tingimuste 1 ja 3 põhjal korrutised bc ja cd jaguvad 3-ga, kuid ei jagu 9-ga. Kui 3-ga jaguksid b ja d, saaksime vastuolu tingimusega 2. Seega jagub 3-ga c ning arvud b ja d ei jagu 3-ga.

Lahendus 2. Tingimustest 1 ja 3 järeldub, et korrutistes abc ja acd esineb algarv 3 ühel ja samal astmel; et tegurid a ja c on neis korrutistes ühised, esineb 3 arvudes b ja d ka ühel ja samal astmel. Et tingimuse 2 põhjal ei saa b ja d mõlemad 3-ga jaguda, siis ei jagu nad kumbki 3-ga. Järelikult c jagub 3-ga. Tingimuse 1 või 3 põhjal nüüd ka a jagub 3-ga.

II osa lahendused

1. *Vastus:* $\angle DEF = \angle FGD = 75^\circ$, $\angle GDE = 60^\circ$, $\angle EFG = 150^\circ$.

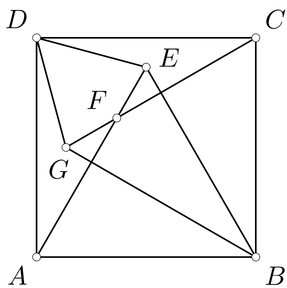
Kolmnurk AEB on võrdkülgne, seega $\angle DAE = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$. Kolmnurk DAE on võrdhaarne, seega $\angle EDA = \angle DEA = (180^\circ - 30^\circ) : 2 = 75^\circ$. Analoogiliselt saab näidata, et $\angle DGC = \angle GDC = 75^\circ$. Tippnurkade võrdsusest saame $\angle EFG = \angle AFC$ ning nelinurga $ABCF$ sisenurkade summa põhjal $\angle EFG = \angle AFC = 360^\circ - 60^\circ - 60^\circ - 90^\circ = 150^\circ$. Nelinurga $DEFG$ sisenurkade summa põhjal $\angle GDE = 360^\circ - 75^\circ - 75^\circ - 150^\circ = 60^\circ$.

2. *Vastus:* 6 eurot 84 senti.

Lahendus 1. Paneme tähele, et x ja y on ülimalt kahekohalised arvud. Enne ostu sooritamist oli ärimehe pangaarvel $100x + y$ senti, pärast ostu sooritamist aga $100y + x$ senti. Saame võrrandi $100x + y - 7722 = 100y + x$ ehk $99x = 7722 + 99y$ ehk $x = 78 + y$. Kuna arv x jagub 7-ga, siis $x = 84$, $x = 91$ või $x = 98$. Vastavalt saame, et $y = 6$, $y = 13$ või $y = 20$. Kuna 3-ga jagub neist vaid esimene, siis $x = 84$ ja $y = 6$ ehk arvele jäi 6 eurot ja 84 senti.

Lahendus 2. Nagu eelmises lahenduses, jõutakse võrrandini $x = 78 + y$. Kuna 78 ja y jaguvad mõlemad 3-ga, siis x jagub 3-ga. Et x jagub ka 7-ga, peab x kokkuvõttes jaguma 21-ga. Ainus 78-st suurem kahekohaline 21-ga jaguv arv on 84. Seega $y = 84 - 78 = 6$. Arvele jäi 6 eurot ja 84 senti.

3. *Vastus:* 1,98.



Joonis 7

Sõiduauto ja reka kiiruste vahe on

$$20\ \mathrm{km/h} = \frac{20000\ \mathrm{m}}{3600\ \mathrm{s}} = \frac{50}{9}\ \mathrm{m/s},$$

st 9 sekundi jooksul liigub sõiduauto 50 meetrit rohkem kui reka. Kuna 9 sekundiga läbib sõiduauto võrreldes rekaga enam 15 meetrit, reka pikkuse, sõiduauto pikkuse ja veel 15 meetrit, siis sõiduauto pikkus on $50 - 15 - 15{,}5 - 15 = 4{,}5$ meetrit. Sellest hetkest, kui autode tagatuled on kohakuti, kuni hetkeni, mil esituled on kohakuti, pidi sõiduauto läbima enam $15{,}5 - 4{,}5 = 11$ meetrit, aega kulus tal selleks

$$11\ \mathrm{m} : \frac{50}{9}\ \mathrm{m/s} = 1{,}98\ \mathrm{s}.$$

II osa lahendused

1. *Vastus:* 7.

Arvudel 1 ja 7 pole teiste ritta kirjutatavate arvudega 1-st suuremaid ühistegureid. Et kumbki arvudest 1 ja 7 asub kõrvuti vähemalt ühe arvuga ning ei ole võimalik, et nad on kõrvuti ainult teineteisega (siis ei saaks teisi arve üldse esineda), siis tekib kindlasti vähemalt 2 erinevat kõrvutiasuvate arvude paari (x, y), mille puhul $\text{SÜT}(x, y) = 1$. Et kõrvutiasuvate arvude paare on kokku 9, ei saa nende seas olla üle 7 paari (x, y), mille korral $\text{SÜT}(x, y) > 1$. Järelikult ei saa reas esineda üle 7 arvu, millel on järgmise arvuga 1-st suurem ühistegur.

Kui arvude järjestus on $5, 10, 2, 4, 8, 6, 3, 9, 7, 1$, siis esimesed 7 arvu omavad järgmisega 1-st suuremat ühistegurit, järgnevad mitte.

2. Olgu loetud teadusliku fantastika teoste, seiklusjuttude ja mõrvalugude arvud vastavalt a, b ja c. Eeldusest saame

$$a + b + (a + 2) = 2(a + b),$$

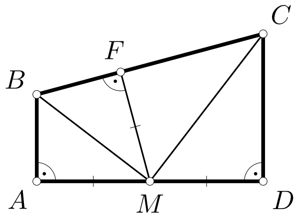
kust lihtsustades saame $b = 2$. Teisalt, kui Mari oleks lugenud lisaks kaks korda rohkem mõrvalugusid kui ta luges seiklusjutte, aga pooled tema poolt tegelikult loetud mõrvalood oleksid olnud seiklusjutud, siis oleks Mari loetud mõrvalugude arv olnud $\frac{c}{2} + 2b$ ja seiklusjuttude arv $\frac{c}{2} + b$. Tõestatav väide avaldub niisiis seosena

$$\frac{c}{2} + 2b = \frac{c}{2} + b + 2,$$

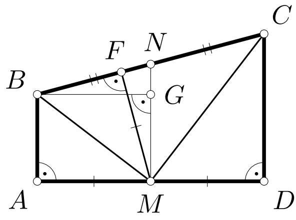
mis juhul $b = 2$ ilmselt kehtib sõltumata arvust c.

3. *Lahendus 1.* Eeldusest tulenevalt $|FM| = \frac{1}{2}|AD| = |AM|$ (vt joonis 8). Kolmnurgad ABM ja FBM on täisnurksed, hüpotenuus BM on ühine ning kaatetid AM ja FM on võrdse pikkusega. Need kolmnurgad on tunnuse KK põhjal võrdsed, mistõttu $\angle BMF = \angle BMA$ ehk $\angle BMF = \frac{1}{2}\angle AMF$. Analoogiliselt saame $\angle CMF = \frac{1}{2}\angle DMF$. Seega

$$\begin{aligned}\angle BMC = \angle BMF + \angle CMF &= \frac{1}{2}\angle AMF + \frac{1}{2}\angle DMF = \\ &= \frac{1}{2}(\angle AMF + \angle DMF) = \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ.\end{aligned}$$



Joonis 8



Joonis 9

Lahendus 2. Eeldusest tulenevalt $|MF| = \frac{1}{2}|AD| = |AM|$. Olgu N haara BC keskpunkt ja G punktist B sirgele MN tõmmatud ristlõigu aluspunkt (vt joonis 9). Et $\angle BGN = 90^\circ = \angle AMN$ ja $AB \parallel MN$, siis $|BG| = |AM| = |MF|$. Kolmnurgad MNF ja BNG on täisnurksed (täisnurgaga vastavalt tippude F ja G juures) ning teravnurk tipu N juures on ühine. Seega on need kolmnurgad sarnased, millest saame $\frac{|MN|}{|BN|} = \frac{|MF|}{|BG|} = 1$ ehk $|MN| = |BN|$. Et ka $|CN| = |BN|$, on N kolmnurga BCM ümberringjoone keskpunkt. Kuid kolmnurga ümberringjoone keskpunkt asub kolmnurga küljel ainult täisnurkses kolmnurgas.

4. *Vastus:* 513.

Lahendus 1. Iga salmi algul tuleb rivvi samapalju uusi tantsijaid kui on seal ees üksteisele järgnevate tantsijate paare. Üksteisele järgnevate tantsijate paare on aga ilmselt ühe võrra vähem kui tantsijaid. Seega kui enne järjekordse salmi algust on rivis n tantsijat, siis selle salmi algul lisandub $n - 1$ uut tantsijat, mistõttu salmi ajal on rivis kokku $2n - 1$ tantsijat. Järgnev tabel näitab tantsijate arvu muutumist kuni 10. salmini.

Salmi nr	Tantsijaid salmi ajal
1	2
2	3
3	5
4	9
5	17
6	33
7	65
8	129
9	257
10	513

Lahendus 2. Samuti nagu lahenduses 1 näeme, et kui enne salmi on rivis n tantsijat, siis salmi ajal $2n - 1$ tantsijat. Näitame nüüd, et iga $i = 1, 2, \ldots$

korral on i-nda salmi ajal rivis täpselt $2^{i-1}+1$ tantsijat. Selleks märkame, et esimese salmi aegne tantsijate arv 2 avaldub kujul 2^0+1, mistõttu $i=1$ korral see väide kehtib. Kuid alati, kui mingi i korral väide kehtib, st i-nda salmi ajal on rivis $2^{i-1}+1$ tantsijat, on järgmise, numbriga $i+1$ salmi ajal rivis $2\left(2^{i-1}+1\right)-1$ ehk 2^i+1 tantsijat, mistõttu kehtib väide ka $i+1$ korral. Sellega on tõestatud, et väide kehtib iga $i=1,2,\ldots$ korral. Seega 10-nda salmi ajal on rivis 2^9+1 ehk 513 tantsijat.

Lahendused

1. *Vastus:* a) ei; b) ei.

Lahendus 1. Jagades antud arvud 33-ga standardse jagamisalgoritmi järgi, selgub, et esimese arvu jääk tuleb 3 ja teise arvu jääk tuleb 9. Seega kumbki arv ei jagu 33-ga.

Lahendus 2. Et $33 = 3 \cdot 11$, siis iga 33-ga jaguv arv jagub ka 11-ga. Seega kui näitame, et antud arvud ei jagu 11-ga, järeldub sellest, et nad ei jagu ka 33-ga. Arvu 11-ga jaguvuse tunnuse põhjal annab arv 11-ga jagades sama jäägi nagu paaris- ja paaritutel kohtadel asuvate numbrite summade vahe (kus ühelised loetakse paariskohaks, kümnelised paarituks, sajalised paariskohaks jne).

a) Arvu 222000111666 puhul on paaris- ja paaritutel kohtadel asuvate numbrite summade vahe $6 + 6 + 1 + 0 + 0 + 2 - (6 + 1 + 1 + 0 + 2 + 2)$ ehk 3. Et see 11-ga ei jagu, siis ei jagu 11-ga ka arv 222000111666.

b) Arvu 201620162016 puhul on paaris- ja paaritutel kohtadel asuvate numbrite summade vahe $3 \cdot ((6 + 0) - (1 + 2))$ ehk 9. Et see 11-ga ei jagu, siis ei jagu 11-ga ka arv 201620162016.

2. *Vastus:* jah.

Kui pool kooliteed on käidud, oleks kooli jõudmiseks vaja veel kõndida $\frac{1}{2} \cdot 20$ ehk 10 minutit. Et nii jõuaks Mihkel kooli 5 minutit enne tundide algust, on tundide alguseni aega $10 + 5$ ehk 15 minutit. Pöördudes poolel teel ümber, jääb Mihklil veel läbida $\frac{3}{2}$ tavalisest kooliteest, mille ta tavakiirusega läbiks $\frac{3}{2} \cdot 20$ ehk 30 minutiga. Joostes 2 korda kiiremini, kulub selleks $\frac{1}{2} \cdot 30$ ehk 15 minutit. Kokkuvõttes jõuab Mihkel telefoni kodust ära tuua küll.

3. *Vastus:* a) ei; b) jah.

a) Oletame, et $a + b = \text{VÜK}(a, b)$ mingite positiivsete täisarvude a ja b korral. Leiduvad ühistegurita arvud a' ja b', nii et $a = a' \cdot \text{SÜT}(a, b)$ ja $b = b' \cdot \text{SÜT}(a, b)$; siis $\text{VÜK}(a, b) = a' \cdot b' \cdot \text{SÜT}(a, b)$. Algul tehtud oletuse saab seega viia kujule $a' \cdot \text{SÜT}(a, b) + b' \cdot \text{SÜT}(a, b) = a' \cdot b' \cdot \text{SÜT}(a, b)$, kust taandades saame võrduse $a' + b' = a'b'$. Et nii a' kui ka $a'b'$ jaguvad arvuga a', peab ka teine liidetav b' jaguma arvuga a'. Kuna a' ja b' on konstruktsiooni põhjal ühistegurita, siis $a' = 1$. Analoogselt ka $b' = 1$. Kuid $1 + 1 \neq 1 \cdot 1$. Vastuolu näitab, et nõutud tingimust rahuldavaid positiivseid täisarve ei leidu.

b) Sobivad näiteks arvud 1, 2 ja 3, mille summa ja vähim ühiskordne on 6.

4. *Vastus:* ei.

Korrutades võrrandi pooled 2-ga, viies muutujatega liikmed vasakule ja rühmitades need sobivalt, saame samaväärse võrrandi

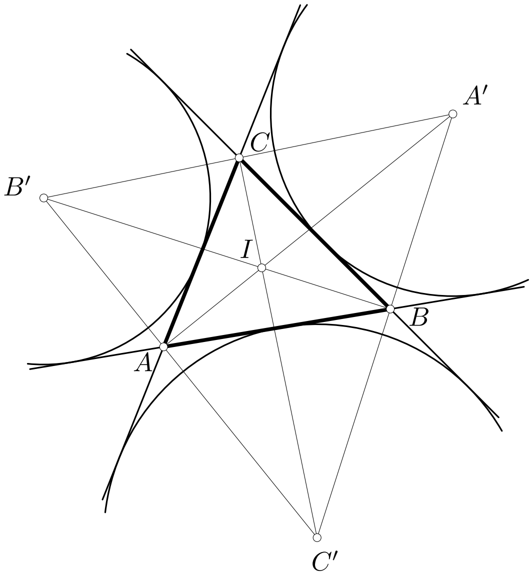
$$x^2 + (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - w)^2 + w^2 = 6.$$

Vasaku poole liidetavad on mittenegatiivsed, järelikult nad ei saa olla suuremad kui nende summa 6. Kui x, y, z ja w on täisarvud, siis vasaku poole liidetavate võimalikud väärtused on 0, 1 või 4. Ülimalt üks liidetav saab olla väärtusega 4 (muidu oleks summa suurem kui 6), aga vähemalt üks peab olema väärtusega 4 (muidu oleks summa ülimalt 5). Seega täpselt üks liidetav peab olema väärtusega 4, ülejäänud liidetavatest siis kaks on väärtusega 1 ja kaks on nullid. Kui nulliga võrduvad x^2 ja w^2, siis $x = w$. Vastasel korral aga võrdub nulliga üks arvudest $(x-y)^2$, $(y-z)^2$ ja $(z-w)^2$, mispuhul vastavalt $x = y$, $y = z$ või $z = w$. Järelikult ei saa x, y, z ja w olla kõik erinevad.

5. Et külg CA ja külje AB pikendus üle tipu A puutuvad ringjoont keskpunktiga B', asub B' kolmnurga ABC tipu A juures oleva välisnurga poolitajal (vt joonis 10). Samal nurgapoolitajal, aga teisel pool punkti A, asub analoogilisel põhjusel punkt C'. Et nurga BAC haarad puutuvad ringjoont keskpunktiga A', asub A' nurga BAC poolitajal. Sama tipu juures asuva sise- ja välisnurga poolitajad on risti (kuna sise- ja välisnurga summa on $180°$, on poolnurkade summa $90°$), seega $AA' \perp B'C'$ ehk AA' on kolmnurga $A'B'C'$ kõrgus. Analoogselt on ka BB' ja CC' kolmnurga $A'B'C'$ kõrgused. Et AA', BB' ja CC' on kolmnurga ABC nurgapoolitajad, lõikuvad nad kolmnurga ABC siseringjoone keskpunktis.

6. *Vastus:* jah.

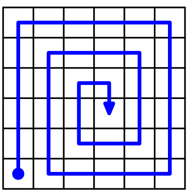
Lahendus 1. Üldisust kitsendamata võib eeldada, et inspektor alustab ringkäiku esimese korruse ühest nurgatoast. Esimese korruse toad käib ta läbi spiraalikujuliselt (vt joonis 11). Viimases külastatud esimese korruse toas liigub ta teisele korrusele ja tuleb teisel korrusel sama spiraali mööda tagasi algustoa kohal asuva toa naabertuppa (jättes ühe toa külastamata; vt joonis 12). Sealt liigub ta kolmandale korrusele ja läbib kõik kolmanda korruse toad peale ühe samas suunas nagu esimesel korrusel (vt joonis 13).



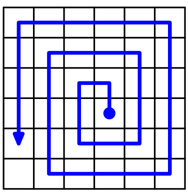
Joonis 10

Neljanda ja viienda korruse läbib inspektor samamoodi nagu vastavalt teise ja kolmanda korruse. Kuuendal korrusel läbib inspektor kõik toad, liikudes spiraali mööda väljapoole (vt joonis 14). Nii jõuab ta kuuendal korrusel tuppa, mis asub kohakuti selle esimese korruse toaga, kust ringkäik algas. Lõpuks laskub inspektor mööda treppi alla ja läbib ühtlasi kõik veel külastamata toad.

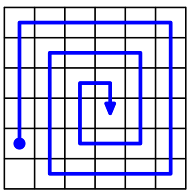
Lahendus 2. Kui inspektorile sobib rohkem trepist käia, võib ta planeerida 6×6 ruudustikus tee, mis läbib kõik ruudud täpselt ühe korra ja jõuab lõpuks alguspunkti tagasi (vt joonis 15), ja käia hoone läbi selle plaani järgi, liikudes aga pärast iga horisontaalset käiku vastavalt oma asukohale kas esimeselt korruselt kuuendale või kuuendalt esimesele. Et 6×6 ruudustikus on ruute ja ühtlasi ühest ruudust teise liikumisi paarisarv, jõuab inspektor



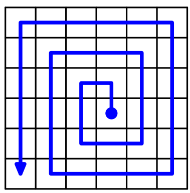
Joonis 11



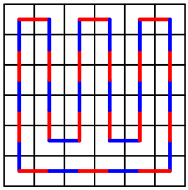
Joonis 12



Joonis 13



Joonis 14



Joonis 15

tuppa, kust alustas, pärast kõigi tubade ühekordset läbimist. Joonisel 15 on liikumised esimesel korrusel märgitud sinisega ja liikumised kuuendal korrusel märgitud punasega.

Lahendused

1. *Vastus:* 8 aastat.

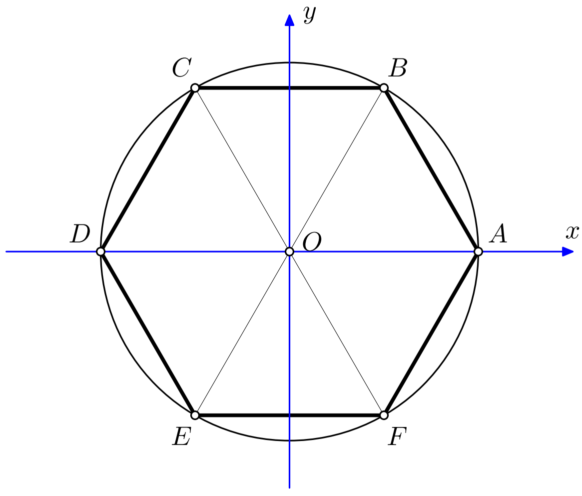
Olgu aastane tulumaksuvaba miinimum m; siis isa ja ema aastapalgad on vastavalt $20m$ ja $2m$ bruto, mis 20% tulumaksumäära arvestades annab netopalkadeks vastavalt $m+(20m-m)\cdot 0{,}8$ ehk $16{,}2m$ ja $m+(2m-m)\cdot 0{,}8$ ehk $1{,}8m$. Olgu vaadeldava ajaperioodi pikkus t aastat. Et isa ja ema netosissetulekud sel perioodil oleksid võrdsed, peab kehtima võrdus

$$16{,}2m = 1{,}8m \cdot t,$$

kust $t = 9$. Seega pärast isa töökaotust peab ema töötama veel $9-1$ ehk 8 aastat.

2. *Vastus:* 6.

Lahendus 1. Olgu koordinaatide alguspunkt ringjoone keskpunktis ning tipu A koordinaadid $(1;0)$ (vt joonis 16). Leiame kuusnurga $ABCDEF$ kõigi



Joonis 16

teiste tippude X ja vastavate vektorite $\overrightarrow{AX}$ koordinaadid:

X	Punkti X koordinaadid	Vektori $\overrightarrow{AX}$ koordinaadid
B	$(\cos 60^\circ; \sin 60^\circ)$	$(\cos 60^\circ - 1; \sin 60^\circ)$
C	$(\cos 120^\circ; \sin 120^\circ)$	$(\cos 120^\circ - 1; \sin 120^\circ)$
D	$(-1; 0)$	$(-2; 0)$
E	$(-\cos 60^\circ; -\sin 60^\circ)$	$(-\cos 60^\circ - 1; -\sin 60^\circ)$
F	$(-\cos 120^\circ; -\sin 120^\circ)$	$(-\cos 120^\circ - 1; -\sin 120^\circ)$

Seega vektori $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF}$ koordinaadid $(-6; 0)$ ja pikkus järelikult 6.

Lahendus 2. Olgu ringjoone keskpunkt O. Esitame kõik vektorid $\overrightarrow{AX}$ summana $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OX}$. Kuna $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$, siis

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = \\
&\quad = \overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = \\
&\quad = 6\overrightarrow{AO} + \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF}\right) = \\
&\quad = 6\overrightarrow{AO} + \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}\right) + \left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OE}\right) + \left(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OF}\right) = \\
&\quad = 6\overrightarrow{AO} + \vec{0} + \vec{0} + \vec{0} = \\
&\quad = 6\overrightarrow{AO}.
\end{aligned}$$

Et $\left|\overrightarrow{AO}\right| = 1$, siis küsitud vektori pikkus on 6.

Lahendus 3. Vektoritest $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DE}, \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{FA}$ iga järgmine on 60° võrra pööratud. Seega $\overrightarrow{AB}$ ja $\overrightarrow{DE}$ on vastassuunalised, samuti $\overrightarrow{AF}$ ja $\overrightarrow{DC}$ on vastassuunalised. Järelikult

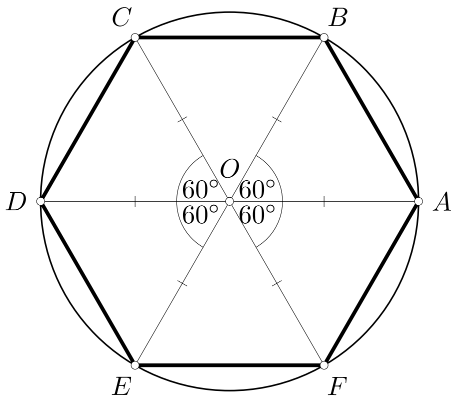
$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AF}, \\
\overrightarrow{AE} &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}.
\end{aligned}$$

Seega

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB}+\left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AF}\right)+\overrightarrow{AD}+\left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}\right)+\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{AD}.$$

Et vektori $\overrightarrow{AD}$ pikkus võrdub ringjoone diameetriga 2, siis küsitud vektori pikkus on $3 \cdot 2$ ehk 6.

Lahendus 4. Olgu ringjoone keskpunkt O. Korrapärase kuusnurga diagonaalid jagavad kuusnurga kuueks võrdhaarseks kolmnurgaks tipunugaga



Joonis 17

$\frac{360^\circ}{6}$ ehk 60° (vt joonis 17); sellises kolmnurgas on ka teised nurgad suurusega 60°. Seega $\angle ABO = \angle AFO = 60^\circ$ ja $\angle BAF = 2 \cdot 60^\circ = 120^\circ$, millest tulenevalt on $ABOF$ rööpkülik. Järelikult $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AO}$. Analoogiliselt saame $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DO} = -\overrightarrow{AO}$. Seega

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = \\
&\quad = \overrightarrow{AB} + \left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}\right) + \overrightarrow{AD} + \left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE}\right) + \overrightarrow{AF} = \\
&\quad = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AF}\right) + \left(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DE}\right) + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} = \\
&\quad = \overrightarrow{AO} - \overrightarrow{AO} + 3\overrightarrow{AD} = \\
&\quad = 3\overrightarrow{AD}.
\end{aligned}$$

Edasi jätkame nagu lahenduses 3.

3. *Vastus:* ei.

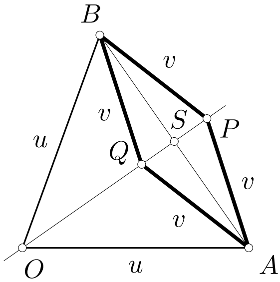
Lahendus 1. Üldisust kitsendamata $a > b$. Et arvude a ja b ühisteguritega jagub ka nende vahe $a - b$, siis $\text{SÜT}(a, b) \leqslant a - b$. Seega

$$a + b + \text{SÜT}(a, b) \leqslant a + b + a - b = 2a.$$

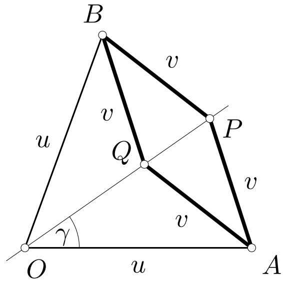
Järelikult $a + b + \text{SÜT}(a, b)$ ei ole üle 2 korra suurem kui a.

Lahendus 2. Üldisust kitsendamata $a > b$. Tähistades $\frac{a}{\text{SÜT}(a, b)} = a'$ ja $\frac{b}{\text{SÜT}(a, b)} = b'$, saame kirjutada

$$a + b + \text{SÜT}(a, b) = \text{SÜT}(a, b) \cdot (a' + b' + 1).$$



Joonis 18



Joonis 19

Et $a' > b'$, siis täisarvulisuse tõttu $a' \geqslant b' + 1$, kust $a' + b' + 1 \leqslant 2a'$. Seega

$$\text{SÜT}(a,b) \cdot (a' + b' + 1) \leqslant \text{SÜT}(a,b) \cdot 2a' = 2a.$$

Järelikult $a + b + \text{SÜT}(a,b)$ ei ole üle 2 korra suurem kui a.

4. Tõstes võrrandi pooled ruutu ja koondades sarnased liikmed, saame

$$q = \frac{p^2+1}{4} - \left|x + \frac{p}{2}\right|.$$

Siit $\frac{p^2+1}{4} - q = x + \frac{p}{2}$, kui $x + \frac{p}{2} \geqslant 0$, või $\frac{p^2+1}{4} - q = -\left(x + \frac{p}{2}\right)$, kui $x + \frac{p}{2} < 0$. Seega $x + \frac{p}{2} = \pm\left(\frac{p^2+1}{4} - q\right)$, kust tuleneb x jaoks kaks lahendikandidaati $-\frac{p}{2} + \left(\frac{p^2+1}{4} - q\right)$ ja $-\frac{p}{2} - \left(\frac{p^2+1}{4} - q\right)$.

Lahenduse lõpetuseks tuleb näidata, et leitud lahendid on erinevad ja tegu pole võõrlahenditega. Selleks piisab tõestada, et $\frac{p^2+1}{4} - q \geqslant \frac{1}{2}$, sest sellisel juhul on algse võrrandi parem pool mittenegatiivne ja poolte ruututõstmine ei tekita võõrlahendeid, samuti on arvu $\frac{p^2+1}{4} - q$ positiivsuse tõttu lahendid erinevad (ja lisaks peavad paika absoluutväärtuse lahtikirjutamisel tehtud eeldused). Vajaliku võrratuse näitamiseks märkame, et ruutvõrrandi $x^2 + px + q = 0$ lahendite täisarvulisuse tõttu on lahendite vahe vähemalt 1, st $\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \geqslant \frac{1}{2}$ ehk $\frac{p^2}{4} - q \geqslant \frac{1}{4}$. Liites mõlemale poole arvu $\frac{1}{4}$, saamegi vajaliku võrratuse.

5. *Lahendus 1.* Kuna $|OA| = |OB|$, siis punkt O asub lõigu AB keskristsirgel (vt joonis 18). Samuti asuvad $|PA| = |PB|$ ja $|QA| = |QB|$ tõttu punktid P ja Q lõigu AB keskristsirgel. Seega O, P ja Q on ühel sirgel.

Olgu S rombi diagonaalide lõikepunkt. Kuna diagonaalid poolitavad teineteist, siis on S ühtlasi lõigu PQ keskpunkt. Tähistame veel $w = |SP| = |SQ|$. Rombi diagonaalid on risti, seega Pythagorase teoreemist kolmnurkades OSA ja PSA saame vastavalt $u^2 = |OS|^2 + |SA|^2$ ja $v^2 = w^2 + |SA|^2$. Kokkuvõttes

$$\begin{aligned} |OP| \cdot |OQ| &= (|OS| - w)(|OS| + w) = \\ &= |OS|^2 - w^2 = \\ &= \left(u^2 - |SA|^2\right) - \left(v^2 - |SA|^2\right) = u^2 - v^2. \end{aligned}$$

Lahendus 2. Samuti nagu eelmises lahenduses näitame, et O, P ja Q on ühel sirgel. Tähistame $\gamma = \angle AOP = \angle AOQ$ (vt joonis 19). Koosinusteoreemist kolmnurkades AOP ja AOQ saame nüüd vastavalt

$$\begin{aligned} v^2 &= u^2 + |OP|^2 - 2u \cdot |OP| \cdot \cos\gamma, \\ v^2 &= u^2 + |OQ|^2 - 2u \cdot |OQ| \cdot \cos\gamma. \end{aligned}$$

Seega $|OP|$ ja $|OQ|$ on mõlemad ruutvõrrandi $x^2 - 2u\cos\gamma \cdot x + u^2 - v^2 = 0$ lahendid. Viete'i valemist nüüd $|OP| \cdot |OQ| = u^2 - v^2$.

6. Värvime siniseks kõik üleni ringi sisse jäävad ühikruudud, mille tippude mõlemad koordinaadid on täisarvud. Ringi sisse jäävaid täisarvuliste koordinaatidega punkte on vähemalt samapalju kui siniseid ühikruute (sobib võtta nt kõigi siniste ühikruutude vasakud ülemised tipud – need on kõigil ühikruutudel erinevad). Siniste ühikruutude arv aga võrdub nende pindalaga. Seega piisab näidata, et siniseks värvitud ala pindala on vähemalt 30000. Ühikruut, mille kasvõi mõni punkt asub ringjoonest vähemalt diagonaali pikkuse $\sqrt{2}$ võrra keskpunkti pool, on kindlasti sinine; järelikult mahub siniseks värvitud alasse ring raadiusega $100-\sqrt{2}$. Selle ringi pindala on $\pi\left(100 - \sqrt{2}\right)^2$. Et $100 - \sqrt{2} > 100 - 2 = 98$ ja $98^2 > 9600$ ning $\pi > 3{,}14$, on see pindala suurem kui $3{,}14 \cdot 9600$ ehk 30144. Seega on vaadeldavas ringis tõepoolest rohkem kui 30000 täisarvuliste koordinaatidega punkti.

Lahendused

1. *Vastus:* 72.

Olgu jada esimene liige a ja tegur q. Ülesande tingimuste järgi saame

$$\begin{aligned}
20\cdot\left(a+aq+\ldots+aq^{19}\right) &= \\
&= aq^{20}+aq^{21}+\ldots+aq^{59} = \\
&= q^{20}\cdot\left(a+aq+\ldots+aq^{19}\right)+q^{40}\cdot\left(a+aq+\ldots+aq^{19}\right) = \\
&= \left(q^{20}+q^{40}\right)\cdot\left(a+aq+\ldots+aq^{19}\right).
\end{aligned}$$

Seega $q^{20}+q^{40}=20$ ehk $\left(q^{20}\right)^2+q^{20}-20=0$, kust $q^{20}=-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+20}=4$ (ruutvõrrandi teine lahend negatiivsena ei sobi).

Tähistades otsitavat suhet muutujaga x, saame analoogiliselt

$$\begin{aligned}
x\cdot\left(a+aq+\ldots+aq^{29}\right) &= \\
&= aq^{30}+aq^{31}+\ldots+aq^{89} = \\
&= q^{30}\cdot\left(a+aq+\ldots+aq^{29}\right)+q^{60}\cdot\left(a+aq+\ldots+aq^{29}\right) = \\
&= \left(q^{30}+q^{60}\right)\cdot\left(a+aq+\ldots+aq^{29}\right),
\end{aligned}$$

kust $x=q^{30}+q^{60}$. Et eelnevast $q^{10}=2$, siis $q^{30}+q^{60}=2^3+2^6=8+64=72$.

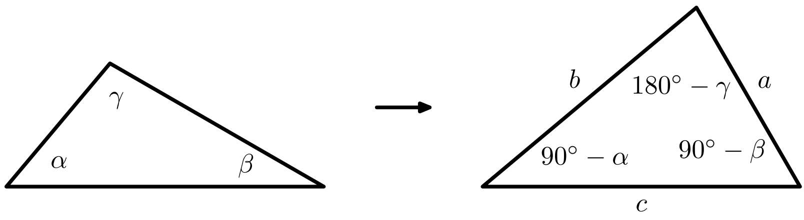
2. *Vastus:* suurem.

Arvude $\log 6$ ja $\frac{7}{9}$ suurusvahekord on sama mis arvudel $9\log 6$ ja 7. Et $9\log 6=\log 6^9$ ja $7=\log 10^7$ ning logaritm on kasvav funktsioon, on otsitav suurusvahekord sama mis arvude 6^9 ja 10^7 suurusvahekord. Arvutades leiame

$$\begin{aligned}
6^2 &= 36, \\
6^4 &= 36^2 = 1296, \\
6^8 &= 1296^2 = 1679616 > 1666666+\frac{2}{3}=\frac{10^7}{6}.
\end{aligned}$$

Järelikult $6^9=6^8\cdot 6>10^7$, millest tulenevalt $\log 6>\frac{7}{9}$.

Märkus. Arvu $\log 6$ täpne väärtus on $0.77815125\ldots$ ning $6^9=10077696$.



Joonis 20

3. *Vastus:* 3.

Kui p_1, p_1+p_2, $p_1+p_2+p_3$ ja $p_1+p_2+p_3+p_4$ on algarvud, siis p_1+p_2, $p_1+p_2+p_3$ ja $p_1+p_2+p_3+p_4$ peavad olema paaritud, sest ainult vähim algarv 2 on paaris, kõik vaadeldavad kolm summat aga on suuremad vähemalt algarvust p_1. Seega p_3 on kahe paaritu arvu erinevusena paaris ja p_4 samuti, kust $p_3 = p_4 = 2$. Siit järeldub, et arvud p_1+p_2, $p_1+p_2+p_3$ ja $p_1+p_2+p_3+p_4$ annavad 3-ga jagades kõikvõimalikud jäägid. Seega üks neist jagub 3-ga, mis algarvulisusest tulenevalt tähendab võrdumist 3-ga. Kuid kahe algarvu summa on vähemalt 4. Vastuolu näitab, et $n < 4$. Teisalt, $n = 3$ jaoks saab valida $p_1 = 3$, $p_2 = 2$ ja $p_3 = 2$, sest 3, $3+2$ ehk 5 ja $3+2+2$ ehk 7 on kõik algarvud.

4. *Lahendus 1.* Et $\gamma = 180^\circ - (\alpha+\beta)$, siis $\cos\gamma = -\cos(\alpha+\beta)$. Seega

$$\begin{aligned}
&\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = \\
&\quad= \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2(\alpha+\beta) - 2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta) = \\
&\quad= \cos^2\alpha + \cos^2\beta + (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)^2 - \\
&\qquad\quad -2\cos\alpha\cos\beta(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) = \\
&\quad= \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \\
&\qquad\quad +\cos^2\alpha\cos^2\beta - 2\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta\cos\beta + \sin^2\alpha\sin^2\beta - \\
&\qquad\quad -2\cos^2\alpha\cos^2\beta + 2\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta\cos\beta = \\
&\quad= \cos^2\alpha + \cos^2\beta - \cos^2\alpha\cos^2\beta + \sin^2\alpha\sin^2\beta = \\
&\quad= 1 - \left(1-\cos^2\alpha\right)\left(1-\cos^2\beta\right) + \sin^2\alpha\sin^2\beta = \\
&\quad= 1 - \sin^2\alpha\sin^2\beta + \sin^2\alpha\sin^2\beta = \\
&\quad= 1.
\end{aligned}$$

Lahendus 2. Üldisust kitsendamata eeldame, et γ on suurim nurk; siis $\alpha < 90^\circ$ ja $\beta < 90^\circ$. Seega leidub kolmnurk nurkadega $90^\circ - \alpha$, $90^\circ - \beta$ ja $180^\circ - \gamma$; olgu nende nurkade vastaskülgede pikkused vastavalt a, b ja c (vt joonis 20). Siinusteoreemist saame

$$\frac{a}{\sin(90^\circ - \alpha)} = \frac{b}{\sin(90^\circ - \beta)} = \frac{c}{\sin(180^\circ - \gamma)} = 2R,$$

kus R on konstrueeritud kolmnurga ümberringjoone raadius. Seega

$$\begin{aligned} a &= 2R \cdot \sin\left(90^\circ - \alpha\right) = 2R \cdot \cos\alpha, \\ b &= 2R \cdot \sin\left(90^\circ - \beta\right) = 2R \cdot \cos\beta, \\ c &= 2R \cdot \sin\left(180^\circ - \gamma\right) = 2R \cdot \sin\gamma. \end{aligned} \tag{1}$$

Koosinusteoreemist samas kolmnurgas aga

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos\left(180^\circ - \gamma\right) = c^2.$$

Asendades seostest (1), saame

$$4R^2 \cdot \cos^2\alpha + 4R^2 \cdot \cos^2\beta - 4R^2 \cdot 2\cos\alpha\cos\beta\cos\left(180^\circ - \gamma\right) = 4R^2 \cdot \sin^2\gamma,$$

kust suurusega $4R^2$ taandamise ning võrduste $\cos\left(180^\circ - \gamma\right) = -\cos\gamma$ ja $\sin^2\gamma = 1 - \cos^2\gamma$ kasutamise järel tekib

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = 1 - \cos^2\gamma.$$

Saadud võrdus on ilmselt samaväärne ülesande väitega.

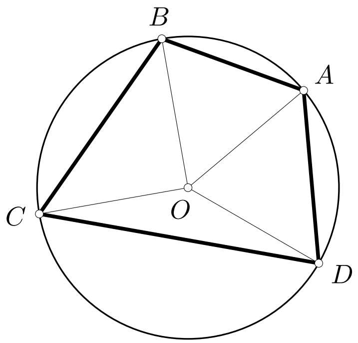
5. *Vastus:* 2.

Lahendus 1. Olgu ringjoone keskpunkt O. Tähistades kujundi $\mathscr{K}$ pindala $S_{\mathscr{K}}$, saame

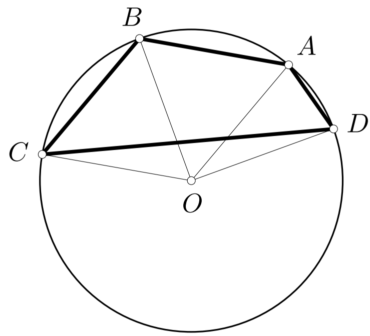
$$\begin{aligned} S_{ABCD} &= S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COD} + S_{DOA} = \\ &= \frac{1}{2}|OA||OB|\sin\angle AOB + \frac{1}{2}|OB||OC|\sin\angle BOC + \\ &\qquad + \frac{1}{2}|OC||OD|\sin\angle COD + \frac{1}{2}|OD||OA|\sin\angle DOA = \\ &= \frac{1}{2} \cdot (\sin\angle AOB + \sin\angle BOC + \sin\angle COD + \sin\angle DOA) \leqslant \\ &\leqslant \frac{1}{2} \cdot (1 + 1 + 1 + 1) = \\ &= 2. \end{aligned}$$

(Täpne olles kehtib see tuletuskäik vaid juhul, kui O asub nelinurga $ABCD$ sees või küljel (vt joonis 21). Kui O on väljaspool nelinurka $ABCD$, siis üks kesknurkadest AOB, BOC, COD ja DOA on ülinürinurk ja vastav liige summas $S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COD} + S_{DOA}$ tuleb võtta miinusmärgiga (vt joonis 22).)

Nelinurk pindalaga 2 leidub, sest punktid A, B, C ja D saab võtta nii, et $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \angle DOA = 90^\circ$ (vt joonis 23), mispuhul ülal tõestatud võrratuses kehtib võrdus.



Joonis 21



Joonis 22

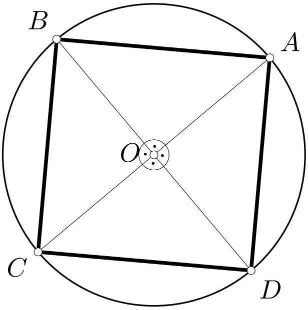
Lahendus 2. Oletame, et nelinurga $ABCD$ küljed pole kõik võrdse pikkusega. Siis leidub kaks naaberkülge, mille pikkused on erinevad; olgu need üldisust kitsendamata AB ja BC. Olgu B' punkt, mis asub samal kaarel AC nagu punkt B (vt joonis 24) ja mille korral kõõlud AB' ja $B'C$ on võrdse pikkusega. Ent kolmnurga $AB'C$ küljele AC tõmmatud kõrgus on suurem kui kolmnurga ABC küljele AC tõmmatud kõrgus, mistõttu on ka kolmnurga $AB'C$ pindala suurem kui kolmnurga ABC pindala. Tähistades kujundi $\mathcal{K}$ pindala $S_{\mathcal{K}}$, saame

$$S_{AB'CD} = S_{AB'C} + S_{CDA} > S_{ABC} + S_{CDA} = S_{ABCD}.$$

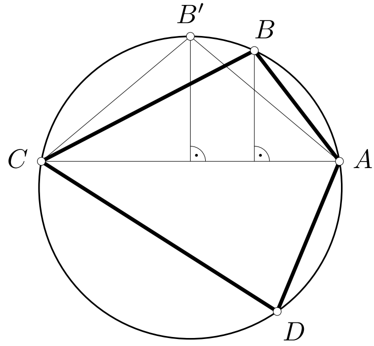
Seega nelinurk, mille küljed pole võrdse pikkusega, pole suurima pindalaga. Teisi sõnu, suurima pindalaga nelinurk peab olema korrapärane, st $ABCD$ on ruut. Selle ruudu diagonaal võrdub ringi diameetriga 2, seega pindala on $\frac{2 \cdot 2}{2}$ ehk 2.

6. *Lahendus 1.* Kõiki paberile kirjutatud arvude paare kokku on n^2. Piisab näidata, et positiivsete täisarvude paare (i, j), kus $i + j \leqslant n$, on vähem kui $\frac{n^2}{2}$. Sellises paaris ilmselt $1 \leqslant i \leqslant n - 1$, iga sellise i korral on aga arve $j = 1, 2, \ldots, n$, mille puhul $i + j \leqslant n$, täpselt $n - i$. Seega paare (i, j), kus $i + j \leqslant n$, on kokku $(n-1) + (n-2) + \ldots + 1$ ehk $\frac{(n-1)n}{2}$. Et $n - 1 < n$, siis $\frac{(n-1)n}{2} < \frac{n^2}{2}$.

Lahendus 2. Olgu paberile kirjutatud erinevad positiivsed täisarvud tähistatud $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Et väide ilmselgelt ei sõltu arvude järjestusest, võime eeldada, et arvud on järjestatud kasvavalt. Sel juhul $x_i \geqslant i$ iga $i = 1, \ldots, n$ korral, mistõttu alati, kui kehtib $i + j > n$, kehtib ka $x_i + x_j > n$. Väite



Joonis 23



Joonis 24

tõestamiseks piisab nüüd näidata, et paaridest (i, j), kus $i, j = 1, 2, \ldots, n$, rohkem kui poolte korral kehtib võrratus $i + j > n$.

Selleks seame igale paarile (i, j) vastavusse paari $(n + 1 - j, n + 1 - i)$. Iga paari ja talle vastava paari liikmete summa on $i+j+(n+1-j)+(n+1-i)$ ehk $2n+2$, seega kui paari (i, j) liikmete summa on ülimalt n, siis talle vastava paari liikmete summa on vähemalt $n + 2$. Erinevatele paaridele vastavad paarid on ilmselt erinevad, järelikult ei saa paare, mille liikmete summa on ülimalt n, olla rohkem kui paare, mille liikmete summa on vähemalt $n + 2$. Kuid on olemas ka paarid, mille liikmete summa on täpselt $n + 1$, näiteks paar $(1, n)$. Seega on paare, mille liikmete summa on suurem kui n, rohkem kui teisi.

Eesti LXIII matemaatikaolümpiaad

30. jaanuar 2016 Piirkonnavoor **Hindamisjuhised**

Lp hindaja!

Käesolevas esitame kõigepealt hindamise üldised põhimõtted ning seejärel järjekorras konkreetsed hindamisjuhised iga ülesande kohta eraldi.

1. Õpilase lahenduseks tuleb esmajoones lugeda see, mida õpilane on ülesande kohta vormistanud puhtandina (sh mustandipaberile selgesti arusaadavalt kirja pandud mõttekäigud, kui need on ametlikult puhtandipaberilt viidatud). Töö mustandi arvestamine või mittearvestamine ülesande lahenduse hulka on hindaja otsustada (või piirkonna hindamiskomisjoni ühine otsus kõigi ülesannete suhtes), kuid see peab toimuma kõigis töödes ühtmoodi.

2. Alljärgnevas on 7.–9. klassi olümpiaadi I osa (testi) ning kõikide ülejäänud ülesannete hindamisjuhised esitatud erinevalt.

   Testi iga küsimuse jaoks on eraldi loetletud või kirjeldatud vastused, mille eest tuleks anda vastavalt kaks punkti või üks punkt (st vastavaid punkte ühe küsimuse piires *ei tule* liita). Testiülesannete lahendusi õpilased ei pea esitama, vaid kirjutavad ülesannete lehel vastavale punktiirile või ülesande tekstis viidatud kohta ainult vastuse.

   Seevastu kõigi teiste ülesannete kohta tuleb esitada täielikud lahendused, ainult vastustest ei piisa. Nende ülesannete lahendused on hindamisjuhistes jaotatud võimalust mööda osadeks (etappideks) ning on näidatud iga osa eest antav punktide arv (st ühe ülesande eest antava punktisumma saamiseks *tuleb* lahenduse erinevate osade eest antud punktid liita).

   Mõnes skeemis on mõne etapi kirjelduse all („*Sealhulgas:*“ järel) alapunktidena välja toodud konkreetse etapi väiksemate osade eest antavad punktid – need lähevad käiku juhul, kui lahenduse see etapp on ebatäielik või vigane ja selle osa täispunkte seetõttu ei saa anda. Alamosade punktid tuleb omavahel samuti liita.

3. Žürii lahendustes ja käesolevates hindamisjuhistes on ülesannete vastused esitatud enamasti ainult ühel, lihtsaimal või kõige tõenäolisemalt esineval kujul. Hindamisel (sh testid!) tuleb võrdselt õigeks lugeda ka sama vastuse teised mõistlikud esitusviisid – sh taandatud hariliku murruna, segaarvuna, kümnendmurruna, sõnadega välja kirjutatuna –, seejuures ka osana pikemalt (nt täislausega, koos sobiva liigisõnaga või koos selgitustega) antud

vastusest. Juhud, kus ülesande sisu tingib erandeid sellest üldreeglist, on eraldi mainitud vastava ülesande hindamisjuhises.

Ühik arvu järel on vastuses vajalik juhul, kui ülesandes on küsitud suurust, mis teatud ühikutes avaldub. Näiteks küsimusele „Kui suur pindala ...?“ saab õige vastus olla „120 cm^2“, kuid mitte „120“ (kui ülesande tekstis pole kasutatud ühikuta pikkusi/pindalasid). Teistes ühikutes väljendatud sama suurus tuleb lugeda õigeks, näiteks vastused „120 cm^2“ ja „1,2 dm^2“ on samaväärsed. Ühik vastuses ei ole nõutav, kui ülesandes on küsitud kindlate ühikute arvu. Näiteks küsimusele „Mitu ruutsentimeetrit ...?“ antud vastused „120“ ja „120 cm^2“ tuleb võrdväärseks lugeda samal alusel nagu küsimusele „Mitu karu ...?“ antud vastused „3“ ja „3 karu“ (vastus koos liigisõnaga). Teistes ühikutes antud vastus tuleb aga lugeda valeks, vastused „120 cm^2“ ja „1,2 dm^2“ ei ole siin samaväärsed.

4. Mõnede ülesannete kohta, mida saab lahendada mitmel oluliselt erineval viisil, anname eraldi hindamisskeemid erinevate lahendusviiside jaoks. Rõhutame, et iga konkreetset mittetäielikku lahendust tuleb hinnata ainult *ühe* sellise skeemi järgi (selle järgi, mille kohaselt ta saaks kõige rohkem punkte).

5. Enamiku ülesannete korral (v.a testid ja tõestusülesanded) on hindamisjuhiste lõpus eraldi näidatud, mitu punkti anda ainult õige vastuse eest. See hinne on mõeldud juhuks, kui töös on ülesande kohta toodud ainult õige vastus või õige vastus koos mõttekäiguga, mis ei annaks skeemi järgi rohkem punkte kui on ette nähtud õige vastuse eest.

6. Kahtlemata esineb õpilaste töödes ka mõttekäike, mis ei mahu meie poolt pakutud skeemidesse. Selliste lahenduste hindamisel tuleb lähtuda sellest, *kui suur osa* antud ülesandest on õpilasel lahendatud, kasutades lahenduse üksikute osade kaalu määramisel võimaluse korral võrdluseks punktide jaotust meie pakutud hindamisskeemides.

7. *Mistahes* täieliku ja matemaatiliselt korrektse lahenduse eest tuleb igal juhul anda maksimumpunktid, sõltumata selle lahenduse pikkusest või otstarbekusest võrreldes teiste lahendusviisidega.

Eesti LXIII matemaatikaolümpiaad

30. jaanuar 2016 | Piirkonnavoor | **7. klass**

I osa hindamisjuhised

1.	∘ Antud õige vastus 91:	2 p
2.	∘ Antud õige vastus 63:	2 p
3.	∘ Antud õige vastus 11:	2 p
4.	∘ Antud õige vastus 0,5 (või $\frac{1}{2}$):	2 p
5.	∘ Antud õige vastus 12:	2 p
6.	∘ Antud õige vastus 1,5 cm:	2 p
	∘ Antud vastuseks 1,5 ilma ühikuta või vale ühikuga:	1 p
7.	∘ Antud õige vastus 12 cm^2:	2 p
	∘ Antud vastuseks 12 ilma ühikuta või vale ühikuga:	1 p
8.	∘ Antud õige vastus 48°:	2 p
	∘ Antud vastuseks 48 ilma kraadimärgita:	1 p
9.	∘ Antud õige vastus $\frac{1}{9}$:	2 p
	∘ Antud vastuseks $\frac{2}{18}$ vm õige, kuid taandamata murd:	1 p
10.	∘ Antud õige vastus 18:	2 p

I osa hindamisjuhised

1. ∘ Antud õige vastus 133: 2 p

2. ∘ Antud õige vastus 1.00: 2 p

3. ∘ Antud õige vastus 2520252: 2 p

4. ∘ Antud õige vastus 7: 2 p

5. ∘ Antud õige vastus 1: 2 p

6. ∘ Antud õige vastus 64 €: 2 p
∘ Antud vastuseks 64 ilma ühikuta: 1 p

7. ∘ Antud õige vastus 36 cm: 2 p
∘ Antud vastuseks 36 ilma ühikuta või vale ühikuga: 1 p

8. ∘ Antud õige vastus 4π cm^2: 2 p
∘ Antud vastuseks 4π ilma ühikuta või vale ühikuga: 1 p
∘ Antud vastuseks 12,56 või täpsem ligikaudne väärtus õige ühikuga või ilma ühikuta: 1 p

9. ∘ Antud õige vastus 57°: 2 p
∘ Antud vastuseks 57 ilma kraadimärgita: 1 p

10. ∘ Antud õige vastus 12: 2 p

Eesti LXIII matemaatikaolümpiaad

30. jaanuar 2016 Piirkonnavoor **9. klass**

I osa hindamisjuhised

1.
- Antud õige vastus 280: 2 p

2.
- Antud õige vastus 7: 2 p

3.
- Antud õige vastus 4: 2 p

4.
- Antud õige vastus 2: 2 p

5.
- Antud õige vastus 160 €: 2 p
- Antud vastuseks 160 ilma ühikuta: 1 p

6.
- Antud õige vastus 99: 2 p

7.
- Antud õige vastus 18 cm^2: 2 p
- Antud vastuseks 18 ilma ühikuta või vale ühikuga: 1 p

8.
- Antud õige vastus $1{,}2\pi$ cm: 2 p
- Antud vastuseks $1{,}2\pi$ ilma ühikuta või vale ühikuga: 1 p
- Antud vastuseks 3,768 või täpsem ligikaudne väärtus õige ühikuga või ilma ühikuta: 1 p

9.
- Antud õige vastus 20°: 2 p
- Antud vastuseks 20 ilma kraadimärgita: 1 p

10.
- Antud õige vastus 32: 2 p

Eesti LXIII matemaatikaolümpiaad

30. jaanuar 2016 Piirkonnavoor **7. klass**

II osa hindamisjuhised

1. Anname hindamisskeemi žürii lahenduse 1 alusel.
   - Märgitud, et kolmnurk EAC on täisnurkne ja võrdhaarne: 1 p
   - Järeldatud, et $\angle ECA = 45^\circ$: 1 p
   - Märgatud, et kolmnurk BAF on võrdhaarne: 1 p
   - Põhjendatud, et $\angle CAF = 60^\circ$: 1 p
   - Selle abil leitud $\angle ABF = 30^\circ$: 1 p
   - Leitud $\angle EGB = 75^\circ$: 2 p

   Žürii lahenduse 2 puhul asendada skeemi teine rida järgnevaga:
   - Järeldatud, et $\angle AEC = 45^\circ$: 1 p

   Žürii lahenduse 3 puhul asendada skeemi eelviimane rida järgnevaga:
   - Selle abil leitud $\angle BFA = 30^\circ$: 1 p

   Ainult täieliku õige vastuse (75°) eest ilma selgitusteta anda 2 punkti, kraadimärgi puudumisel 1 punkt. Üldkehtivate väidete eest, mis pole seostatud ülesande olukorraga (nt „võrdkülgse kolmnurga nurgad on suurusega 60°“) punkte mitte anda.

2. - Leitud Jüri teekonna esimese etapi läbimisaeg 0,1 tundi: 1 p
   - Leitud Jüri teekonna teise etapi läbimisaeg 0,2 tundi: 1 p
   - Leitud Jüri sõiduaeg kokku 0,3 tundi: 1 p
   - Leitud Mari sõiduaeg 0,4 tundi: 2 p
   - Leitud Mari sõidukiirus: 2 p

   Ainult õige vastuse (25 km/h) eest ilma selgitusteta anda 2 punkti, ühiku puudumisel või vale ühiku puhul 1 punkt.

3. Anname hindamisskeemid žürii lahenduste 1 ja 2 jaoks eraldi.

   Skeem žürii lahendusele 1:
   - Põhjendatud, et a jagub 3-ga: 2 p
   - Põhjendatud, et a ei jagu 9-ga: 2 p
   - Põhjendatud, et c jagub 3-ga ning b ja d ei jagu 3-ga: 3 p

Skeem žürii lahendusele 2:

- Põhjendatud, et 3 esineb arvudes b ja d samal astmel: 3 p
- Tingimust 2 kasutades järeldatud, et b ega d ei jagu 3-ga ning c jagub 3-ga: 3 p
- Järeldatud, et a jagub 3-ga: 1 p

Ainult täieliku õige vastuse eest (a ja c) ilma selgitusteta anda 2 punkti. Kui üks arv on puudu ja pole liigseid arve, anda 1 punkt. Kui üks arv on liigne, kuid mõlemad õiged arvud on olemas, anda 1 punkt. Ülejäänud juhtudel (selgituste puudumisel) anda 0 punkti.

II osa hindamisjuhised

1.
- Leitud $\angle DAE = 30^\circ$ (või $\angle DCG = 30^\circ$): 1 p
- Märgatud, et kolmnurk DAE (või DCG) on võrdhaarne: 1 p
- Eelneva põhjal leitud $\angle DEA = 75^\circ$ (või $\angle DGC = 75^\circ$): 1 p
- Leitud ka teise nurga (vastavalt DGC või DEA) suurus (põhjenduseks piisab viitamisest analoogiale eelnevaga): 1 p
- Korrektselt leitud nurga GDE või EFG suurus: 2 p
- Leitud nelinurga $DEFG$ viimase nurga suurus: 1 p

Ainult õige vastuse ($60^\circ, 75^\circ, 75^\circ, 150^\circ$ suvalises järjekorras) eest ilma selgitusteta anda 2 punkti. Kui üks nurk on puudu või vale või on kraadimärgid puudu, anda 1 punkt. Muul juhul (kui selgitused puuduvad) anda 0 punkti.

2.
- Koostatud sobiv ülesande tingimusi kirjeldav võrrand (žürii lahenduses nt $100x + y - 7722 = 100y + x$): 1 p
- Võrrand lihtsustatud kujule $x = 78 + y$ või sellega ilmselgelt samaväärsele kujule (sarnased liikmed peavad olema koondatud ja tegur 99 välja taandatud): 2 p
- Mainitud, et x selles seoses on kahekohaline: 1 p
- Juhtude ammendava läbivaatusega leitud ainus lahend $x = 84$, $y = 6$: 2 p
- Leitud õige lõppvastus: 1 p

Ainult õige vastuse (6 eurot 84 senti) eest ilma selgitusteta anda 2 punkti, ühikute puudumisel 1 punkt.

3.
- Leitud autode kiiruste erinevus 20 km/h: 1 p
- Leitud, et 9 sekundi jooksul läbib sõiduauto 50 meetrit rohkem kui reka (piisab, kui see distants on õigesti välja arvutatud, interpretatsioon ülesande kontekstis ei pea olema formuleeritud): 2 p
- Järeldatud, et sõiduauto pikkus on 4,5 meetrit: 1 p
- Leitud reka ja sõiduauto pikkuste vahe 11 meetrit: 1 p
- Õige tehtega leitud otsitav aeg sekundites: 2 p

Ainult õige vastuse 1,98 eest ilma selgitusteta anda 2 punkti.

II osa hindamisjuhised

1.
- Ammendavalt põhjendatud, et järgmise arvuga 1-st suuremat ühistegurit saab omada ülimalt 7 arvu reas: 4 p

  Sealhulgas:
  - Märgitud, et arvud 1 ja 7 on kõigi ülejäänud arvudega ühistegurita: *1 p*
  - Sellele tuginedes ammendavalt põhjendatud, et mistahes järjestuse korral tekib vähemalt 2 ühistegurita järjestikuste arvude paari: *2 p*
  - Vähemalt 2 ühistegurita kõrvutiasuvate arvude paari olemasolust järeldatud, et ülimalt 7 arvul on järgnevaga 1-st suurem ühistegur: *1 p*
- Toodud sobiv näide, kus 7 arvul on järgmise arvuga 1-st suurem ühistegur: 3 p

Ainult õige vastuse (7) eest ilma selgitusteta anda 1 punkt.

2.
- Koostatud õige võrrand eelduse väljendamiseks: 2 p
- Võrrandi teisendamisega näidatud, et Mari loetud seiklusjuttude arv on 2: 1 p
- Õigesti väljendatud seiklusjuttude ja mõrvalugude arvud väites esitatud hüpoteetilises olukorras (tegelik seiklusjuttude arv 2 võib olla sisse asendatud või ka mitte): 3 p

  Sealhulgas:
  - Õigesti väljendatud seiklusjuttude või mõrvalugude arvudest üks: *2 p*
- Märgitud, et selles olukorras oleks mõrvalugusid olnud 2 võrra seiklusjuttudest rohkem: 1 p

3. Anname eraldi skeemid vastavalt kahele lähenemisele.

Skeem žürii lahendusele 1:
- Näidatud, et $|FM| = |AM|$ (või $|FM| = |DM|$): 1 p
- Ammendavalt põhjendatud, et kolmnurgad ABM ja FBM (või DCM ja FCM) on võrdsed: 2 p
- Järeldatud, et $\angle BMF = \angle BMA$ (või $\angle CMF = \angle CMD$): 1 p

- Põhjendatud võrdustest $\angle BMF = \angle BMA$ ja $\angle CMF = \angle CMD$ ka teine (mis seni põhjendamata) või mõni temaga ilmselgelt samaväärne võrdus (piisab viitamisest analoogiale eelnevaga): 1 p
- Lahendus lõpule viidud: 2 p

Skeem žürii lahendusele 2:

- Näidatud, et $|FM| = |AM|$ (või $|FM| = |DM|$): 1 p
- Põhjendatud kolmnurkade MNF ja BNG (või MNF ja CNH, kus H on punktist C kiirele MN tõmmatud ristlõigu aluspunkt) sarnasus: 2 p
- Sarnasuse põhjal leitud, et $|MN| = |BN|$ (või $|MN| = |CN|$): 2 p
- Järeldatud, et punkt N on kolmnurga BMC ümberringjoone keskpunkt: 1 p
- Tehtud lõppjäreldus: 1 p

4.
- Põhjendatud, et iga salmi algul lisandub rivvi ühe võrra vähem tantsijaid kui seni on (või see, et n tantsijaga salmile järgneb $2n - 1$ tantsijaga salm): 3 p
- Leitud tantsijate arv 10-nda salmi ajal kas tabelimeetodil või muu ammendava põhjendusega: 4 p

  Sealhulgas induktsiooniga lahenduse puhul:

  - Tõestatud, et iga i korral on i-nda salmi ajal rivis $2^{i-1} + 1$ tantsijat: *3 p*

Kui tabelimeetodil on õigesti leitud tantsijate arvud kuni 10-nda salmini, kuid vastuseks on pakutud tantsijate arv vale salmi ajal, siis anda skeemi teise rea alusel 3 punkti. Kui tantsijate arvude leidmisel on tehtud arvutusviga, siis anda skeemi teise rea järgi punkte proportsionaalselt selle osaga arvutusest, mis on tehtud enne esimest viga.

Ainult õige vastuse (513) eest ilma selgitusteta anda 1 punkt.

Eesti LXIII matemaatikaolümpiaad

30. jaanuar 2016 Piirkonnavoor **10. klass**

Hindamisjuhised

1. Anname kaks eraldi skeemi erinevate lähenemiste puhuks.

Üldine skeem:

- Korrektselt lahendatud a-osa või b-osa: 4 p
- Korrektselt lahendatud ka teine osa: 3 p

Skeem 11*-ga jaguvusele taandamist kasutava lahenduse jaoks:*

- Märgitud, et 33 jagub 11-ga: 1 p
- Järeldatud, et 33-ga saavad jaguda ainult arvud, mis jaguvad 11-ga: 1 p
- Korrektselt põhjendatud, et arv 222000111666 ei jagu 11-ga või et 201620162016 ei jagu 11-ga: 3 p
- Korrektselt põhjendatud, et teine arv ei jagu 11-ga: 2 p

Arvude taandamise eest, kui 11-ga jagumise kontroll sellega oluliselt ei lihtsustu, punkte mitte anda. Kontrolli olulise lihtsustamise eest (nt arvu 222000111666 taandamine 111-ga arvuks 2000001006 ja 201620162016 taandamine 2016-ga arvuks 100010001) võib kummaski osas anda 1 punkti, kui on ammendavalt põhjendatud, miks taandatud arvud jaguvad 11-ga siis ja ainult siis, kui originaalarvud jaguvad 11-ga (vastavalt 111 ja 2016 on 11-ga ühistegurita).

Ainult õige vastuse (mõlema osa ei-vastus) eest ilma selgitusteta anda 0 punkti. Üldkehtivate väidete (nt 11-ga jaguvuse tunnus) sõnastamise eest, kui neid pole seostatud ülesande olukorraga, punkte mitte anda.

2.

- Leitud, koos põhjendusega, telefoni puudumise märkamise kohast tavakiirusega kooli jõudmiseks vajalik aeg 10 min: 2 p
- Leitud telefoni märkamise hetkel tundide alguseni jäänud aeg 15 min: 1 p
- Märgatud, et poolelt kooliteelt jääb koos telefoni järel käimisega läbida $\frac{3}{2}$ tavalisest kooliteest: 1 p
- Korrektselt leitud selle tee jooksuga läbimise aeg 15 min: 2 p
- Tehtud õige lõppjäreldus: 1 p

Ainult õige vastuse (jah) eest ilma selgitusteta anda 0 punkti.

3.
- Täielik a-osa lahendus: 4 p

  Sealhulgas:
  - Tehtud oletus, et $a + b = \text{VÜK}(a, b)$ mingite positiivsete täisarvude a ja b korral: *1 p*
  - Viidud korrektselt seos kujule $a' + b' = a'b'$, kus a' ja b' on ühistegurita: *1 p*
- Täielik b-osa lahendus: 3 p

  Sealhulgas:
  - Esitatud sobiv näide 3 arvuga: *2 p*

Ainult õige vastuse (ei, jah) eest ilma selgitusteta anda 0 punkti.

4.
- Viidud võrrand kujule $x^2 + (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-w)^2 + w^2 = 6$: 1 p
- Aru saadud, et vasaku poole liidetavate võimalikud väärtused on 0, 1 ja 4: 2 p
- Põhjendatud, et vasaku poole liidetavatest üks on väärtusega 4: 1 p
- Märgitud, et vasaku poole liidetavatest kaks peavad olema väärtusega 0: 1 p
- Vaadatud ammendavalt läbi kõik juhud ja leitud, et alati on mingi kahe muutuja väärtused võrdsed: 2 p

Ainult õige vastuse (ei) eest ilma selgitusteta anda 0 punkti.

5.
- Märgitud, et A' asub kolmnurga ABC tipu A juures oleva sisenurga poolitajal (või et B' on tipu B juures oleva sisenurga poolitajal, või et C' on tipu C juures oleva sisenurga poolitajal): 1 p
- Märgitud, et B' asub kolmnurga ABC tipu A juures oleva välisnurga poolitajal (või mõni ülejäänud 5 analoogilisest väitest): 2 p
- Tehtud skeemi eelmises reas hinnatud tähelepanek kolmnurga ABC sama välisnurga ja kolmnurga $A'B'C'$ teise sobiva tipu jaoks: 1 p
- Eelneva põhjal järeldatud, et AA' (või BB' või CC') on kolmnurga $A'B'C'$ kõrgus: 1 p
- Tehtud skeemi eelmises reas hinnatud järeldus ka ülejäänud kahe kõrguse osas: 1 p
- Tehtud lõppjäreldus: 1 p

6. Anname eraldi skeemid kahe erineva lähenemise puhuks.

Skeem žürii lahendusele 1:
- Leitud viis ühe korruse kõigi tubade läbikäimiseks täpselt üks kord (nt spiraal): 1 p
- Leitud viis kahe korruse läbimised jadasse ühendada: 2 p
- Ühendatud kuue korruse läbimised jadasse nii, et kuuenda ja esimese korruse vahel säilib läbimata tubade ahel: 3 p

- Näidatud, kuidas ringkäik ülesande tingimustele vastavalt lõpetada: 1 p

Skeem žürii lahendusele 2:

- Leitud viis ühe korruse kõigi tubade läbikäimiseks täpselt üks kord nii, et lõpuks jõutakse tuppa, kust alustati: 2 p
- Esitatud idee teha kahest järjestikusest sammust üks esimesel ja üks kuuendal korrusel, läbides ühtlasi kahe püstaku kõik toad: 3 p
- Põhjendatud, et korruse tubade (või teel läbitavate uste) arvu paarisarvulisuse tõttu saab need liikumised ühendada ülesande tingimustele vastavaks teekonnaks: 2 p

Ainult õige vastuse (jah) eest ilma selgitusteta anda 0 punkti.

Eesti LXIII matemaatikaolümpiaad

30. jaanuar 2016 Piirkonnavoor **11. klass**

Hindamisjuhised

1.
- Avaldatud kas isa või ema netopalk tulumaksuvaba miinimumi kaudu: 2 p
- Avaldatud ka teise vanema netopalk tulumaksuvaba miinimumi kaudu: 2 p
- Leitud, et isa ja ema keskmine netosissetulek võrdsustub 9 aastat pärast isa tööleasumist: 2 p
- Antud õige lõppvastus: 1 p

Ainult õige vastuse (8 aastat) eest ilma selgitusteta anda 1 punkt.

2. Anname eraldi skeemid erinevate lähenemiste puhuks.

Skeem koordinaatidega lahendusele:
- Võetud kasutusele koordinaadid, mille alguspunkt on ringjoone keskpunktis: 1 p
- Arvutatud kõigi kuue tipu koordinaadid: 2 p
- Avaldatud vektorite $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AF}$ koordinaadid: 2 p
- Leitud vektori $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF}$ koordinaadid: 1 p
- Tehtud õige lõppjäreldus: 1 p

Skeem lahendusele, mis avaldab kõik vektorid läbi $\overrightarrow{AO}$:
- Avaldatud kõik vektorid summana, kus üks liidetav on $\overrightarrow{AO}$: 2 p
- Korrektselt põhjendatud, et $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = 6\overrightarrow{AO}$: 4 p
- Tehtud õige lõppjäreldus: 1 p

Skeem lahendusele, mis kasutab vastaskülgede paralleelsust:
- Avaldatud $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AF}$ või $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$: 2 p
- Avaldatud samamoodi ka teine vektoritest $\overrightarrow{AC}$ ja $\overrightarrow{AE}$: 2 p
- Korrektselt leitud, et $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{AD}$: 2 p
- Tehtud õige lõppjäreldus: 1 p

Vastaskülgede paralleelsuse põhjendamata jätmise eest punkte mitte alandada.

Skeem rööpkülikureeglit kasutavale lahendusele:
- Ammendavalt põhjendatud võrdus $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AO}$: 2 p

- Põhjendatud ka võrdus $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DO}$ (piisab viitest analoogiale eelnevaga): 1 p
- Märgatud, et $\overrightarrow{DO} = -\overrightarrow{AO}$: 1 p
- Korrektselt leitud, et $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{AD}$: 2 p
- Tehtud õige lõppjäreldus: 1 p

Ainult õige vastuse (6) eest ilma selgitusteta anda 1 punkt.

3. Anname eraldi skeemi kahe erineva lähenemise puhuks.

Skeem jaguvust SÜT$(a, b) \mid a - b$ *kasutava lahenduse jaoks (žürii lahendus 1):*

- Põhjendatud, et SÜT$(a, b) \leqslant a - b$, kus $a > b$: 3 p
- Järeldatud, et $a + b +$ SÜT$(a, b) \leqslant 2a$: 2 p
- Tehtud õige lõppjäreldus: 2 p

Skeem ühistegurita arvudele taandamist kasutava lahenduse jaoks (žürii lahendus 2):

- Kasutatud võrdust $a + b +$ SÜT$(a, b) =$ SÜT$(a, b) \cdot (a' + b' + 1)$: 1 p
- Märgitud, et $a' > b'$ korral $a' + b' + 1 \leqslant 2a'$: 2 p
- Korrektselt järeldatud, et $a + b +$ SÜT$(a, b) \leqslant 2a$: 2 p
- Tehtud õige lõppjäreldus: 2 p

Ainult õige vastuse (ei) eest ilma selgitusteta anda 0 punkti.

4.
- Jõutud võrduseni $q = \dfrac{p^2+1}{4} - \left|x + \dfrac{p}{2}\right|$: 2 p
- Näidatud, et $x = -\dfrac{p}{2} + \left(\dfrac{p^2+1}{4} - q\right)$ või $x = -\dfrac{p}{2} - \left(\dfrac{p^2+1}{4} - q\right)$: 2 p
- Põhjendatud, et $\dfrac{p^2+1}{4} - q \geqslant \dfrac{1}{2}$: 2 p
- Sellele võrratusele tuginedes järeldatud, et leitud lahendid rahuldavad algset võrrandit: 1 p

5. Anname eraldi skeemid kahe erineva lähenemise puhuks.

Skeem Pythagorase teoreemi kasutavale lahendusele:

- Põhjendatud, et punktid O, A ja B asuvad ühel sirgel: 2 p
- Põhjendatud, et rombi $APBQ$ diagonaalide lõikepunkt on lõigu PQ keskpunkt: 1 p
- Rakendatud Pythagorase teoreemi kolmnurgas OSA (või OSB): 1 p
- Rakendatud Pythagorase teoreemi kolmnurgas PSA (või mõnes sellega võrdses kolmnurgas): 1 p
- Teisendustega jõutud võrduseni $|OP| \cdot |OQ| = u^2 - v^2$: 2 p

Skeem koosinusteoreemi kasutavale lahendusele:

- Põhjendatud, et punktid O, A ja B asuvad ühel sirgel: 2 p
- Rakendatud koosinusteoreemi kolmnurgas AOP nurga $\angle AOP$ suhtes: 1 p
- Rakendatud koosinusteoreemi kolmnurgas AOQ nurga $\angle AOQ$ suhtes: 1 p
- Lahendus lõpule viidud: 3 p

  Sealhulgas:

  - Märgitud, et $|OP|$ ja $|OQ|$ on ühe ja sama ruutvõrrandi $x^2 - 2u\cos\gamma \cdot x + u^2 - v^2 = 0$ lahendid: *2 p*

6.
- Näidatud, et antud ringi sisse jäävaid täisarvuliste koordinaatidega punkte on vähemalt niisama palju kui üleni ringi sisse jäävate täisarvuliste koordinaatidega tippudega ühikruute: 1 p
- Järeldatud, et ringi sisse jäävate täisarvuliste koordinaatidega punktide arv on vähemalt niisama suur kui üleni ringi sisse jäävate täisarvuliste koordinaatidega tippudega ühikruutude kogupindala: 1 p
- Põhjendatud, et üleni ringi sisse jäävate täisarvuliste koordinaatidega tippudega ühikruutude poolt kaetud kogupind on vähemalt niisama suur kui ringil raadiusega $100 - \sqrt{2}$: 2 p
- Põhjendatud, et ringil raadiusega $100 - \sqrt{2}$ on pindala suurem kui 30000: 3 p

Ainult algse ringi pindala 10000π väljaarvutamise ja väite eest, et see on suurem kui 30000, anda 1 punkt.

Hindamisjuhised

1.
- Tuletatud võrrand $q^{20} + q^{40} = 20$: 2 p
- Sellest lähtuvalt saadud $q^{10} = 2$ (muud võimalused välistatud): 2 p
- Näidatud, et otsitav suhe avaldub kujul $q^{30} + q^{60}$: 2 p
- Leitud, et $q^{30} + q^{60} = 72$: 1 p

Ainult õige vastuse 72 eest ilma selgitusteta anda 1 punkt.

2.
- Ülesanne taandatud arvude 6^9 ja 10^7 võrdlemisele: 5 p

  Sealhulgas:
  - Märgitud, et antud arvude suurusvahekord on sama mis arvudel $9 \log 6$ ja 7: *2 p*
  - Märgitud, et antud arvude suurusvahekord on sama mis arvudel $\log 6^9$ ja $\log 10^7$: *2 p*
- Arvutades leitud õige suurusvahekord: 2 p

Ainult õige vastuse (suurem) eest anda 0 punkti.

3.
- Põhjendatud, et $n \leqslant 3$: 5 p

  Sealhulgas:
  - Põhjendatud, et kui arv kujul $p_1 + p_2 + \ldots + p_n$, kus $n \geqslant 2$, on algarv, siis on ta paaritu (piisab, kui näidatud kahe järjestikuse konkreetse n jaoks, nt $n = 2$ ja $n = 3$): *1 p*
  - Põhjendatud, et kui $p_1 + p_2 + \ldots + p_n$ ja $p_1 + p_2 + \ldots + p_{n+1}$, kus $n \geqslant 2$, on algarvud, siis $p_{n+1} = 2$ (piisab, kui näidatud kahe järjestikuse konkreetse n jaoks, nt $n = 2$ ja $n = 3$): *1 p*
  - Leitud, et kui jadas $p_1 + p_2, p_1 + p_2 + p_3, \ldots$ on vähemalt kolm järjestikust liiget algarvud, siis üks neist jagub (ehk võrdub) 3-ga (piisab, kui näidatud kolme esimese liikme jaoks): *2 p*
  - Tuletatud sellest vastuolu: *1 p*
- Toodud ülesande tingimusi rahuldav näide $n = 3$ jaoks (sobivad vaid $3, 2, 2$ ja $2, 3, 2$): 2 p

Ainult õige vastuse (3) eest ilma selgitusteta anda 1 punkt.

4. Anname eraldi skeemid kahe eri lähenemise puhuks.

Skeem trigonomeetilisele lahendusele (žürii lahendus 1):

- Põhjendatud võrdus $\cos\gamma = -\cos(\alpha+\beta)$: 1 p
- Võrdusest $\cos\gamma = -\cos(\alpha+\beta)$ asendatud tõestatava võrduse vasakus pooles $\cos\gamma$ ja kasutatud summa koosinuse valemit: 1 p
- Õigesti avatud sulud ja koondatud kõik sarnased liikmed: 2 p
- Saadud seoses valemit $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ sihipäraselt kasutatud: 1 p
- Lahendus lõpule viidud: 2 p

Kui võrdust $\cos\gamma = -\cos(\alpha+\beta)$ on sihipäraselt kasutatud ja on mainitud seos $\alpha+\beta+\gamma = 180^\circ$ või $\gamma = 180^\circ - (\alpha+\beta)$, siis anda skeemi esimese rea eest 1 punkt isegi juhul, kui muud põhjendust võrdusele $\cos\gamma = -\cos(\alpha+\beta)$ pole.

Skeem geomeetrilise lahenduse järgi (žürii lahendus 2):

- Vaadeldud kolmnurka nurkadega $90^\circ - \alpha$, $90^\circ - \beta$, $180^\circ - \gamma$, kus γ on ülesandes vaadeldava kolmnurga suurim nurk: 1 p
- Siinusteoreemist uues kolmnurgas saadud seosed selle kolmnurga külgede pikkuste ja ümberringjoone raadiuse vahel: 2 p
- Koosinusteoreemist uues kolmnurgas avaldatud nurga $180^\circ - \gamma$ vastaskülje pikkuse ruut: 1 p
- Kokku pannes saadud seos

  $$\cos^2\alpha + \cos^2\beta - 2\cos\alpha\cos\beta\cos(180^\circ - \gamma) = \sin^2\gamma$$

  või midagi ilmselgelt samaväärset (võib olla nt kordajaga $4R^2$): 1 p
- Lahendus lõpule viidud: 2 p

5. Anname eraldi skeemid kahe erineva lähenemise puhuks.

Skeem valemit $S = \dfrac{1}{2}ab\sin\gamma$ kasutavale lahendusele (žürii lahendus 1):

- Kasutatud võrdust $S_{ABCD} = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COD} + S_{DOA}$: 1 p
- Rakendatud igas kolmnurgas pindala valemit kahe raadiuse ja kesknurga siinuse kaudu: 1 p
- Sihipäraselt kasutatud fakti, et nurga siinus ei ületa arvu 1: 1 p
- Jõutud võrratuseni $S_{ABCD} \leqslant 2$: 2 p
- Põhjendatud, miks sama võrratus kehtib ka juhul, kui ringjoone keskpunkt jääb väljapoole nelinurka: 1 p
- Koos põhendusega esitatud näide, kus nelinurga pindala on 2: 1 p

Skeem pindala suurendamist kasutavale lahendusele (žürii lahendus 2):

- Oletades, et nelinurga küljed pole kõik võrdse pikkusega, tehtud järeldus, et mingid kaks naaberkülge on erineva pikkusega: 1 p
- Vaadeldud olukorda, kus need kaks naaberkülge oleksid võrdse pikkusega, säilitades ülejäänud kahe külje pikkused: 1 p

- Põhjendatud, et muudetud olukorras on vaadeldavast kahest naaberküljest ja nende otspunkte ühendavast kõõlust moodustuv kolmnurk suurema pindalaga kui algses olukorras: 2 p
- Järeldatud, et suurima pindalaga nelinurk on korrapärane (st ruut): 1 p
- Arvutatud ruudu pindala 2: 2 p

Ainult õige vastuse (2) eest ilma selgitusteta anda 1 punkt.

6. Anname eraldi skeemid kahe erineva lähenemise puhuks.

Skeem loendamist kasutavale lahendusele (žürii lahendus 1):

- Leitud paberile kirjutatud paaride koguarv n^2: 1 p
- Sellele tuginedes selgitatud, miks piisab näidata, et paare (i, j), kus $i + j \leqslant n$, on vähem kui $\frac{n^2}{2}$: 1 p
- Arvutatud selliste paaride arv summana $(n-1)+(n-2)+\ldots+1$: 2 p
- Tõestatud, et see summa on väiksem kui $\frac{n^2}{2}$: 3 p

Skeem vastavust kasutavale lahendusele (žürii lahendus 2):

- Näidatud, et üldisust kitsendamata võib eeldada, et arvud on $1, 2, \ldots, n$: 2 p
- Konstrueeritud vastavus $(i, j) \mapsto (n+1-j, n+1-i)$ või mõni sarnane ülesande lahendamiseks sobiv vastavus (ei pea olema algebraliselt kirja pandud, vaid võib olla ka nt ruudustikul joonistatud): 2 p
- Leitud mistahes kahe üksteisele vastava paari liikmete summade summa $2n+2$: 1 p
- Järeldatud, et paare liikmete summaga n või vähem on alla poole: 2 p

Keerulisemate vastavuste kasutamise korral peaks õpilane tõestama, et tegu on üksühese vastavusega (ja tõestuse puudumise eest tuleb punkte alandada).

Kui õpilane on hoolimata ülesande teksti järel olevast märkusest paarid (a, b) ja (b, a) samastanud, kuid oma tõlgenduse kohaselt ülesande täielikult lahendanud (see on keerulisem kui õige ülesanne), siis anda 7 punkti.

Kokkuvõtteks

Sel aastal vaatasid üleriigilise žürii parandajad läbi kõigis töödes kõik ülesanded.

Kõige raskemaks osutus ehk 11. klassi komplekt, kus pärast üleparandamist jäi parim õpilane maksimumist 5 punkti kaugusele. Ka 12. klassis on tulemuste tabeli keskel järsk langus, ehkki maksimumilähedasi tulemusi on selles klassis palju. Tasub märkida, et kolm tugevat 11. klassi õpilast lahendasid korraga mõlema klassi komplektid ja pääsesid mõlema klassi arvestuses ka lõppvooru.

10. klassi tulemuste tabel algab kohe järsu langusega (ehkki maksimumtulemus saadi ka selles klassis kätte), sest ülesanded 4 ja 5 käisid enamikule üle jõu. Et aga ülesanded 1, 2 ja 6 osutusid kõik väga lihtsaks, siis n-ö tavalise raskusega oli vaid ülesanne 3. Sellest tulenevalt oli selle klassi komplekt üsna madala eristavusega. Enamik meile saadetud töid said pärast üleparandamist 21–26 punkti.

Tavatult lihtsaks osutus seekord 9. klassi komplekt.

Kontrollijate kommentaarid (Terje Hõim, Reimo Palm)

Test

Testi kohta kommentaare pole.

Ülesanne 1

Mitmed lahendajad väitsid ilma põhjendamata, et nurk BFC on täisnurk. Sel juhul lahutasime tulemusest 2 punkti.

Samuti väideti ilma põhjendamata, et kolmnurk GFH on võrdhaarne. Sel juhul lahutasime tulemusest 1 punkti.

Ülesanne 2

Punkt anti juurde, kui oli vastus õigesti leitud, kasutades $\mathrm{km/h}$ asemel ühikut $\mathrm{km/min}$.

Ülesanne 3

Mitmed lahendajad olid uurinud näidet konkreetsete arvudega ja teinud selle näite põhjal järelduse, et sobivad arvud on a ja c. Sellised tööd said 2 punkti, sest üks näide ei ole piisav üldiste järelduste tegemiseks.

Teised lahendajad olid väitnud, et c (või a) jagub 3-ga põhjusel, et tegur c (a) esineb kolmes (kahes) korrutises. Selline põhjendus ei ole küllaldaselt veenev ning niisugused lahendused said sõltuvalt muude põhjenduste olemasolust 3–4 punkti.

Kontrollijate kommentaarid (Elts Abel, Mart Abel)

Test

Test oli üldiselt hästi parandatud. Probleeme tekitas täpse vastuse esitamine taandamata murru kujul (ülesanded 3 ja 8), mille eest mõnes töös oli punkte maha võetud, teistes mitte.

Ülesanne 1

Erinevaid arvamusi tekitas see, kuivõrd peab midagi põhjendama. Sageli oli teatavate lõikude ristseis või nurkade suurused õigesti kirja pandud, kuid põhjendamata. Komisjoni pandud punktid on pandud ühtlustamiseks, et samade vigade eest võetaks kõigis piirkondades sama palju punkte maha.

Soovituseks lahendajatele: kui võetakse kasutusele lisapunkte või lisajooni, peab puhtandis olema ka vastav joonis, millelt parandaja saaks jälgida, mida nende punktide või joonte all ikka täpselt mõeldud oli. Kui joonis puudus ja selgitused ei vastanud ülesande tekstis antud tähistustele, kaotas lahendaja punkte. Joonis vaid illustreerib lahendust, sealt midagi mõõtmise teel või „ilmselt“ kasutusele võtta ei saa.

Ülesanne 2

Põhiline probleem oli see, et peale ühe sobiva variandi leidmist teisi variante enam läbi kontrollima ei hakatud. Vahel oli üldse uuritud vaid sobivat varianti ilma teisi võimalikke variante mainimata.

Ülesanne 3

Kes idee ära tabas, lahendas üldjuhul ülesande lõpuni, kes ei tabanud, ei jõudnud eriti kusagile. Ümardamisel tehtud vead muutsid oluliselt vastust. Selle vältimiseks soovitame kasutada kümnendmurdude asemel harilikke murde.

Kontrollijate kommentaarid (Kalle Kaarli, Aleksei Lissitsin)

Test

Tundub, et test oli hea raskusastmega. Saabunud tööde seas olid täispunktid antud ainult kahes töös, aga paljud olid 18 ja 16 punktiga. Samuti ei olnud ühte kõige keerulisemat ülesannet. Parimatel töödel olid erinevad vead.

Ülesandes 8 muutsime hindamisskeemi nii, et ilma ühikuta õige vastuse eest anti täispunktid, kuna formaalselt võib ülesande tekstist aru saada nii, et ühikut pole vaja kirjutada.

Ülesanne 1

Kuigi ülesanne oli lihtne, ei ole siin liiga palju täispunkte, kuna maksimaalsuse täieliku tõestuse kirjapanek osutus suhteliselt raskeks. Tundub, et mõned õpilased ei tulnud üldse selle peale, et selline tõestus on vajalik.

Žürii poolt pakutud tõestus (nagu sageli juhtub) osutus liiga formaalseks ja peaaegu kõik täispunktidega tööd (hindamisskeemi esimese punkti kahe viimase alapunkti asemel) jälgisid järgmist 2 võimalust (mis on tegelikult peaaegu samad):

- Arvud 1 ja 7 pole ilusad ja veel vähemalt üks arv on kas rea lõpus või arvude 1 ja 7 ees ning samuti ei saa olla ilus.
- Arvud 1 ja 7 pole ilusad ja teiste arvude seas leidub viimane ning see viimane ka ei saa olla ilus.

Märgime, et hindamisskeemi esimese punkti esimese alapunkti märkus oli olemas kõikides saabunud töödes, mis said rohkem kui 0 punkti. Seoses sellega kasutasime üleparandamisel järgmist täiendavat hindamisskeemi (read esindavad erinevaid tüüpilisi mõttekäike, mille eest antavaid punkte ei summeeritud).

- ◦ Toodud sobiv näide, kuid vastus on 8. 4 p
- ◦ Toodud sobiv näide ja õige vastus, kuid pole tõsist katset tõestada vastuse maksimaalsust. 5 p

- Toodud sobiv näide, õige vastus ja proovitud tõestada selle maksimaalsust, kuid tõestus on poolik. Näiteks on väidetud, et rea viimane arv, mis ei ole 1 ega 7, ei saa ola ilus. Või näiteks on proovitud teha arvude 1 ja 7 paiknemise võimalike variantide läbivaatus (kas nad on kõrvuti rea lõpus, rea alguses, rea keskel või eraldi alguses ja lõpus või üks on keskel, teine mitte jne.), kuid see pole täielik. 6 p

Tundub, et parandajad mõnes kohas kasutasid peaaegu sama hindamisskeemi, kuigi muidugi mitte kõikjal.

Ülesanne 2

Võib öelda, et see on lihtne ülesanne tekstist arusaamise peale. Ja tõepoolest, peaaegu kõikides töödes olid probleemid seotud just arusaamisega. Ainult üksikutes töödes olid punktid maha võetud näiteks üldjuhu asemel konkreetsel näitel tõestamise tõttu.

Üleparandamisel järgisime žürii poolt etteantud hindamisskeemi. Märgime, et selle viimane punkt eraldi ei rakendunud kordagi. Seega kõige levinumad punktisummad olid 3, 5 ja 7.

Ülesanne 3

Ülesande raskusaste oli paras. Umbes pool lahendustest oli vähemalt rahuldav. Hästi teati kolmnurga ja nelinurga sisenurkade summat ja võrdhaarse kolmnurga alusnurkade omadust. Rohkem oli patustamist kolmnurkade võrduse tunnuste osas. Üks tüüpiline viga oligi, et täisnurksete kolmnurkade võrdus järeldati hüpotenuuside ja ühe paari kaatetite võrdusest tunnuse KNK abil. See muidugi ei ole õige, sest täisnurk ei asu hüpotenuusi ja kaateti vahel. Siiski, arvestades, et Pythagorase teoreemi üldiselt teatakse, ei karistanud me tavaliselt seda eksimust. Tõepoolest, kui kahel täisnurksel kolmnurgal on võrdsed hüpotenuusid ja üks paar kaateteid, siis on ka teine paar kaateteid võrdsed ja rakendub tunnus KKK.

Teine viga, mis mitmes töös esines, on natuke ootamatum. Nimelt väideti, et nelinurgad, mille vastavad nurgad on võrdsed, on sarnased. Hindamisjuhend oli aktsepteeritav. Kohtadel hindamise kvaliteet oli üle rahuldava. Vaid kahe töö puhul pidime hinnet drastiliselt vähendama.

Ülesanne 4

Kui ülesande eesmärk oli see, et igaüks vähemalt ühe ülesande edukalt lahendaks, siis see eesmärk sai täidetud. Kohtadel anti selle eest enamasti 7, üksikutel juhtudel 6 punkti, kusjuures enamasti oli punkt maha võetud arvutusvea eest. Tüüpiline lahendaja taipas kohe, et kui reas seisab n tantsijat, siis järgmise salmi algul lisandub neile $n-1$ tantsijat ja kokku saab siis tantsijaid olema $2n-1$. Kuna salme oli ainult 10, oli väga kerge kokku lugeda, et lõpuks koguneb tantsijaid 513. Enamusel juhtudel jäi kohapeal pandud hinne alles. Korrigeerima pidime nende tööde hindeid, kus lahendaja oli püüdnud asjale „teaduslikumalt“ läheneda, st rakendas induktsioonimeetodit ilma induktsioonihüpoteesi põhjendamata. Näiteks, arvutati välja tantsijate arv neljanda salmi algul ja kirjutati: „on näha, et iga salmi algul lisandub tantsijaid 2 korda rohkem kui eelmise salmi algul“. Edasi lähtuti juba sellest tõestamata tähelepanekust. Selliste lahenduste hinnet vähendasime 2 punkti võrra. Oli üks töö, kus hüpotees tehti juba teise salmi põhjal. Sellel vähendasime hinde 2 punktile.

Kontrollijate kommentaarid (Oleg Košik, Janno Veeorg)

Ülesanne 1

Ülesanne oli lihtne. Enim esines lahendusi, kus kasutati standardset jagamisalgoritmi, kuid oli palju ka lahendusi, mis kasutasid üheteistkümnega jaguvuse tunnust. Peamised vead olid arvutusvead ja üheteistkümnega jaguvuse tunnuse vale mäletamine. Samuti esines olukordi, kus ilma põhjendamata väideti, et mõni suur arv (näiteks 100010001) ei jagu üheteiskümnega.

Ülesanne 2

Ülesanne osutus väga lihtsaks. Kõik ülevaatusele jõudnud tööd said lõpuks 7 punkti peale kahe õpilase, kellelt võeti pisipuuduste eest üks punkt maha.

Ülesanne 3

Üllatavalt paljud õpilased ei teadnud, mis on vähim ühiskordne.

Ülesande a-osa oli raskemapoolsem, aga samas leidus sellele päris palju erinevaid lahendusi.

Ülesande b-osa oli lihtne ja üldiselt hästi lahendatud. Oli näha, et segadust tekitas b-osa hindamisskeem. Paljudes töödes, kus oli toodud korrektne näide ja põhjendatud, et see on sobiv, oli antud 2 punkti, kuigi oleks pidanud andma 3 punkti.

Ülesanne 4

Tegemist oli oodatult raskemapoolse ülesandega.

Mõned õpilased näitasid, et võib piirduda juhuga, kus kõik arvud on mittenegatiivsed, ja proovisid seejärel vahetult võrrelda omavahel algse võrduse parema ja vasaku poole liikmeid, eeldades mingit järjestust arvude x, y ja z vahel. Mõningate järjestuste korral võib see isegi sihile viia, kuid üldjuhul ei paista, et sellist lähenemist oleks võimalik mõistliku vaevaga lõpetada, näiteks juhul kui y ja z on neliku suurimad arvud. Seetõttu ülevaatamisel selliste lahenduste eest me punkte ei andud, kuigi piirkondades mõnikord osalisi punkte siiski anti.

Ülesanne 5

Ülesanne oli raske. Suuremas osas töödes polnud suudetud isegi korrektset joonist teha. Näiteks arvati paljudes töödes ekslikult, et külgringjooned peavad läbima kolmnurga tippe. Samuti oli levinud arvamus, et kolmnurga siseringjoone keskpunkt on mediaanide lõikepunkt. Paljudes töödes arvati ekslikult, et kolmnurgad ABC ja $A'B'C'$ on sarnased.

Arvestatav hulk töid olid sellised, kus oli pandud kirja mingi hulk tõeseid (aga kasutuid) väiteid ja siis järsku öeldud, et sellest järeldub, et AA' ja $B'C'$ on risti. Sellistes olukordades oli tihti arusaamatult palju punkte antud. Üldse jäi silma, et seda ülesannet oli väga leebelt hinnatud ja palju põhjendamata punkte antud.

Ülesanne 6

Ülesanne oli üle ootuste lihtne. Enamasti lahendati žürii lahendustega 1 ja 2, aga leidus ka teisi lahendusmeetodeid. Lahendused enamasti esitati ilusate jooniste abil, kus oli selgelt näha, kuidas peab inspektor igal sammul liikuma.

Sagedasemaks puudujäägiks (mis aga ei esinenud väga tihti), oli žürii lahenduse 2 korral korrektse põhjenduse puudumine, miks inspektori teekond õigel korrusel lõpeb.

Kontrollijate kommentaarid (Härmel Nestra, Triinu Veeorg)

Ülesanne 1

See ülesanne oli väga lihtne ja ka piirkondades pandud punkte muutsime vaid üksikutel juhtudel. Erinevused piirkondades kasutatud hindamisviisides olid seotud erinevate hooletusvigade eest punktide alandamisega. Ühtlustamisel kasutasime järgnevat täiendavat skeemi (read esindavad erinevaid vigadega lahendusi, mille eest antavaid punkte ei summeeritud).

- Täislahendus, aga antud vastuseks ema töötamise aeg alates isa tööleasumise algusest (mitte isa töökaotusest nagu nõutud): 6 p
- Täislahendus, näpuveaga arvutustes: 6 p
- Muidu õige lahenduskäik, kuid arvutuses unustatud palgale liita tulumaksuvaba osa: 5 p
- Lahendus, kus tulumaksuvaba osaga palgas pole üldse arvestatud: 1 p

Ülesanne 2

Ülesanne oli võrdlemisi lihtne, täislahendusi leidus mitmeid. Siiski oli paljudel lahendustel olulised kohad selgitamata.

Üks levinud viga oli vektorite pikkuste summa leidmine, kuid ülesandes oli küsitud vektorite summa pikkust ning need on samad vaid juhul, kui kõik vektorid on samasuunalised, mis antud ülesandes ei kehtinud.

Ülesanne 3

Ülesanne oli keskmise raskusega ja need õpilased, kellele lahendusidee tuli, jõudsid enamasti ka lõpuni.

Paljud lahendajad aga eeldasid, et võrratus kehtib kõige tõenäolisemalt siis, kui SÜT(a,b) on a ja b-ga võrreldes maksimaalne võimalik, ehk pool arvust $\max(a,b)$. See väide paraku ei kehti ning tõestamine, et sellisel juhul tõepoolest võrratus ei saa kehtida, ei aita lahendusele lähemale. Seetõttu selle juhu läbivaatamise eest punkte ei antud. Samuti ei antud punkte näidete eest, kus

a-le ja b-le valiti mingi täisarvuline väärtus ning näidati, et sellel väärtusel võrratus ei kehti.

Ülesanne 4

See ülesanne oli päris raske ja kõige rohkem kaotati punkte just kontrolli osast. Valdav enamus õpilasi jättis põhjedamata, et leitud kaks lahendit rahuldavad esialgset võrrandit, kuigi on teada, et juurvõrrandil võib üldjuhul võõrlahendeid tekkida. Võõrlahendite võimaluse ignoreerimisest tulenevalt ei osatud ka kuidagi kasutada ülesandes antud eeldust, et võrrandi $x^2 + px + q = 0$ lahendid on täisarvud, ja paistis, et võõrlahendite välistamist ei nõudnud ka enamik kohalikke parandajad.

Et arvestatav osa õpilastest kontrollis siiski lahendite erinevust, siis arvestasime seda eraldi 1 punkti väärsena. Žürii koostatud hindamisskeemi eelviimase rea (võrratuse $\frac{p^2+1}{4} - q \geqslant \frac{1}{2}$) kaalu vähendasime vastavalt kahelt ühele punktile.

Piirkondades oli tihti antud muidu vähe punkte saanud töödele võrreldes skeemiga 1 lisapunkt mitmesuguste teisenduste eest, mida töös ei olnud rakendatud, aga mis oleks võinud kasulikuks osutuda, kui õpilane oleks lahendamisega kaugemale jõudnud. Püüdsime selle lisapunkti andmist ühtlustada kõigis meile saadetud töödes.

Ülesanne 5

Kuigi mõned õpilased kasutasid lahenduses koosinusteoreemi, jõudis neist sihile mõni üksik ja keegi ei läinud lõpuni žürii lahenduse 2 moel. Valdavas enamikus meile saadetud töödest kasutati Pythagorase teoreemi sarnaselt žürii lahendusega 1, mõnes töös esines ka selle teisend trigonomeetriliste funktsioonide kaudu. Mõned õpilased ei olnud ka ühtki head ideed leidnud.

Punktiparandused on peamiselt seotud sellega, kuivõrd ühes või teises piirkonnas nõuti väidete põhjendamist. Näiteks maksis skeemi järgi 2 punkti põhjendus, et punktid O, P ja Q on ühel sirgel, 1 punkti aga rombi omaduse kasutamine võrduse $|PS| = |SQ|$ põhjendamisel. Püüdsime puuduvate põhjenduste eest kõigil ühtviisi punkte alandada, aga et lahendused läksid üsna erinevaid teid pidi, siis eriti rombi omadustele viitamist ühtviisi nõuda oli meilegi keeruline. See, et punktid O, P ja Q asuvad ühel sirgel, kasutas ühel või teisel moel kasvõi vargsi iga lahendus, mistõttu sellega oli lihtsam.

Mitmes töös oli püütud läheneda vektoritega, kuid kõigis neis mõttekäikudes oli kuskil vektor ja tema pikkus omavahel segi aetud, mistõttu need tööd kaotasid üleparandamisel neile piirkonnas antud punktid.

Ülesanne 6

Ülesanne oli oodatult raske, täislahendusi leidus vaid üksikuid.

Enamasti jäi lahendamine selle taha kinni, et ei teatud, kust alustada või arvutati suure ringi pindala ja väideti, et täisarvulise koordinaatidega punkte peab olema vähemalt sama palju kui on ringi pindala ühikuline väärtus, mis paraku ei vasta tõele. Samuti vaadati erijuhtu, kus ringi keskpunkt on koordinaatide alguspunktis – kui see juht oli korrektselt lahendatud, andsime selle eest 1 punkti.

Kontrollijate kommentaarid (Urve Kangro, Kairi Hennoch)

Ülesanne 1

See ülesanne oli küllaltki hästi lahendatud ja ka punktimuudatusi oli vähe. Paljudes lahendustes oli kasutatud geomeetrilise jada summa valemit, mida siin tegelikult otseselt vaja ei läinudki. Sellisel juhul tuleks küll eraldi vaadelda juhtu, kus $q = 1$, mida üldiselt ei tehtud. Kuna see juht ilmselt ülesande tingimusi ei rahulda, siis said ka sellised lahendused täispunktid.

Ülesanne 2

See ülesanne oli küllaltki hästi lahendatud. Punktimuudatusi põhjustas peamiselt see, et paljud piirkondade parandajad polnud arvutusvigu tähele pannud. Sellises ülesandes, kus vastus sõltub arvutuste täpsusest (leidus ka töid, kus arvutusvigade tõttu oli saadud vale vastus), on see siiski oluline viga.

Ülesanne 3

Selles ülesandes oli üks levinumaid vigasid arvu 1 algarvuks pidamine. Teiseks oluliseks veaks oli ainult juhu $3, 2, 2$ vaatamine, st näidati, et kolme järjestikuse paaritu arvu hulgast üks jagub kolmega, ja sellest otse järeldati, et rohkem kui kolm liiget jadas olla ei saa. Aga juhul $2, 3, 2$ ei ole esimeseks kolmeks summaks kolm järjestikust paaritut arvu, seega vajab ikkagi põhjendamist, miks sellel juhul neljandat liiget olla ei saa.

Ülesanne 4

Seda ülesannnet polnud paljud üldse lahendanud. Kuna tegu oli kolmnurga nurkadega, siis ilmselt tuli kusagil kasutada fakti, et $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$. Kes sellest seosest juba ühe nurga teiste kaudu avaldasid, need ka üldjuhul sihile jõudsid.

Žürii teise lahenduse peale keegi ei tulnud, küll oli aga ühes töös lihtsalt avaldatud kõik nurgad koosinusteoreemist külgede kaudu ja asendatud antud avaldisse. See on veel üks võimalus antud võrdust tõestada, kuigi arvutused lähevad üsna pikaks.

Ülesanne 5

Selles ülesandeis esines palju töid, kus vaadeldi ainult erijuhte, nagu ruut, ristkülik, trapets, või nelinurk, mille üks diagonaal on ringi diameetriks. Lahendust stiilis „Kuna ring on korrapärane, siis mahub talle kõige paremini sisse korrapärane kujund, seega peab maksimaalse pindalaga nelinurk olema ruut“ esines üsna mitu korda, kusjuures sellise lahenduse eest oli piirkonniti väga erinevaid punkte antud. Sellised lahendused said 1 punkti vastuse eest. Žürii esimest lahendust kasutanud töödes oli levinud veaks selle juhu tähelepanuta jätmine, kus ringjoone keskpunkt asub nelinurgast väljas. Paljudel juhtudel kaotati punkte ka näite puudumise eest – kui on hinnatud, et nelinurga pindala ei saa olla suurem kui 2, siis tuleb tuua ka näide nelinurgast, mille pindala on 2.

Ülesanne 6

Selles ülesandes oli paljudes töödes jäänud paarid kujul (a, a) arvesse võtmata. Kuna see ülesande sisu oluliselt ei muutnud ning lahendus läks isegi veidi raskemaks, siis hindasime selliseid töid 6 punktiga. Millegipärast oli mitmetes töödes ülesandest aru saadud nii, et kõik paberil olevad arvud on suuremad kui 1. Mitmetes töödes oli eeldatud, et paberile on kirjutatud arvud $1, 2, \dots, n$ ilma näitamata, et piisab vaid selle juhu vaatlemisest. Kui kõik ülejäänu oli õige, siis selliseid töid hindasime 6 punktiga.

Mõnedes töödes oli vaadeldud ainult mingit konkreetset n väärtust, sellised tööd said reeglina 0 punkti.