Piirkonnavoor 2015

Eesti LXII matemaatikaolümpiaad

7. veebruar 2015 Piirkonnavoor **7. klass**

I osa. *Lahendamisaega on 40 minutit.*
Sellele lehele kirjuta ainult vastused, lahendamiseks võid kasutada lisapaberit.
Iga ülesande õige vastus annab 2 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Leia avaldise $3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3$ väärtus.

. . . .

2. Leia murdudest $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{7}$ ja $\frac{2}{9}$ suurima ja vähima summa.

. . . .

3. Test algab kell 9.48 ja kestab täpselt kaks ja veerand tundi. Mis kell test lõpeb?

. . . .

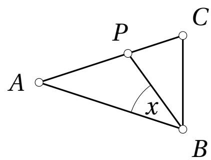
4. Leia suurim ühekohaline arv, millega jagub summa $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 + 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10$.

. . . .

5. Kahe sõbra vanused täisaastates on 10 ja 20 vahel ning nende vanuste korrutis on võrdne ühe naturaalarvu kuubiga. Leia mõlema sõbra vanused.

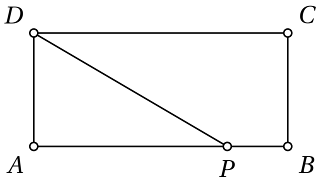
. . . ., ...

6. Kolmnurga ABC küljed AB ja AC on võrdse pikkusega ning nurga ACB suurus on 70°. Küljel AC võetakse punkt P nii, et BP ja BC on võrdse pikkusega. Leia tähega x tähistatud nurga suurus.



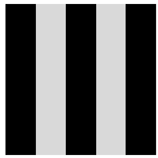
. . . .

7. Ristküliku $ABCD$ külje AB pikkus on 10 cm. Küljel AB asub selline punkt P, et PB pikkus on 2 cm ja kolmnurga DAP pindala on 12 cm^2. Leia ristküliku $ABCD$ pindala.



. . . .

8. Halli värvi ruut jaotatakse 5 võrdseks ristkülikuks joonisel näidatud viisil, kaks äärmist ja keskmine neist värvitakse mustaks. Kui suur osa ruudu kontuurist jääb halli värvi?



. . . .

9. Kolmnurga nurkade suurused α, β ja γ on sellised, et $\alpha + \beta + 7\gamma = 270^\circ$. Leia γ.

. . . .

10. Täispuidust risttahukal, mille mõõtmed on 3 cm × 4 cm × 5 cm, värvitakse kõik tahud siniseks. Risttahukas poolitatakse ühe lõikega, mis läbib risttahuka kõik pikimate servade keskpunktid. Leia tekkinud kahe tahuka siniseks värvimata tahkude pindalade summa.

. . . .

Eesti LXII matemaatikaolümpiaad

7. veebruar 2015 Piirkonnavoor **8. klass**

I osa. *Lahendamisaega on 40 minutit.*
Sellele lehele kirjuta ainult vastused, lahendamiseks võid kasutada lisapaberit.
Iga ülesande õige vastus annab 2 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Leia avaldise $\dfrac{2013 - 2014}{3} + \dfrac{2014 - 2015}{3} - \dfrac{2015 - 2016}{3}$ väärtus.

. . . .

2. On teada, et $g + f = 5$ ja $g \cdot f = 3$. Leia $g^2 + f^2$.

. . . .

3. Arvud 1 kuni 100 kirjutatakse kahte ritta, nagu näidatud joonisel

$$\begin{array}{cccccccccccc} 1 & 99 & 3 & 97 & 5 & 95 & 7 & \ldots\ldots\ldots & 53 & 49 & 51 \\ 100 & 2 & 98 & 4 & 96 & 6 & 94 & \ldots\ldots\ldots & 48 & 52 & 50 \end{array}.$$

Mitme võrra on alumises reas olevate arvude summa suurem ülemises reas olevate arvude summast?

. . . .

4. Leia vähim positiivne täisarv, millega arv $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 + 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10$ ei jagu.

. . . .

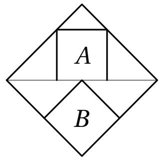
5. Kolmel sõbral on kokku 75 mudelautot. Karlil on autosid täpselt 2 korda vähem kui Albertil ja Paulil kokku. Paulil on autosid täpselt 5 võrra vähem kui ühel tema kahest sõbrast. Mitu mudelautot on Albertil?

. . . .

6. Kolmnurga nurkade suurused α, β ja γ on sellised, et $\alpha + \beta + 2\gamma = 200^\circ$ ja $2\alpha + \beta + \gamma = 250^\circ$. Leia β.

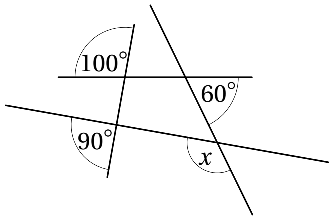
. . . .

7. Ruutu joonestatakse joonisel näidatud viisil ruudud pindaladega A ja B. Leia $A : B$.



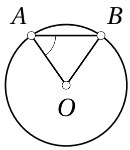
. . . .

8. Neli sirget lõikuvad joonisel näidatud viisil. Leia tähega x tähistatud nurga suurus.



. . . .

9. Ringjoonel keskpunktiga O võetakse punktid A ja B nii, et kaar AB moodustab viiendiku kogu ringjoonest. Leia nurga OAB suurus.



. . . .

10. Täispuidust risttahukal, mille mõõtmed on 3 cm × 4 cm × 5 cm, värvitakse kõik tahud siniseks. Risttahukas poolitatakse kõigepealt lõikega, mis läbib kõik risttahuka pikimate servade keskpunktid. Seejärel poolitatakse omakorda kumbki tekkinud tahukas lõikega, mis läbib nende pikimate servade keskpunktid. Leia tekkinud nelja tahuka siniseks värvimata tahkude pindalade summa.

. . . .

Eesti LXII matemaatikaolümpiaad

7. veebruar 2015 Piirkonnavoor **9. klass**

I osa. *Lahendamisaega on 40 minutit.*
Sellele lehele kirjuta ainult vastused, lahendamiseks võid kasutada lisapaberit.
Iga ülesande õige vastus annab 2 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Leia avaldise $\frac{601}{6} + \frac{301}{3} - \frac{201}{2}$ väärtus.

. . . .

2. Kõik positiivsed täisarvud kirjutatakse suuruse järjestuses 5-veerulisse tabelisse, igas reas vasakult paremale.

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

Mitmendas reas olevate arvude summa on 2015?

. . . .

3. Alla ja Pauli telefoniraamatutes on kokku 120 erinevat telefoninumbrit. Alla telefoniraamatus on 20 telefoninumbrit rohkem kui Pauli omas ning 30 telefoninumbrit on nende raamatutes ühesugused. Mitu telefoninumbrit on Alla telefoniraamatus?

. . . .

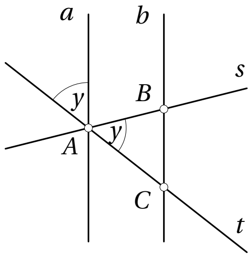
4. Leia vähim positiivne täisarv, millega arv $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 + 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 17$ ei jagu.

. . . .

5. Kolmnurga nurkade suurused α, β ja γ on sellised, et $\alpha + 2\beta + 2\gamma = 300^\circ$ ja $\alpha + \beta + 3\gamma = 200^\circ$. Leia β.

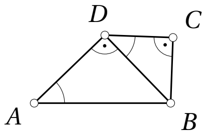
. . . .

6. Sirge a lõikub sirgetega s ja t punktis A, sirge b aga lõikub sirgetega s ja t vastavalt punktides B ja C. Sirged a ja b on paralleelsed. Kahe joonisel tähistatud nurga suurus on y ja nurga ABC suurus on $80°$. Leia y.



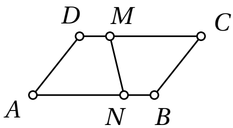
. . . .

7. Nelinurgas $ABCD$ on $|AB| = 18$ cm ja $|BC| = 8$ cm. Nurgad ADB ja BCD on täisnurgad ning nurgad DAB ja BDC on suuruselt võrdsed. Leia diagonaali DB pikkus.



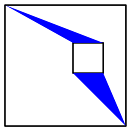
. . . .

8. Nelinurk $ABCD$ on rööpkülik. Küljel AB võetakse punkt N nii, et NB on 3 korda lühem kui AN. Küljel DC võetakse punkt M nii, et DM on 3 korda lühem kui MC. Lõigu MN pikkus on 8 cm. Rööpküliku $ABCD$ ümbermõõt on 52 cm. Leia nelinurga $NBCM$ ümbermõõt.



. . . .

9. Ruutu küljepikkusega 8 cm joonestatakse ruut küljepikkusega 2 cm. Ruutude vastavad küljed on paralleelsed. Leia kahe joonisel tumedaks värvitud kolmnurga pindalade summa.



. . . .

10. Täispuidust risttahukal, mille mõõtmed on 3 cm × 4 cm × 5 cm, värvitakse kõik tahud siniseks. Risttahukas poolitatakse kõigepealt lõikega, mis läbib kõik risttahuka pikimate servade keskpunktid. Seejärel poolitatakse kumbki saadud tahukas omakorda lõikega, mis läbib nende pikimate servade keskpunktid. Viimaks poolitatakse iga tekkinud tahukas veelkord lõikega, mis läbib nende pikimate servade keskpunktid. Leia kõigi lõpuks tekkinud tahukate siniseks värvimata tahkude pindalade summa.

. . . .

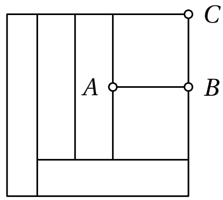
Eesti LXII matemaatikaolümpiaad

7. veebruar 2015 Piirkonnavoor **7. klass**

II osa. *Lahendamisaega on 2 tundi.*
Ülesannete lahendused kirjuta eraldi lehele.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti. Ainult vastusest ei piisa!
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Katil on kolm värviraamatut, milles on kokku 84 pilti. Piltidest veerand on tal juba värvitud. Esimeses raamatus on 12 pilti rohkem kui teises ning neis kahes raamatus on värvitud pilte kokku 10. Kolmandas raamatus on värvimata pilte 4 võrra vähem kui värvitud pilte. Mitu pilti on igas raamatus?

2. Ruut jaotatakse viie sirglõiguga kuueks võrdse pindalaga ristkülikuks, nagu joonisel näidatud. Lõigu AB pikkus on 5 cm. Leia lõigu BC pikkus.



3. Kilpla ainsas valgusfooris põleb kas punane või roheline tuli ning tule värv vahetub täisminutil. Foori tööle pannes on võimalik valida kolme erineva tsükli vahel. Esimesel juhul põleb kumbki tuli fooris 1 minuti, teisel juhul kumbki tuli 2 minutit ja kolmandal kumbki tuli 3 minutit. Teada on, et kell 12.01–12.02 põleb fooris punane tuli ja foori töötamise tsüklit ei muudeta ajavahemiku 11.00–13.00 jooksul.

a) Leia kõik võimalused, milline tuli võib põleda fooris kell 12.19–12.20, kui foori tuled põlevad 2 minuti kaupa?

b) Leia kõik võimalused, mitme minuti kaupa võivad foori tuled põleda, kui kell 12.16–12.17 põleb fooris taas punane tuli?

c) Kas fooris kell 12.25–12.26 põleva tule värv sõltub foori töötamise tsüklist?

Eesti LXII matemaatikaolümpiaad

7. veebruar 2015 Piirkonnavoor **8. klass**

II osa. *Lahendamisaega on 2 tundi.*
Ülesannete lahendused kirjuta eraldi lehele.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti. Ainult vastusest ei piisa!
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Arv 2015 esitatakse kahe sellise naturaalarvu summana, millest ühe saame, kui teises kustutame üheliste numbri. Leia kõik sellised naturaalarvude paarid.

2. Halli värvi ristkülikust ümbermõõduga 60 cm lõigatakse välja ristkülik ja ruut joonisel näidatud viisil. Väikse ristküliku mõõtmed on poole väiksemad suure ristküliku mõõtmetest ning ruudu ümbermõõt on kaks korda pikem suure ristküliku pikemast küljest. Suurest ristkülikust alles jäänud kujundi ümbermõõt on 96 cm. Leia suurest ristkülikust alles jäänud kujundi pindala.

3. Maleturniiril osales vähem kui 10 õpilast. Kaks neist olid seitsmendast klassist, kõik ülejäänud aga kaheksandast klassist. Iga osaleja mängis kõigi ülejäänutega täpselt ühe partii. Võit andis 1 punkti, viik 0,5 punkti ja kaotus 0 punkti. Seitsmenda klassi õpilased kogusid kahe peale kokku 8 punkti, kõik kaheksanda klassi õpilased said aga võrdselt punkte. Leia kõik võimalused, milline saab olla turniiril osalenud kaheksanda klassi õpilaste arv.

II osa. *Lahendamisaega on 4 tundi.*
Ülesannete lahendused kirjuta eraldi lehele.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti. Ainult vastusest ei piisa!
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Leia kõik sellised 1-st suuremad täisarvud n, mis jaguvad iga endast väiksema positiivse täisarvuga.

2. Nõia-Ella võtab hommikul uue nõiarohu valmistamiseks 10-liitrise anuma ja täidab selle surmava kärbseseeneekstraktiga. Edasi asub Nõia-Ella ekstrakti lahjendama, asendades igal sammul liitri anuma sisust 900 ml vee ja 100 ml algse ekstrakti seguga. Pärast igat sammu segab ta rohu hoolikalt läbi. Kas pärast 2015 sellist sammu on saadud nõiarohus rohkem või vähem kui 1 liiter algset kärbseseeneekstrakti?

3. Kõõlnelinurga diagonaalid on risti ja nende lõikepunkt poolitab ühe diagonaalidest. Tõesta, et neli kolmnurka, milleks diagonaalid selle nelinurga jaotavad, on kõik sarnased.

Märkus. Kõõlnelinurgaks nimetatakse nelinurka, mille tipud asuvad ühel ringjoonel.

4. Anna, Birgit ja Carmen kirjutavad tahvlile järjestikuseid positiivseid täisarve. Esimesena kirjutab Anna mingi positiivse täisarvu, siis Birgit suuruselt järgmise täisarvu, järgmise kirjutab Carmen, siis jälle Anna jne. Nii jätkatakse, kuni ühel hetkel, kui üks tüdrukutest on parajasti oma arvu ära kirjutanud, otsustavad ülejäänud kaks minna lõunale. Üksijäänud tüdruk otsustab enne neile järgnemist ise niipalju arve juurde kirjutada, et kõigi tema kirjutatud arvude summa oleks suurem kui mõlemad teiste tüdrukute kirjutatud arvude summad. Kui ruttu saab üksijäänud tüdruk lõunale minna?

Eesti LXII matemaatikaolümpiaad

7. veebruar 2015 Piirkonnavoor **10. klass**

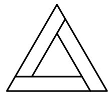
Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Leia võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} x^2 + y = 1 \\ x + 2y = -1 \end{cases}$$

kõik reaalarvulised lahendid.

2. Võrdkülgne kolmnurk küljepikkusega 1 jaotatakse neljaks võrdse pindalaga osaks, millest keskmine on võrdkülgne kolmnurk ja ülejäänud kolm võrdsed trapetsid (vt joonist). Leia nende trapetsite kõrgus.



3. a) On teada, et $x^2 - y^2 = 100$, kus x ja y väärtused on naturaalarvud. Leia avaldise $x - y$ vähim võimalik väärtus.

b) Sama küsimus, kui x ja y väärtused on täisarvud.

4. Kahe reaalarvu summa ja pöördarvude summa on võrdsed. Tõesta, et need arvud on kas teineteise pöördarvud või vastandarvud.

5. Võrdhaarse kolmnurga ABC tipunurga A poolitaja ja haaraga AC paralleelne tippu B läbiv sirge lõikuvad punktis D. Olgu E lõigu AB keskpunkt. Millises suhtes jaotab lõik DE lõigu BC?

6. Kas leidub selline positiivne täisarv n, et rohkem kui pooltel täisarvudest 1 kuni n on numbrite summa paarisarv?

Eesti LXII matemaatikaolümpiaad

7. veebruar 2015 Piirkonnavoor **11. klass**

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Väike Juku kehtestas vanematele majandussanktsioonid. Pärast seda ei söö Juku enam putru, vaid nõuab selle asemel kartulikrõpse, mille ostmisele kulub 5 korda rohkem raha kui Jukule pudru valmistamiseks. Värske juurvilja asemel aga sööb Juku nüüd ainult kooki, mis maksab koguni 10 korda rohkem kui varasemalt Jukule muretsetud juurvili. Muus osas ei ole pere väljaminekud muutunud. Juku kartulikrõpsud moodustavad nüüd 18,75% ja koogid 25% pere igakuistest kuludest. Mitu protsenti suurenesid pere igakuised kulud Juku sanktsioonide tõttu?

2. Leia kõik reaalarvud a, mille korral leidub täisnurkne kolmnurk küljepikkustega a, a^2 ja a^3.

3. Kas leidub 10 erinevat positiivset täisarvu, mille summa jagub igaühega neist arvudest?

4. Tõesta, et $\sin 20^\circ > \dfrac{1}{3}$.

5. a) Kas kõik sirged, mis jaotavad kolmnurga kaheks pindalalt võrdseks osaks, lõikuvad kolmnurga mediaanide lõikepunktis?

b) Kas kõik sirged, mis jaotavad rööpküliku kaheks pindalalt võrdseks osaks, lõikuvad rööpküliku diagonaalide lõikepunktis?

6. Kooli maleturniiril mängis iga osavõtja kõigi ülejäänutega täpselt ühe partii. Võit andis 1 punkti, viik 0,5 punkti ja kaotus 0 punkti. Turniiri kolm parimat said vastavalt 4,5, 4 ja 2,5 punkti ning kõik ülejäänud said alla 2 punkti. Leia kõik võimalused, milline saab olla turniiril osalenute arv.

Eesti LXII matemaatikaolümpiaad

7. veebruar 2015 Piirkonnavoor **12. klass**

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Leia avaldise $\sin x$ võimalikud väärtused, kui $\cos 4x = \cos^4 x$.

2. Olgu a ja b sellised reaalarvud, et funktsioonide $y = x^2 + ax + a$ ja $y = -x^2 + bx + b$ graafikud puutuvad teineteist. Leia kõik võimalused, milline saab olla nende graafikute puutepunkti x-koordinaat.

3. Õpetaja soovib matemaatikaringis teha järgmist trikki. Ta kirjutab tahvlile kaks kahekohalist naturaalarvu. Jüri arvutab nende arvude korrutise ja summa ning liidab need kokku, saades tulemuseks neljakohalise arvu. Mari aga kirjutab esialgsed arvud üksteise järele (esimese arvu eespool) ja saab sama neljakohalise arvu nagu Jüri. Mitu võimalust on õpetajal sobivaid arve valida?

4. Olgu n positiivne täisarv. Tõesta võrratus

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2n+1}}.$$

5. Kas tasandil leidub neli erinevat punkti A, B, C, D, millest ükski kolm ei asu ühel sirgel, nii et punkt A asub väljaspool kolmnurga BCD ümberringjoont, punkt B asub väljaspool kolmnurga CDA ümberringjoont, punkt C asub väljaspool kolmnurga DAB ümberringjoont ning punkt D asub väljaspool kolmnurga ABC ümberringjoont?

6. Tabelisse mõõtmetega $n \times n$ kirjutatakse ridade kaupa vasakult paremale järjest arvud 1 kuni n^2. Juku valib tabelist n arvu nii, et igast reast ja igast veerust oleks valitud täpselt üks arv. Leia kõik võimalused, milline saab olla Juku valitud arvude summa.

LXII Олимпиада Эстонии по математике

7 февраля 2015 г. Региональный тур **7 класс**

I часть. *Время, отводимое для решения: 40 минут.*
На этом листке написать только ответы, для решения можно использовать дополнительную бумагу.
Верный ответ каждой задачи даёт 2 балла.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Найти значение выражения $3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3$.

. . . .

2. Найти сумму наибольшей и наименьшей дроби, выбранных из дробей $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{7}$ и $\frac{2}{9}$.

. . . .

3. Тест начинают писать в 9.48, и пишут ровно два с четвертью часа. В какое время заканчивают писать тест?

. . . .

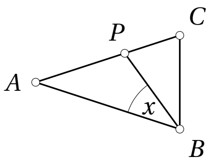
4. Найти наибольшее однозначное число, на которое делится сумма $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 + 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10$.

. . . .

5. Возрасты двух друзей в целых годах лежат между 10 и 20 годами, а их произведение равно кубу одного натурального числа. Найти возрасты обоих друзей.

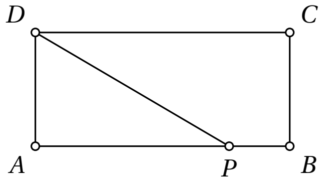
. . . ., ...

6. В треугольнике ABC длины сторон AB и AC равны между собой, а величина угла ACB равна 70°. На стороне AC выбрали точку P так, чтобы отрезки BP и BC оказались равной длины. Найти величину угла, обозначенного буквой x.



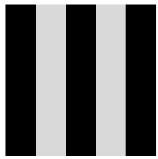
. . . .

7. В прямоугольнике $ABCD$ длина стороны AB равна 10 см. На стороне AB лежит такая точка P, что длина отрезка PB равна 2 см, а площадь треугольника DAP равна 12 см^2. Найти площадь прямоугольника $ABCD$.



. . . .

8. Закрашенный в серый цвет квадрат поделили на 5 равных прямоугольников так, как показано на рисунке. Оба крайних прямоугольника и находящийся посередине прямоугольник закрасили в чёрный цвет. Какая часть длины линии, ограничивающей изначальный квадрат, осталась серого цвета?



. . . .

9. Величинами углов некоторого треугольника являются α, β и γ. Найти γ, если $\alpha + \beta + 7\gamma = 270^\circ$.

. . . .

10. Все грани изготовленного из дерева прямого параллелепипеда, размеры которого 3 см × 4 см × 5 см, покрасили в синий цвет. Затем этот параллелепипед поделили пополам одним разрезом, который прошёл через середины всех его самых длинных рёбер. Найти сумму площадей всех граней, которые оказались непокрашенными в синий цвет у полученных двух многогранников.

. . . .

LXII Олимпиада Эстонии по математике

7 февраля 2015 г. Региональный тур **8 класс**

I часть. *Время, отводимое для решения: 40 минут.*
На этом листке написать только ответы, для решения можно использовать дополнительную бумагу.
Верный ответ каждой задачи даёт 2 балла.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Найти значение выражения $\dfrac{2013-2014}{3}+\dfrac{2014-2015}{3}-\dfrac{2015-2016}{3}$.

. . . .

2. Известно, что $g+f=5$ и $g\cdot f=3$. Найти g^2+f^2.

. . . .

3. Числа от 1 до 100 записали в два ряда так, как показано на рисунке

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & 99 & 3 & 97 & 5 & 95 & 7 & \ldots\ldots\ldots & 53 & 49 & 51 \\ 100 & 2 & 98 & 4 & 96 & 6 & 94 & \ldots\ldots\ldots & 48 & 52 & 50 \end{array}.$$

На сколько сумма всех чисел в нижнем ряду оказалась больше суммы всех чисел в верхнем ряду?

. . . .

4. Найти наименьшее положительное целое число, на которое не делится сумма $1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5+6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10$.

. . . .

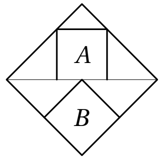
5. У трёх друзей всего 75 автомоделей. У Кости моделей в 2 раза меньше, чем у Андрея и Пети вместе. У Пети моделей на 5 меньше, чем у одного из его двух друзей. Сколько автомоделей у Андрея?

. . . .

6. Величинами углов некоторого треугольника являются α, β и γ. Найти β, если $\alpha + \beta + 2\gamma = 200^\circ$ и $2\alpha + \beta + \gamma = 250^\circ$.

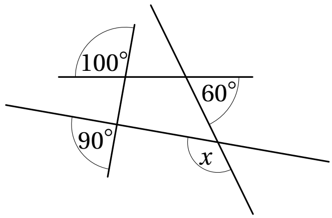
. . . .

7. Внутри квадрата указанным на рисунке способом нарисовали квадраты, площади которых A и B. Найти $A : B$.



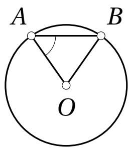
. . . .

8. Четыре прямые пересекаются показанным на рисунке образом. Найти величину угла, обозначенного буквой x.



. . . .

9. На окружности с центром O выбрали точки A и B так, чтобы длина дуги AB составляла пятую часть длины всей окружности. Найти величину угла OAB.



. . . .

10. Все грани изготовленного из дерева прямого параллелепипеда, размеры которого 3 см × 4 см × 5 см, покрасили в синий цвет. Этот параллелепипед сначала поделили пополам одним разрезом, который прошёл через середины всех его самых длинных рёбер. Затем каждый из полученных многогранников поделили пополам одним разрезом, который прошёл через середины всех самых длинных рёбер. Найти сумму площадей всех граней, которые оказались непокрашенными в синий цвет у полученных четырёх многогранников.

. . . .

LXII Олимпиада Эстонии по математике

7 февраля 2015 г. Региональный тур **9 класс**

I часть. *Время, отводимое для решения: 40 минут.*
На этом листке написать только ответы, для решения можно использовать дополнительную бумагу.
Верный ответ каждой задачи даёт 2 балла.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Найти значение выражения $\frac{601}{6}+\frac{301}{3}-\frac{201}{2}$.

. . . .

2. Последовательные положительные целые числа записывают по порядку слева направо в таблицу из пяти столбцов.

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

В ряду с каким порядковым номером окажутся числа, сумма которых равна 2015?

. . . .

3. В телефонных книжках Аллы и Пети всего 120 различных номеров телефонов. В книжке Аллы на 20 номеров телефонов больше, чем в книжке Пети, и у них в книжках 30 одинаковых номеров телефонов. Сколько номеров телефонов в телефонной книжке Аллы?

. . . .

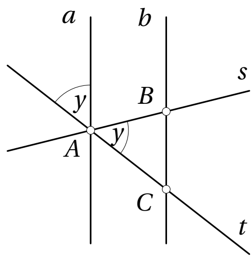
4. Найти наименьшее положительное целое число, на которое не делится сумма $1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7+11\cdot12\cdot13\cdot14\cdot15\cdot16\cdot17$.

. . . .

5. Величинами углов некоторого треугольника являются α, β и γ. Найти β, если $\alpha+2\beta+2\gamma=300^\circ$ и $\alpha+\beta+3\gamma=200^\circ$.

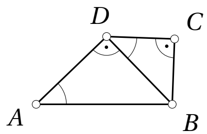
. . . .

6. Прямая a пересекается с прямыми s и t в точке A, а прямая b пересекается с прямыми s и t соответственно в точках B и C. Прямые a и b являются параллельными. Величины двух обозначенных на рисунке углов равны y, а величина угла ABC равна 80°. Найти y.



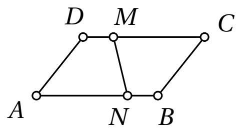
. . . .

7. Про четырёхугольник $ABCD$ известно, что $|AB| = 18$ см и $|BC| = 8$ см. Углы ADB и BCD являются прямыми, а величины углов DAB и BDC равны. Найти длину диагонали DB.



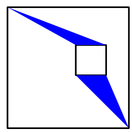
. . . .

8. Четырёхугольник $ABCD$ является параллелограммом. На стороне AB выбрана точка N так, чтобы отрезок NB был в 3 раза короче отрезка AN. На стороне DC выбрана точка M так, чтобы отрезок DM был в 3 раза короче отрезка MC. Длина отрезка MN равна 8 см. Периметр параллелограмма $ABCD$ равен 52 см. Найти периметр четырёхугольника $NBCM$.



. . . .

9. Внутри квадрата с длиной стороны 8 см нарисовали квадрат с длиной стороны 2 см. Соответствующие стороны квадратов параллельны. Найти сумму площадей двух треугольников, закрашенных на рисунке в тёмный цвет.



. . . .

10. Все грани изготовленного из дерева прямого параллелепипеда, размеры которого 3 см × 4 см × 5 см, покрасили в синий цвет. Этот параллелепипед сначала поделили пополам одним разрезом, который прошёл через середины всех его самых длинных рёбер. Затем каждый из полученных многогранников поделили пополам одним разрезом, который прошёл через середины всех самых длинных рёбер. И, наконец, каждый из полученных многогранников поделили пополам одним разрезом, который прошёл через середины всех самых длинных рёбер. Найти сумму площадей всех граней, которые оказались непокрашенными в синий цвет у всех полученных в итоге многогранников.

. . . .

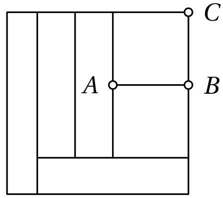
LXII Олимпиада Эстонии по математике

7 февраля 2015 г. Региональный тур **7 класс**

II часть. *Время, отводимое для решения: 2 часа.*
Решения задач написать на отдельном листе.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов. Написать только ответ недостаточно!
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. У Кати три книжки-раскраски, в которых всего 84 картинки для раскрашивания. Четверть всех картинок она уже раскрасила. В первой книжке на 12 картинок больше, чем во второй, и в обеих этих книжках всего 10 раскрашенных картинок. В третьей книжке нераскрашенных картинок на 4 меньше, чем раскрашенных. Сколько картинок для раскрашивания в каждой книжке?

2. Квадрат поделили пятью отрезками на шесть прямоугольников равной площади так, как показано на рисунке. Длина отрезка AB равна 5 см. Найти длину отрезка BC.



3. В сказочном городе стоит единственный светофор, на котором горит красный или зелёный свет, и свет меняется в ровную минуту. При настройке светофора можно выбрать один из трёх различных режимов работы. В первом случае каждый свет горит в течение 1 минуты, во втором случае в течение 2 минут подряд, и в третьем случае в течение 3 минут подряд. Известно, что на временном промежутке 12.01 – 12.02 на светофоре горит красный свет и режим работы светофора в течение временного промежутка 11.00 – 13.00 не меняют.

а) Какой свет (только красный, только зелёный или любой из них) может гореть на этом светофоре на временном промежутке 12.19 – 12.20, если выбран режим работы, когда каждый свет горит в течение 2 минут подряд?

б) Найти все возможные режимы работы светофора, если известно, что на временном промежутке 12.16 – 12.17 на светофоре снова горит красный свет.

в) Зависит ли свет, который может гореть на этом светофоре на временном промежутке 12.25 – 12.26, от режима работы светофора?

LXII Олимпиада Эстонии по математике

7 февраля 2015 г. Региональный тур **8 класс**

II часть. *Время, отводимое для решения: 2 часа.*
Решения задач написать на отдельном листе.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов. Написать только ответ недостаточно!
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Число 2015 можно представить в виде суммы двух таких натуральных чисел, одно из которых получается, если во втором числе стереть цифру единиц. Найти все такие пары натуральных чисел.

2. Из прямоугольника серого цвета, периметр которого 60 см, вырезали прямоугольник и квадрат так, как показано на рисунке. Размеры вырезанного прямоугольника наполовину меньше размеров изначального прямоугольника, а периметр вырезанного квадрата в два раза больше длины наибольшей стороны изначального прямоугольника. Периметр оставшейся от изначального прямоугольника фигуры равен 96 см. Найти площадь оставшейся от изначального прямоугольника фигуры.

3. На шахматном турнире приняли участие меньше 10-ти учеников. Двое из них семиклассники, а все остальные восьмиклассники. Каждый участник турнира сыграл по одной партии с каждым другим участником. Победа давала 1 очко, ничья 0,5 очка и поражение 0 очков. Семиклассники набрали за весь турнир на двоих всего 8 очков, а все восьмиклассники набрали одинаковое число очков. Найти все возможности для того, сколько восьмиклассников могло принять участие в этом турнире.

LXII Олимпиада Эстонии по математике

7 февраля 2015 г. Региональный тур **9 класс**

II часть. *Время, отводимое для решения: 4 часа.*
Решения задач написать на отдельном листе.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов. Написать только ответ недостаточно!
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Найти все такие целые числа n большие единицы, которые делятся на каждое положительное целое число меньше себя.

2. Утром для приготовления нового зелья Баба-Яга берёт 10-литровую ёмкость и заполняет её смертельным экстрактом мухомора. Далее Баба-Яга начинает разбавлять экстракт, заменяя на каждом шагу литр содержимого ёмкости на смесь из 900 мл воды и 100 мл начального экстракта. После каждого шага она основательно перемешивает зелье. После 2015 таких шагов в полученном зелье останется более или менее одного литра первоначального экстракта мухомора?

3. Диагонали вписанного четырёхугольника перпендикулярны друг другу, причём точка их пересечения является серединой одной из них. Доказать, что диагонали этого четырёхугольника разбивают его на четыре подобных друг другу треугольника.

Примечание. Четырёхугольник называют *вписанным*, если все его вершины лежат на одной окружности.

4. Анна, Биргитта и Кармен записывают последовательные положительные целые числа на доске. Сначала Анна пишет какое-то положительное целое число, затем Биргитта следующее по величине, за ней следующее записывает Кармен, потом снова Анна и так далее. Так продолжается до тех пор, пока сразу после того, как одна из девочек записывает своё число, другие две не решают пойти на обед. Оставшаяся девочка, прежде чем последовать за ними, решает сама дописать столько чисел, чтобы сумма всех записанных ею чисел оказалась больше, чем обе суммы чисел, записанных каждой ушедшей девочкой. Как скоро оставшаяся девочка сможет пойти на обед?

LXII Олимпиада Эстонии по математике

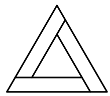
7 февраля 2015 г. Региональный тур **10 класс**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Найти все действительные решения системы уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y &= 1 \\ x + 2y &= -1 \end{cases}.$$

2. Равносторонний треугольник с длиной стороны 1 разбит на четыре части равной площади, из которых центральная является равносторонним треугольником, а остальные – тремя равными друг другу трапециями (см. рисунок). Найти высоту этих трапеций.



3. а) Известно, что $x^2 - y^2 = 100$, где x и y – натуральные числа. Найти наименьшее возможное значение выражения $x - y$.

б) Тот же вопрос, при условии, что x и y – целые числа.

4. Сумма двух действительных чисел равна сумме их обратных чисел. Доказать, что эти два числа либо взаимно обратны, либо взаимно противоположны.

5. Бисектрисса вершинного угла A равнобедренного треугольника ABC и прямая, параллельная боковой стороне AC и проходящая через точку B, пересекаются в точке D. Пусть E – середина стороны AB. В каком отношении отрезок DE разбивает основание BC?

6. Существует ли такое положительное целое число n, что у более половины из целых чисел от 1 до n сумма цифр чётна?

LXII Олимпиада Эстонии по математике

7 февраля 2015 г. Региональный тур **11 класс**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Юрочка ввёл экономические санкции против родителей. После этого Юра больше не ест кашу, а требует вместо неё картофельные чипсы, на покупку которых уходит в 5 раз больше денег, чем на приготовление каши для Юры. Вместо свежих овощей Юра ест теперь только пирог, который стоит аж в 10 раз дороже, чем ранее приобретаемые для Юры овощи. В остальном расходы семьи не изменились. Юрины чипсы составляют теперь 18,75%, а пироги 25% от ежемесячных расходов семьи. На сколько процентов увеличились ежемесячные расходы семьи из-за Юриных санкций?

2. Найти все действительные числа a, при которых существует прямоугольный треугольник с длинами сторон a, a^2 и a^3.

3. Существуют ли 10 различных положительных целых чисел, сумма которых делится на каждое из этих чисел?

4. Доказать, что $\sin 20^\circ > \dfrac{1}{3}$.

5. а) Верно ли, что все прямые, разбивающие треугольник на две равные по площади части, пересекаются в точке пересечения медиан треугольника?

б) Верно ли, что все прямые, разбивающие параллелограмм на две равные по площади части, пересекаются в точке пересечения диагоналей параллелограмма?

6. На школьном турнире по шахматам каждый участник сыграл с каждым другим участником ровно по одной партии. Победа давала 1 очко, ничья 0,5 очков, а поражение 0 очков. Трое лучших участников получили соответственно 4,5, 4 и 2,5 очков, а все остальные получили меньше 2 очков. Найти все возможные значения количества участников турнира.

LXII Олимпиада Эстонии по математике

7 февраля 2015 г. Региональный тур **12 класс**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Найти все возможные значения выражения $\sin x$, если $\cos 4x = \cos^4 x$.

2. Допустим, что a и b такие действительные числа, что графики функций $y = x^2+ax+a$ и $y = -x^2+bx+b$ касаются. Найти все возможные значения x-координаты точки касания их графиков.

3. На математическом кружке учитель желает показать следующий фокус. Он запишет на доске два двузначных натуральных числа. Юра сложит произведение и сумму этих чисел, получая в результате четырёхзначное число. Маша выпишет первоначальные числа одно за другим (второе за первым) и получит то же самое четырёхзначное число, что и Юра. Сколько вариантов выбрать подходящие числа есть у учителя?

4. Пусть n – положительное целое число. Доказать неравенство

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n} \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2n+1}}.$$

5. Существуют ли на плоскости такие четыре различные точки A, B, C, D, никакие три из которых не лежат на одной прямой, что точка A лежит снаружи описанной окружности треугольника BCD, точка B лежит снаружи описанной окружности треугольника CDA, точка C лежит снаружи описанной окружности треугольника DAB, а точка D лежит снаружи описанной окружности треугольника ABC?

6. В таблицу размером $n \times n$ по рядам слева направо в порядке возрастания записываются числа от 1 до n^2. Юра выбирает в таблице n чисел так, что в каждом ряду и каждом столбце оказывается выбранным ровно одно число. Найти все возможные значения суммы выбранных чисел.

LXII Estonian Mathematical Olympiad

February 7, 2015 Regional round **Grade 7**

Part I. *Working time: 40 minutes.*
Please write only answers here. An additional piece of paper is provided for solving.
A correct answer to each question is worth 2 marks.
Calculators are not permitted.

1. Find the value of the following expression: $3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3$.

. . . .

2. Find the sum of the greatest and the least of the following fractions: $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{7}$ and $\frac{2}{9}$.

. . . .

3. A test starts at 9.48 and lasts for exactly two and a quarter hours. When does the test end?

. . . .

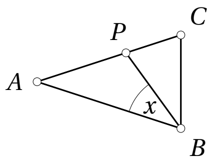
4. Find the greatest single-digit number that divides the following sum: $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 + 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10$.

. . . .

5. The ages of two friends in full years are between 10 and 20 and the product of their ages is equal to a cube of a natural number. Find the ages of both friends.

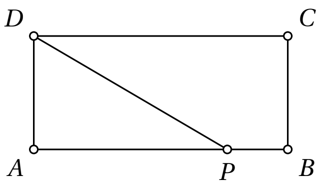
. . . ., ...

6. The sides AB and AC of triangle ABC have equal length and the size of angle ACB is $70°$. Point P is chosen on side AC such that BP and BC have equal length. Find the size of the angle denoted by x.



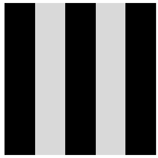
. . . .

7. The length of side AB of rectangle $ABCD$ is 10 cm. On the side AB there is a point P such that the length of PB is 2 cm and the area of triangle DAP is 12 cm^2. Find the area of rectangle $ABCD$.



. . . .

8. A grey square gets divided into 5 equal rectangles in the way shown on the drawing, two outermost ones and the middle one are coloured black. How big part of the outline of the square remains grey?



. . . .

9. The sizes α, β and γ of the angles of a triangle satisfy $\alpha + \beta + 7\gamma = 270^\circ$. Find γ.

. . . .

10. All faces of a right rectangular prism with dimensions 3 cm × 4 cm × 5 cm are coloured blue. The prism is cut in half with one cut that goes through all the midpoints of the longest edges. Find the total area of the non-blue faces of the two new prisms.

. . . .

LXII Estonian Mathematical Olympiad

February 7, 2015 Regional round **Grade 9**

Part I. *Working time: 40 minutes.*
Please write only answers here. An additional piece of paper is provided for solving.
A correct answer to each question is worth 2 marks.
Calculators are not permitted.

1. Find the value of the following expression: $\frac{601}{6} + \frac{301}{3} - \frac{201}{2}$.

....

2. All positive integers are written in increasing order into a 5-column table, from left to right in every row.

$$\begin{array}{rrrrr} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ \multicolumn{5}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots} \end{array}$$

In which row is the sum of the numbers 2015?

....

3. In Alla's and Paul's phone books there are a total of 120 different phone numbers. Alla's phone book contains 20 numbers more than Paul's phone book and these phone books have 30 numbers in common. How many phone numbers are there in Alla's phone book?

....

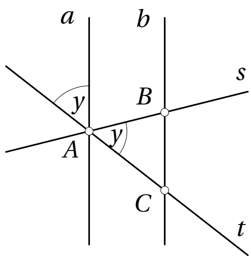
4. Find the least positive integer that does not divide the following number: $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 + 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 17$.

....

5. The sizes α, β and γ of the angles of a triangle satisfy $\alpha + 2\beta + 2\gamma = 300^\circ$ and $\alpha + \beta + 3\gamma = 200^\circ$. Find β.

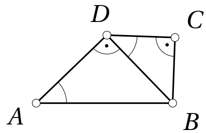
....

6. Line a intersects lines s and t in point A, line b intersects lines s and t in points B and C respectively. Lines a and b are parallel. The two angles denoted on the figure have size y and the angle ABC is of size 80°. Find y.



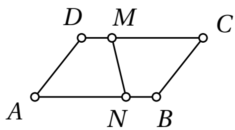
....

7. In quadrilateral $ABCD$, $AB = 18$ cm and $BC = 8$ cm. The angles ADB and BCD are right angles and the angles DAB and BDC are of equal size. Find the length of the diagonal DB.



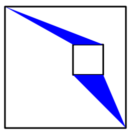
....

8. Quadrilateral $ABCD$ is a parallelogram. Point N is chosen on side AB such that NB is 3 times shorter than AN. Point M is chosen on side DC such that DM is 3 times shorter than MC. The length of MN is 8 cm. The perimeter of the parallelogram $ABCD$ is 52 cm. Find the perimeter of the quadrilateral $NBCM$.



....

9. A square with side length 2 cm is drawn into a square with side length 8 cm. The corresponding sides of the squares are parallel. Find the sum of the areas of the two shaded triangles shown on the figure.



....

10. All faces of a right rectangular prism with dimensions 3 cm × 4 cm × 5 cm are coloured blue. The prism is cut in half with one cut that passes through the midpoints of its longest edges. Then both resulting prisms are again cut in half with a cut that passes through the midpoints of their longest edges. Finally every resulting prism is in turn cut in half with a cut passing through the midpoints of its longest edges. Find the sum of the areas of the non-blue faces of the resulting prisms.

....

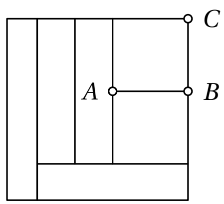
LXII Estonian Mathematical Olympiad

February 7, 2015 Regional round **Grade 7**

Part II. *Working time: 2 hours.*
Please write your solutions to a separate paper.
A correct and sufficiently substantiated solution to each problem is worth 7 marks. Just the answer is not enough!
Calculators are not permitted.

1. Kati has three colouring books which have 84 pictures in total. She has already coloured a quarter of them. The first book contains 12 pictures more than the second book and those two books have 10 coloured pictures in total. In the third book there are 4 less non-coloured pictures than coloured pictures. How many pictures are there in each book?

2. A square gets divided into six rectangles with equal areas by five straight lines, as shown on the drawing. The length of line segment AB is 5 cm. Find the length of the line segment BC.



3. The only traffic light of Kilpla is displaying either a red or a green light and the colour of the light changes at a full minute. When turning on the traffic light one can choose between three different modes (cycles). In the first one either of the lights will be on for 1 minute in a row, in the second case either one will be on for 2 minutes and in the third case 3 minutes. It is known that between times 12.01 and 12.02 the red light is on and the mode is not changed between 11.00 and 13.00.

a) Find all possibilities, which light can be on between 12.19 and 12.20 if the lights switch after every 2 minutes.

b) Find all possibilities for the modes if between 12.16 and 12.17 the light will again be red.

c) Does the colour of the light that is on between 12.25 and 12.26 depend on the particular mode the traffic light is in?

LXII Estonian Mathematical Olympiad

February 7, 2015 Regional round **Grade 9**

Part II. *Working time: 4 hours.*
Please write your solutions to a separate paper.
A correct and sufficiently substantiated solution to each problem is worth 7 marks. Just the answer is not enough!
Calculators are not permitted.

1. Find all integers n greater than 1 that are divisible by every positive integer less than n.

2. Every morning Ella the Witch takes a 10-litre bucket for the purposes of making a magic potion and fills it up with deadly essence of fly agaric. After that Ella starts diluting the extract by replacing one litre of the contents of the bucket with the mix of 900 ml of water and 100 ml of the original essence at every step. After each step she carefully mixes the potion. After 2015 such steps, does the resulting potion have more or less than 1 litre of the original essence in it?

3. The diagonals of a cyclic quadrilateral are perpendicular and their point of intersection halves one of the diagonals. Prove that the four triangles that the diagonals divide this quadrilateral into are all similar.

   Remark. A *cyclic quadrilateral* is a quadrilateral whose vertices all lie on a single circle.

4. Anna, Birgit and Carmen are writing consecutive positive integers on a board. First Anna writes some positive integer, then Birgit writes the integer greater by 1, then Carmen writes the next one, then Anna again etc. They continue so until at the moment when one of the girls has just written her number the other two decide to go and grab lunch. The girl who is left alone decides that before following the other two she will write as many numbers as she needs to in order to make the sum of all the numbers written by her greater than both the sums of the numbers written by the other two girls. How quickly can the girl who was left alone go and get lunch?

I osa vastused

1. 270000.
2. $\frac{8}{9}$.
3. 12.03.
4. 5.
5. 12 ja 18.
6. 30°.
7. $30\ \text{cm}^2$.
8. $\frac{1}{5}$.
9. 15°.
10. $24\ \text{cm}^2$.

Lahendused

1. $3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 = 3^3 \cdot 2^4 \cdot 5^4 = 27 \cdot 10^4 = 270000$.

2. Murdude suurusjärjestus on $\frac{2}{3} > \frac{3}{5} > \frac{4}{7} > \frac{1}{2} > \frac{2}{9}$ ning $\frac{2}{3} + \frac{2}{9} = \frac{8}{9}$.

3. Test algab 48 minutit pärast kella 9. Sellest kaks ja veerand tundi ehk 2 tundi 15 minutit hilisem hetk on 63 minutit pärast kella 11 ehk 12.03.

4. Summa jagub 5-ga, sest mõlemad liidetavad jaguvad 5-ga. Kuna üks liidetav on paaritu ja teine paaris, on summa paaritu ega jagu seega 6-ga ega 8-ga. Summa ei jagu ka 7-ga ega 9-ga, sest esimene liidetav jagub mõlemaga neist, kuid teine liidetav ei jagu kummagagi.

5. Kuna küsitud täisarvud on 10 ja 20 vahel, on nende korrutis 100 ja 400 vahel. Sellesse vahemikku jäävad täiskuubid on 5^3, 6^3 ja 7^3 ehk vastavalt 125, 216 ja 343. Neist esimene ja viimane ei tule arvesse, sest 5 ja 7 on algarvud, mistõttu nende kuupide esitamisel kahe täisarvu korrutisena peaksid mõlemad tegurid olema nende algarvude astmed, kuid 10 ja 20 vahel 5 ega 7 astmeid ei ole. Arvu 6^3 ehk $2^3 \cdot 3^3$ esitamiseks nõutud piiresse jäävate täisarvude korrutisena peavad mõlemad tegurid jaguma algarvudest vaid 2-ga ja 3-ga. Sõelale jäävad 12 ja 18, mille korrutis tõepoolest ongi 216.

6. Ülesande tingimuste järgi $\angle ABC = \angle ACB = 70^\circ$. Et $|BP| = |BC|$, siis $\angle BPC = \angle BCP = 70^\circ$ ja $\angle CBP = 180^\circ - 2 \cdot 70^\circ = 40^\circ$. Järelikult $x = 70^\circ - 40^\circ = 30^\circ$.

7. Et $|PB| = 2$ cm, siis $|AP| = 8$ cm. Kuna kolmnurga DAP pindala on samas 12 cm^2, siis $|AD| = 3$ cm. Seega ristküliku $ABCD$ pindala on 30 cm^2.

8. Ruudu kahest küljest jääb halliks $\frac{2}{5}$, ülejäänud küljed on üleni mustad. Seega ruudu kontuurist on halli värvi $\frac{\frac{2}{5} \cdot 2 + 0 \cdot 2}{4}$ ehk $\frac{1}{5}$.

9. Et $\alpha + \beta + 7\gamma = 270^\circ$ ja $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, siis $6\gamma = 90^\circ$, kust $\gamma = 15^\circ$.

10. Lõikepinna mõõtmed langevad kokku risttahuka kahe väiksema mõõtmega ehk on 3 cm × 4 cm. Et lõikamisel tekib kaks lõikepinda (üks kummalgi poolel), on värvimata tahkude pindalade summa $2 \cdot (3 \cdot 4)$ ehk 24 ruutsentimeetrit.

Eesti LXII matemaatikaolümpiaad

7. veebruar 2015 | Piirkonnavoor | **8. klass**

I osa vastused

1. $-\frac{1}{3}$.

2. 19.

3. 50.

4. 7.

5. 30.

6. 90°.

7. $\frac{8}{9}$.

8. 130°.

9. 54°.

10. $54\ \mathrm{cm}^2$.

Lahendused

1. Kõik murrud antud avaldises on võrdsed arvuga $-\frac{1}{3}$. Seega avaldise väärtus on võrdne arvuga $a + a - a$, kus $a = -\frac{1}{3}$, ehk arvuga $-\frac{1}{3}$.

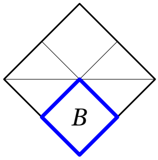
2. Paneme tähele, et $g^2 + f^2 = (g + f)^2 - 2gf$. Et $g + f = 5$ ja $gf = 3$, siis $g^2 + f^2 = 5^2 - 2 \cdot 3 = 19$.

3. Vaatleme antud 2×50 tabelit 2×2 plokkide kaupa. Igas plokis on alumise rea kumbki arv 1 võrra suurem kui vastasnurgas asuv arv ülemises reas. Seega iga ploki kahe alumise arvu summa on 2 võrra suurem kui kahe ülemise rea arvu summa. Et tabelis on kokku 25 plokki, on alumise rea arvude summa kokku 50 võrra suurem kui ülemise rea arvude summa.

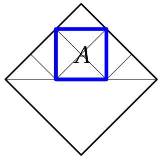
4. Summa kumbki liidetav jagub kõigi positiivsete täisarvudega 1-st 6-ni. Seega jagub ka summa kõigi nende arvudega. Kuid 7-ga jagub ainult teine liidetav, mistõttu summa 7-ga ei jagu.

5. Olgu Alberti, Pauli ja Karli mudelautode arvud vastavalt a, b ja c. Ülesande tingimuste järgi $a + b + c = 75$ ja $c = \frac{a+b}{2}$ ehk $a + b = 2c$. Siit $2c + c = 75$ ehk $c = 25$.

Veel saame ülesande tingimustest, et kehtib kas $b = a - 5$ või $b = c - 5$. Et $a + b = 2c$ ja $2c$ on paarisarv, siis a ja b on sama paarsusega, mistõttu $b = a - 5$ pole võimalik. Järelikult $b = c - 5 = 20$ ja $a = 75 - 25 - 20 = 30$.



Joonis 1



Joonis 2

6. Et α, β ja γ on kolmnurga nurgad, siis $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$. Ülesande tingimuste järgi $\alpha + \beta + 2\gamma = 200^\circ$ ja $2\alpha + \beta + \gamma = 250^\circ$, millest saame vastavalt $\gamma = 20^\circ$ ja $\alpha = 70^\circ$. Kokku $\beta = 180^\circ - 20^\circ - 70^\circ = 90^\circ$.

7. Alumise ruudu pindala B on ilmselt $\frac{1}{4}$ suure ruudu pindalast (joonis 1). Ülemise ruudu pindala A on 4 korda suurem selle ruudu kohale jääva väikse kolmnurga pindalast ning 2 korda suurem kummalegi küljele jääva kolmnurga pindalast (joonis 2). Seega võrdub suure ruudu diagonaalist üles jääva osa pindala 9 väikse kolmnurga pindalaga, mistõttu pindala A moodustab $\frac{4}{9}$ suure ruudu diagonaalist üles jääva osa pindalast ja $\frac{2}{9}$ suure ruudu pindalast. Kokkuvõttes $A : B = \frac{2}{9} : \frac{1}{4} = \frac{8}{9}$.

8. Sirgete lõikumisel tekkiva nelinurga kolme sisenurga suurused on 90°, 100° ja 120°. Neljanda sisenurga suurus on siis 50°, sest nelinurga sisenurkade summa on 360°. Järelikult $x = 130^\circ$.

9. Ülesande tingimuste põhjal $\angle AOB = \frac{1}{5} \cdot 360^\circ = 72^\circ$. Et $|OA| = |OB|$, siis $\angle OAB = \angle OBA$, mistõttu $\angle OAB = \dfrac{180^\circ - 72^\circ}{2} = 54^\circ$.

10. Esimese lõikepinna mõõtmed langevad kokku risttahuka kahe väiksema mõõtmega ehk on 3 cm × 4 cm. Lõikamisel saadava ühe tüki kolmas mõõde on 2,5 cm. Seega teine lõige poolitab küljed pikkusega 4 cm. Teise lõikamise võib teha kahel poolel korraga, mispuhul on tegu otsekui algse risttahuka lõikamisega. Selle lõikepinna mõõtmed on 3 cm × 5 cm. Et lõikamisel tekib kaks lõikepinda (üks kummalgi poolel), on värvimata tahkude pindalade summa $2 \cdot (3 \cdot 4 + 3 \cdot 5)$ ehk 54 ruutsentimeetrit.

I osa vastused

1. 100.

2. 81..

3. 85.

4. 11.

5. 110°.

6. 50°.

7. 12 cm.

8. 34 cm.

9. 6 cm^2.

10. 94 cm^2.

Lahendused

1. Et $\dfrac{601}{6} = 100 + \dfrac{1}{6}$, $\dfrac{301}{3} = 100 + \dfrac{1}{3}$ ja $\dfrac{201}{2} = 100 + \dfrac{1}{2}$, siis

$$\frac{601}{6} + \frac{301}{3} - \frac{201}{2} = 100 + 100 - 100 + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = 100.$$

2. *Lahendus 1.* 81. reas on arvud $80 \cdot 5 + 1$ kuni $80 \cdot 5 + 5$ ehk 401 kuni 405, mis kokku annavad 2015.

Lahendus 2. 1. reas on arvude summa 15. Igas järgnevas reas on iga arv 5 võrra suurem jooksva rea vastavast arvust. Seega k-nda rea arvude summa üldkuju on $15 + \underbrace{25 + 25 + \ldots + 25}_{k-1 \text{ korda}}$ ehk $15 + 25(k-1)$. Lahendades võrrandi $15 + 25(k-1) = 2015$, leiame, et $k = 81$.

3. Et 30 telefoninumbrit on ühised, siis Alla ja Pauli telefoninumbrite arvude summa on 120 + 30 ehk 150. Tähistades Alla ja Pauli telefoninumbrite arvud vastavalt muutujatega a ja b, saame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} a + b = 150, \\ a - b = 20. \end{cases}$$

Võrrandite liitmisel saame $2a = 170$, kust $a = 85$.

4. Mõlemad liidetavad jaguvad kõigi positiivsete täisarvudega 1-st 10-ni. Seega jagub ka summa kõigi nende arvudega. Kuid 11-ga jagub ainult teine liidetav, mistõttu summa 11-ga ei jagu.

5. Et α, β ja γ on kolmnurga nurgad, siis $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$. Ülesande tingimuste järgi $\alpha + 2\beta + 2\gamma = 300^\circ$ ja $\alpha + \beta + 3\gamma = 200^\circ$, millest saame vastavalt $\beta + \gamma = 120^\circ$ ja $2\gamma = 20^\circ$. Seega $\gamma = 10^\circ$ ja $\beta = 110^\circ$.

6. Sirgete a ja b paralleelsuse tõttu $\angle ACB = y$. Nüüd kolmnurgast ABC saame $y + y + 80^\circ = 180^\circ$, mis annab $y = 50^\circ$.

7. Ülesande tingimuste põhjal on kolmnurgad ABD ja DBC sarnased tunnuse NN alusel. Seega $\dfrac{|BC|}{|BD|} = \dfrac{|BD|}{|BA|}$, kust $|BD|^2 = |BA| \cdot |BC| = 18\text{ cm} \cdot 8\text{ cm}$. Siit $|BD| = 12$ cm.

8. Et $|MD| = |NB|$, siis ka $|MC| = |NA|$. Kokkuvõttes on nelinurgad $ADMN$ ja $CBNM$ võrdsed. Nelinurkade $ADMN$ ja $CBNM$ ümbermõõtude summa võrdub rööpküliku $ABCD$ ümbermõõdu ja kahekordse lõigu MN pikkuse summaga. Seega nelinurga $NBCM$ ümbermõõt on $\dfrac{52\text{ cm} + 2 \cdot 8\text{ cm}}{2}$ ehk 34 cm.

9. Suure ja väikse ruudu küljepikkuste vahe 6 cm võrdub kahe kolmnurga kõrguste summaga. Alused on mõlemal pikkusega 2 cm. Pindalade summa on seega $\dfrac{2\text{ cm} \cdot 6\text{ cm}}{2}$ ehk 6 cm^2.

10. Esimese lõikepinna mõõtmed langevad kokku risttahuka kahe väiksema mõõtmega ehk on 3 cm × 4 cm. Lõikamisel saadava ühe tüki kolmas mõõde on 2,5 cm. Seega teine lõige poolitab küljed pikkusega 4 cm. Teise lõikamise võib teha kahel poolel korraga, mispuhul on tegu otsekui algse risttahuka lõikamisega. Selle lõikepinna mõõtmed on 3 cm × 5 cm ning väikse tüki mõõtmed 3 cm × 2,5 cm × 2 cm. Seega kolmas lõige poolitab küljed pikkusega 3 cm. Ka kolmandad lõiked võib teha korraga, asetades neli väikest tahukat algseks risttahukaks kokku, ja selle lõikepinna mõõtmed on 4 cm × 5 cm. Et lõikamisel tekib kaks lõikepinda (üks kummalgi poolel), on värvimata tahkude pindalade summa $2 \cdot (3 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 5)$ ehk 94 ruutsentimeetrit.

Eesti LXII matemaatikaolümpiaad

7. veebruar 2015 | Piirkonnavoor | **7. klass**

II osa lahendused

1. *Vastus:* esimeses 39, teises 27, kolmandas 18.

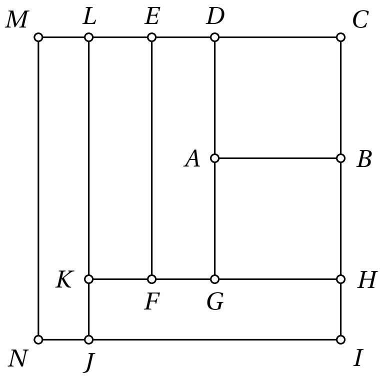
Et raamatutes on kokku 84 pilti, millest veerand on värvitud, on täpselt $84 : 4$ ehk 21 pilti värvitud. Et esimeses kahes raamatus on värvitud 10 pilti, on kolmandas raamatus värvitud $21 - 10$ ehk 11 pilti. Et kolmandas raamatus on värvimata pilte 4 võrra vähem kui värvitud pilte, on kolmandas raamatus $11 - 4$ ehk 7 värvimata pilti ja kokku $11 + 7$ ehk 18 pilti. Järelikult esimeses ja teises raamatus kokku on $84 - 18$ ehk 66 pilti. Kui nüüd teises raamatus on x pilti, siis esimeses on ülesande tingimuse järgi $x + 12$ pilti. Saame võrrandi $x + (x + 12) = 66$, kust $x = 27$. Seega teises raaamatus on 27 ja esimeses 39 pilti.

2. *Vastus:* $\dfrac{24}{5}$ cm.

Lahendus 1. Tähistame ruudu tipud ja jaotusjoonte lõikepunktid, nagu näidatud joonisel 3. Et ristkülikud $ABCD$ ja $ABHG$ on võrdse pindalaga ning neil on ühine külg AB, siis on ka teised küljed võrdse pikkusega ehk $|BC| = |BH|$. Seega $|DG| = 2 \cdot |BC|$. Et ristkülikud $DEFG$ ja $ABCD$ on võrdse pindalaga, peab olema $|DE| = \dfrac{1}{2} \cdot |AB|$. Et ka ristkülikud $DEFG$ ja $EFKL$ on võrdse pindalaga ning neil on ühine külg EF, siis ka $|EL| = |DE| = \dfrac{1}{2} \cdot |AB|$. Siit saame $|AB| = |DL| = \dfrac{1}{2}|CL|$. Kuna ristkülikud $HIJK$ ja $ABCD$ on võrdse pindalaga ja $|HK| = 2|AB|$, siis $|HI| = \dfrac{1}{2}|BC|$.

Olgu ruudu külje pikkus a. Siis $a = |BC| + |BH| + |HI| = \dfrac{5}{2}|BC|$, kust $|BC| = \dfrac{2}{5}a$. Et $|MN| = a$ ja ristkülik $JLMN$ moodustab $\dfrac{1}{6}$ kogu ruudu pinnast, siis $|LM| = \dfrac{1}{6}a$ ning $|CL| = \dfrac{5}{6}a$. Järelikult $\dfrac{5}{12}a = |AB| = 5$ cm, kust $a = 12$ cm ja seega $|BC| = \dfrac{2}{5} \cdot 12 \text{ cm} = \dfrac{24}{5}$ cm.

Lahendus 2. Tähistame ruudu tipud ja jaotusjoonte lõikepunktid nagu lahenduses 1. Olgu $|BC| = x$ cm, siis ristkülikute $ABCD$ ja $ABHG$ pindalade võrdsuse tõttu ka $|BH| = x$ cm. Et $|AB| = 5$ cm, on iga ristküliku pindala $5x$ cm^2. Et ristkülikute $DEFG$ ja $EFKL$ pindalade summa võrdub ristkülikute $ABCD$ ja $ABHG$ pindalade summaga, siis $|DL| = |GK| = 5$ cm.



Joonis 3

Järelikult $|HK| = 10$ cm, kust $|HI| = \dfrac{5x \text{ cm}^2}{10 \text{ cm}} = \dfrac{1}{2}x$ cm. Seega

$$|JL| = |IC| = |BC| + |BH| + |HI| = x + x + \frac{1}{2}x = \frac{5}{2}x \text{ cm}$$

ja $|JN| = \dfrac{5x \text{ cm}^2}{\frac{5}{2} \text{ cm}} = 2$ cm. Kokkuvõttes $|IN| = 10 \text{ cm} + 2 \text{ cm} = 12$ cm. Et $|IN| = |IC|$, saame võrrandi $\dfrac{5}{2}x = 12$, kust $x = \dfrac{24}{5}$.

3. *Vastus:* a) roheline; b) 2; c) ei.

a) Ajavahemik 12.19–12.20 asetseb täpselt 18 minutit ehk 9 2-minutilist intervalli pärast vahemikku 12.01–12.02. Kuna kell 12.01–12.02 põleb fooris punane tuli ja 9 on paaritu arv, siis vahemikul 12.19–12.20 põleb fooris roheline tuli.

b) Ajavahemik 12.16–12.17 asetseb täpselt 15 minutit pärast ajavahemikku 12.01–12.02. Kui tuli vahetub iga minuti järel, siis põleks 15 minutit pärast punast tuld kindlasti roheline tuli, sest 15 on paaritu arv. Kui tuli vahetub iga 3 minuti järel, siis põleks 15 ehk $5 \cdot 3$ minutit pärast punast tuld samuti roheline tuli, sest 5 on paaritu arv. Järelikult peavad tuled põlema 2 minuti kaupa.

c) Ajavahemik 12.25–12.26 asetseb täpselt 24 minutit pärast ajavahemikku 12.01–12.02. Kui kumbki tuli põleb fooris 1 minuti, kestab foori üks töötsükkel 2 minutit. Kui kumbki tuli põleb fooris 2 minutit, siis kestab foori töötsükkel 4 minutit, ning kui tuled vahetuvad 3 minuti järel, kestab töötsükkel 6 minutit. Kuna 24 jagub nii 2-ga, 4-ga kui ka 6-ga, põleb 24 minuti järel sõltumata foori töötsüklist fooris sama tuli mis algul ehk punane.

II osa lahendused

1. *Vastus:* 183 ja 1832.

Lahendus 1. Olgu väiksem liidetav a ning suurema liidetava viimane number b, siis suurem liidetav on $10a+b$. Saame võrrandi $a+(10a+b)=2015$ ehk $2015=11a+b$. Et $0 \leqslant b < 10$, on b parajasti arvu 2015 jääk 11-ga jagamisel. Et $2015 = 183 \cdot 11 + 2$, siis $b=2$ ja $a=183$. Otsitavad arvud on seega 183 ja 1832.

Lahendus 2. Arvu suurenedes ei saa temast üheliste numbri kustutamisel tekkiv arv väheneda. Seega arvu ja temast üheliste numbri kustutamisel tekkiva arvu summa muutub arvu suurenedes alati suuremaks. Järelikult saab iga selline summa ilmuda ülimalt ühe arvu ja temast üheliste numbri kustutamisel tekkiva arvu summana. Summa 2015 saame arvude 1832 ja 183 liitmisel.

2. *Vastus:* 81 cm^2.

Olgu suure ristküliku lühema ja pikema külje pikkused vastavalt a ja b. Siis väikse ristküliku mõõtmed on $\frac{1}{2}a$ ja $\frac{1}{2}b$. Et ruudu ümbermõõt on $2b$, on ruudu külje pikkus $\frac{1}{2}b$. Hallist ristkülikust alles jäänud osa ümbermõõdu saame, kui liidame halli ristküliku ümbermõõdule kahekordse ruudu küljepikkuse ja kahekordse väikse ristküliku pikema külje pikkuse. Seega avaldub suurus b võrrandist

$$60\text{ cm} + 2 \cdot \frac{b}{2} + 2 \cdot \frac{b}{2} = 96\text{ cm}$$

ehk $b = 18$ cm, millest omakorda leiame $a = 12$ cm. Seega suure ristküliku mõõtmed on 12 cm × 18 cm, väikse ristküliku mõõtmed 6 cm × 9 cm ja ruudu mõõtmed 9 cm × 9 cm. Hallist ristkülikust alles jäänud kujundi pindala on järelikult $12 \cdot 18 - 6 \cdot 9 - 9 \cdot 9$ ehk 81 ruutsentimeetrit.

3. *Vastus:* 7.

Lahendus 1. Olgu maleturniiril osalenud õpilaste koguarv n. Et iga osaleja mängis igaühega ülejäänud $n-1$ osalejast ühe partii, on partiide koguarv $\frac{n(n-1)}{2}$. Et iga partii panustab turniiritabelisse kokku 1 punkti (võitja saab 1 ja kaotaja 0 või mõlemad 0,5 punkti), on turniiri lõpus kõigi osalejate saadud punktide summa samuti $\frac{n(n-1)}{2}$. Sellest kahe seitsmenda klassi õpilase arvele jääb ülesande tingimuste kohaselt 8 punkti. Et kõik ülejäänud $n-2$ osalejat said punkte võrdselt, peab arvu $\frac{n(n-1)}{2}-8$ ja arvu $n-2$ jagatis olema võimalik punktide arv, s.o arvu 0,5 täiskordne. Tabelist

n	5	6	7	8	9
$\frac{n(n-1)}{2}-8$	2	7	13	20	28
$n-2$	3	4	5	6	7

selgub, et sobib ainult $n=9$. Seega osales turniiril $9-2$ ehk 7 kaheksanda klassi õpilast.

Lahendus 2. Olgu osalenud kaheksanda klassi õpilaste arv x. Eeldame, et igaüks neist sai täpselt p punkti. Siis turniiri lõpul oli kõigil võistlejatel kokku $px+8$ punkti. Et iga partii panustab turniiritabelisse täpselt 1 punkti, on ka mängitud partiide koguarv $px+8$. Teisalt, kuna võistlejate koguarv on $x+2$ ja kõik mängisid igaühega ülejäänud $x+1$ võistlejast 1 partii, on mängitud partiide arv $\frac{(x+2)(x+1)}{2}$. Saame võrrandi $px+8=\frac{(x+2)(x+1)}{2}$, mis teisendub kujule $x(x+3-2p)=14$. Kuna $2p$ on täisarv, on x seega arvu 14 tegur. Et ülesande tingimuste kohaselt $x<10$, jäävad järele võimalused $x=1$, $x=2$ ja $x=7$. Variandid $x=1$ ja $x=2$ ei sobi, sest siis vastavalt $p=-5$ ja $p=-1$. Seega $x=7$.

II osa lahendused

1. *Vastus:* 2.

Eeldame, et arv n jagub iga endast väiksema positiivse täisarvuga. Kuna $n > 1$, siis $n-1$ on samuti positiivne, mistõttu arv n jagub ka arvuga $n-1$. Ent ka $n-1$ jagub arvuga $n-1$; seega vahe $n-(n-1)$ ehk 1 jagub arvuga $n-1$. Järelikult $n-1=1$ ehk $n=2$.

Märkus. Seda, et arv n jagub arvuga $n-1$ ainult $n=2$ korral, saab põhjendada ka suuruskaalutlustega. Kui n jagub arvuga $n-1$, peab kehtima $n-1 \leqslant \frac{n}{2}$, kust saame $\frac{n}{2} \leqslant 1$ ja $n \leqslant 2$. Kuna $n=1$ on välistatud, peabki olema $n=2$.

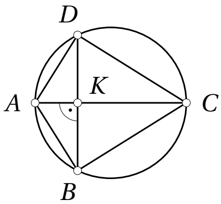
2. *Vastus:* rohkem.

Lahendus 1. Olgu enne mingit sammu nõiarohus algset ekstrakti a liitrit. Et anumast eemaldatav liiter segu moodustab kogu anuma sisust $\frac{1}{10}$, siis eemaldatav ekstraktikogus on $0{,}1a$ liitrit. Anumasse jääb alles $0{,}9a$ liitrit ekstrakti. Pärast 900 ml vee ja 100 ml ekstrakti lisamist on ekstrakti maht anumas $0{,}9a+0{,}1$ liitrit.

Kui $a > 1$, siis ilmselt $0{,}9a > 0{,}9$ ja $0{,}9a+0{,}1 > 0{,}9+0{,}1 = 1$. Eelneva valguses tähendab see, et kui sammu eel on ekstrakti rohkem kui liiter, siis ka sammu järel on ekstrakti rohkem kui liiter. Et protsessi algul on nõiarohus üle liitri ekstrakti, siis ka suvalise arvu sammude järel on nõiarohus rohkem kui liiter ekstrakti.

Lahendus 2. Olgu enne mingit sammu nõiarohus algset ekstrakti rohkem kui liiter. Selle koguse saab kirjutada kui $x+1$ liitrit, kus $x > 0$. Et anumast eemaldatav liiter segu moodustab kogu anuma sisust $\frac{1}{10}$, siis eemaldatav ekstraktikogus on $0{,}1(x+1)$ liitrit. Anumasse jääb alles $0{,}9(x+1)$ ehk $0{,}9x+0{,}9$ liitrit ekstrakti. Pärast 900 ml vee ja 100 ml ekstrakti lisamist on ekstrakti maht anumas $0{,}9x+0{,}9+0{,}1$ ehk $0{,}9x+1$ liitrit, mis on jällegi rohkem kui liiter. Kuna alguses on anumas rohkem kui liiter ekstrakti, siis ka suvalise arvu sammude järel jääb anumasse rohkem kui liiter ekstrakti.

Lahendus 3. Enne esimest sammu on nõiarohus 10 ehk $0{,}9^1 \cdot 10 + 1$ liitrit ekstrakti. Kui enne i-ndat sammu on nõiarohus $0{,}9^i \cdot 10 + 1$ liitrit ekstrakti, siis selle sammu järel on ekstrakti maht $0{,}9 \cdot \left(0{,}9^i \cdot 10 + 1\right) + 0{,}1$ ehk



Joonis 4

$0{,}9^{i+1} \cdot 10 + 0{,}9 + 0{,}1$ ehk $0{,}9^{i+1} \cdot 10 + 1$ liitrit ekstrakti. Järelikult on suvalise arvu sammude järel ekstrakti maht nõiarohus $0{,}9^{n} \cdot 10 + 1$ liitrit. Seega jääb nõiarohusse alati rohkem kui liiter algset ekstrakti.

3. *Lahendus 1.* Olgu vaadeldav kõõlnelinurk $ABCD$ ja poolitagu tema diagonaalide AC ja BD lõikepunkt K diagonaali BD (joonis 4). Siis AC on kolmnurga BCD külje BD keskristsirge ning läbib selle kolmnurga (ja ühtlasi ka nelinurga $ABCD$) ümberringjoone keskpunkti. Seega kõõl AC on selle ringjoone diameeter. Et diameetrile toetuv piirdenurk on täisnurk, siis $\angle ABC = 90^\circ$, kust

$$\angle ABK = 90^\circ - \angle KBC = \angle BCK,$$

mistõttu täisnurksed kolmnurgad ABK ja BCK on sarnased. Et punktid B ja D on sümmeetrilised sirge AC suhtes, siis on ülejäänud kaks kolmnurka ADK ja DCK võrdsed vastavalt kolmnurkadega ABK ja BCK, st kõik need neli kolmnurka on sarnased.

Lahendus 2. Kasutame samu tähistusi nagu lahenduses 1. Kuna AK on korraga kõrgus ja mediaan kolmnurgas ABD, on kolmnurk ABD võrdhaarne ning $\angle ABD = \angle ADB$. Piirdenurkadest saame $\angle ACB = \angle ADB$ ja $\angle ACD = \angle ABD$. Seega kõigil neljal kolmnurgal, milleks diagonaalid nelinurga $ABCD$ jaotavad, on üks nurk sama suurusega. Tipu K juures on neil neljal kolmnurgal täisnurk. Seega tunnuse NN alusel on need neli kolmnurka sarnased.

4. *Vastus:* kohe.

Lahendus 1. Näitame, et iga käigu järel on suurim viimati käigu teinud tüdruku arvude summa. Et ülesande tingimuste järgi lahkusid kaks tüdrukut peale kolmanda tüdruku käiku, ongi üksijäänud tüdrukul tol hetkel suurim summa ja ta saab kohe teistele järgneda.

Tõestamaks püstitatud väidet, jaotame kõik käigud kolmestesse rühmadesse alustades viimasest (1 või 2 mängu algul tehtud käiku võib jääda üle). Igas rühmas on viimati käinud tüdruku arv teistest suurem. Järelikult on rühmadesse kuuluvate arvude hulgas viimati käinud tüdruku kirjutatud arvude summa suurem kui kummagi ülejäänud tüdruku kirjutatud arvude summa. Kui esimene Anna kirjutatud arv jäi rühmadeks jaotusest välja, pidi viimase käigu tegema Anna. See kasvatab tema summa edumaad teiste summade ees veelgi. Kui esimesed kaks käiku jäid mõlemad rühmadeks jaotusest välja, tegi viimase käigu Birgit. Et Birgiti esimene arv pidi olema 1 võrra suurem Anna esimesest arvust, siis nende kahe arvu lisamisel summadele kasvab jällegi Birgiti summa edumaa teiste summade ees. Seega kõikidel juhtudel on viimati käinud tüdruku arvude summa suurim.

Lahendus 2. Väidet, et viimati käigu teinud tüdruku arvude summa on suurim, saab tõestada ka järgmisel viisil. Paneme tähele, et pärast seda, kui iga tüdruk on kirjutanud n arvu, on Birgiti ja Anna summade vahe täpselt n, Carmeni ja Anna summade vahe $2n$ ning Carmeni ja Birgiti summade vahe n. Seega on pärast Carmeni käiku tema summa suurim. Samas järgmisena kirjutab Anna arvu $x + 3n$ ning Birgit kirjutab arvu $x + 3n + 1$. Kuna $x + 3n > 2n > n$, siis pärast Anna käiku on tema summa suurim. Sama kehtib Birgiti kohta.

Lahendus 3. Tõestame väite, et viimati käigu teinud tüdruku arvude summa on suurim, kasutades aritmeetilise jada summa valemit. Kui x on esimene arv ja tüdrukud on igaüks kirjutanud n arvu, siis Anna kirjutatud arvude summa on

$$x+(x+3)+(x+6)+\ldots+(x+3(n-1)) = nx+3(1+2+\ldots+n-1) = nx+\frac{3n(n-1)}{2}.$$

Birgiti ja Carmeni kirjutatud arvude summadeks saame sama arvutuse tulemusena $n(x+1) + \frac{3n(n-1)}{2}$ ja $n(x+2) + \frac{3n(n-1)}{2}$. Nüüd kontrollime, et viimasena kirjutanud tüdrukul on suurim summa. Kui viimane oli Carmen, on see saadud avaldiste põhjal ilmne. Kui viimane oli Anna, siis piisab kontrollida, et

$$(n+1)x + \frac{3(n+1)n}{2} > n(x+2) + \frac{3n(n-1)}{2}$$

ehk $x > -n$. Juht, kus viimane oli Birgit, tuleb analoogiliselt.

Eesti LXII matemaatikaolümpiaad

7. veebruar 2015 Piirkonnavoor **10. klass**

Lahendused

1. *Vastus:* $x = -1$, $y = 0$ ja $x = \frac{3}{2}$, $y = -\frac{5}{4}$.

Lahendus 1. Avaldades mõlemast võrrandist y, saame samaväärse süsteemi

$$\begin{cases} y = 1 - x^2 \\ y = \dfrac{-1-x}{2} \end{cases}.$$

Asendades y ükskõik kummast võrrandist teise, tekib seos $1 - x^2 = \frac{-1-x}{2}$, mis teisendub ruutvõrrandiks $2x^2 - x - 3 = 0$ lahenditega $x = -1$ ja $x = \frac{3}{2}$. Tagasiasendades saame vastavalt $y = 0$ ja $y = -\frac{5}{4}$.

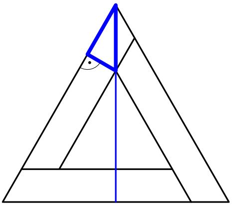
Lahendus 2. Avaldades teisest võrrandist x, saame $x = -1 - 2y$. Asendades esimesse võrrandisse, tekib seos $(-1-2y)^2 + y = 1$, mis teisendub võrrandiks $y(4y+5) = 0$ lahenditega $y = 0$ ja $y = -\frac{5}{4}$. Asendades siit tagasi teise võrrandisse, saame vastavalt $x = -1$ ja $x = \frac{3}{2}$.

Märkus. Kui teise lahenduse lõpul asendataks leitud y väärtused ettevaatamatult hoopis esimesse võrrandisse (samasse, kuhu juba kord asendati), tekiksid võõrlahendid $x = 1$ ja $x = -\frac{3}{2}$, mistõttu niisuguse asenduse korral tuleb leitud lahendite sobivust kontrollida.

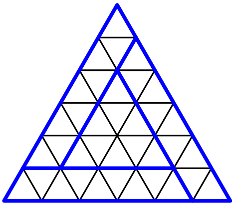
2. *Vastus:* $\frac{\sqrt{3}}{12}$.

Lahendus 1. Olgu trapetsi kõrgus h. Siis väikse kolmnurga tipu kaugus suure kolmnurga vastavast tipust on $2h$, sest see võrdub hüpotenuusiga sellises täisnurkses kolmnurgas, mille ühe kaateti pikkus on h ja vastasnurga suurus 30° (joonis 5). Et väikse kolmnurga pindala on $\frac{1}{4}$ suure kolmnurga pindalast, siis väikse kolmnurga kõrgus on $\frac{1}{2}$ suure kolmnurga kõrgusest. Seega suure ja väikse kolmnurga kõrgused on vastavalt $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ja $\frac{\sqrt{3}}{4}$. Saame võrrandi

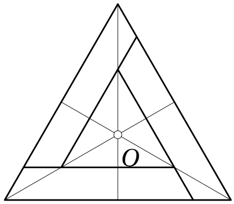
$$h + \frac{\sqrt{3}}{4} + 2h = \frac{\sqrt{3}}{2},$$



Joonis 5



Joonis 6



Joonis 7

kust $h = \dfrac{\sqrt{3}}{12}$.

Lahendus 2. Jaotame algse võrdkülgse kolmnurga 36 võrdseks võrdkülgseks kolmnurgaks ja vaatleme 9 väiksest kolmnurgast koosnevat sisemist võrdkülgset kolmnurka koos ümbritseva 3 trapetsiga, millest igaüks koosneb samuti 9 väiksest kolmnurgast (joonis 6). Et ülesandes antud jaotuses peavad sisemise kolmnurga küljed olema paralleelsed välimise kolmnurga külgedega (muidu pole kolm ülejäänud tükki trapetsid), siis konstruktsiooni sümmeetrilisuse tõttu on nii saadud tükeldus ja ülesandes antud tükeldus samad. Sellest näeme, et trapetsi kõrgus võrdub sellise võrdkülgse kolmnurga kõrgusega, mille mõõtmed on 6 korda väiksemad suure võrdkülgse kolmnurga mõõtmetest. Seega trapetsi kõrgus moodustab $\dfrac{1}{6}$ suure võrdkülgse kolmnurga kõrgusest, st trapetsi kõrgus on $\dfrac{\sqrt{3}}{12}$.

Lahendus 3. Sümmeetria tõttu on suure ja väikse võrdkülgse kolmnurga ümberringjoontel ühine keskpunkt O, mis on ühtlasi mõlema kolmnurga mediaanide ja kõrguste lõikepunkt (joonis 7). Punkti O kaugus suure kolmnurga küljest on $\dfrac{1}{3}$ suure kolmnurga kõrgusest ning kaugus väikse kolmnurga küljest on $\dfrac{1}{3}$ väikse kolmnurga kõrgusest. Kuna väikse kolmnurga pindala moodustab ülesande tingimuste põhjal $\dfrac{1}{4}$ suure kolmnurga pindalast, on väikse kolmnurga kõrgus $\dfrac{1}{2}$ suure kolmnurga kõrgusest. Seega punkti O kaugus väikse kolmnurga küljest võrdub $\dfrac{1}{6}$ suure kolmnurga kõrgusest. Kokkuvõttes on punkti O kaugus suure ja väikse kolmnurga küljest vastavalt $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$ ja $\dfrac{\sqrt{3}}{12}$. Trapetsi kõrgus on nende arvude vahe ehk $\dfrac{\sqrt{3}}{12}$.

3. *Vastus:* a) 2; b) -50.

Lahendus 1. Andmete põhjal

$$100 = x^2 - y^2 = (x - y)(x + y).$$

Seega arv $x - y$ on arvu 100 tegur. Kuna $x - y$ ja $x + y$ erinevad teineteisest $2y$ võrra, on nad sama paarsusega (st mõlemad paaris või mõlemad paaritud). Kui nad oleksid mõlemad paaritud, ei saaks nende korrutis olla paarisarv 100. Järelikult on nad paaris. Arvu 100 vähim paaris tegur naturaalarvude seas on 2, mis on $x - y$ väärtusena ka saavutatav (sobib $x = 26$, $y = 24$). Täisarvude seas on vähim paaris tegur -100, kuid see ei sobi, sest teine tegur -1 oleks siis paaritu. Suurusjärjekorras järgmine tegur -50 sobib (siis $x = -26$, $y = 24$).

Lahendus 2.

a) Kui $x = 26$ ja $y = 24$, siis $x^2 - y^2 = 676 - 576 = 100$ ja $x - y = 2$. Ei ole võimalik $x - y = 1$, sest selleks peaksid x ja y olema eri paarsusega, kuid siis oleksid ka x^2 ja y^2 eri paarsusega (sest arv ja tema ruut on sama paarsusega) ega saaks anda vaheks paarisarvu 100. Ilmselt pole võimalik ka $x - y = 0$, sest siis $x^2 - y^2 = 0$.

b) Koostame ruutude tabeli kuni 676-ni:

0	±1	±2	±3	±4	±5	±6	±7	±8	±9	±10	±11	±12	±13
0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169

±14	±15	±16	±17	±18	±19	±20	±21	±22	±23	±24	±25	±26	...
196	225	256	289	324	361	400	441	484	529	576	625	676	...

Ainsad ruutude paarid, kus vahe on 100, on $(100, 0)$ ja $(676, 576)$. Neist esimene annab arvude endi vähimaks võimalikuks vaheks $-10 - 0$ ehk -10, teine aga $-26 - 24$ ehk -50. Et järjestikuste ruutude vahe järjest suureneb, saaks tabelis esitamata ruutude vahe olla 100 ainult siis, kui nad on järjestikused ruudud (teineteisest kaugemal paiknevate ruutude vahe oleks juba 100-st suurem). Järjestikuste ruutude vahe aga ei saa olla 100, nagu näidatud a-osa lahenduses.

4. Olgu need reaalarvud x ja y. Ülesande tingimusest saame

$$x + y = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}.$$

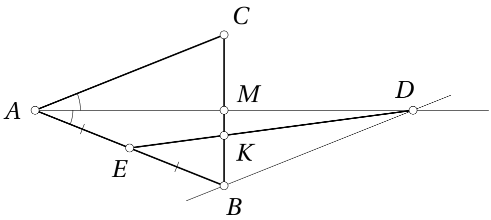
Korrutades võrduse pooled suurusega xy, saame

$$xy(x + y) = x + y,$$

kust kõigi liikmete vasakule poole viimisel ja $x + y$ sulgude taha võtmisel tekib

$$(xy - 1)(x + y) = 0.$$

Seega $xy = 1$ või $x + y = 0$; esimesel juhul on x ja y teineteise pöördarvud, teisel juhul vastandarvud.



Joonis 8

5. *Vastus:* 1 : 2.

Lahendus 1. Olgu K ja M sirge BC lõikepunkt vastavalt sirgetega DE ja DA (joonis 8). Sirgete AC ja BD paralleelsusest tulenevalt $\angle MBD = \angle MCA$, seega kolmnurgad AMC ja DMB on sarnased tunnuse NN järgi. Et võrdhaarse kolmnurga tipunurga poolitaja on ka mediaan, siis $|CM| = |BM|$, millest tulenevalt on kolmnurgad AMC ja DMB koguni võrdsed. Seega $|AM| = |DM|$. Järelikult on DE ja BM kolmnurga ABD mediaanid ja K mediaanide lõikepunkt, kust $|BK| = 2|KM|$. Kokkuvõttes

$$\frac{|BK|}{|KC|} = \frac{|BK|}{|KM| + |MC|} = \frac{|BK|}{|KM| + |BM|} = \frac{2|KM|}{|KM| + 3|KM|} = \frac{1}{2}.$$

Lahendus 2. Olgu K ja M defineeritud nagu lahenduses 1. Sirgete AC ja BD paralleelsusest tulenevalt $\angle BDM = \angle CAM$. Kuna punktid B ja C paiknevad sirge AD suhtes sümmeetriliselt, siis ka $\angle CDM = \angle BDM$. Seega $\angle CDM = \angle CAM = \angle BAM$, mistõttu sirged AB ja CD on paralleelsed. Järelikult $ABDC$ on rööpkülik. Et rööpküliku diagonaalid poolitavad teineteist, siis $|AM| = |DM|$. Edasi jätkame nagu lahenduses 1.

6. *Vastus:* ei.

Arvudel $2i$ ja $2i + 1$ on kõik numbrid peale viimase samad ja viimased numbrid erinevad 1 võrra. Seega on iga sellise paari arvudest üks paaris ja teine paaritu numbrite summaga. Sellest tulenevalt on arvude 0 kuni $2k+1$ hulgas alati ühepalju paaris ja paaritu numbrite summaga arve. Jättes välja arvu 0, mille numbrite summa 0 on paaris, on järelejäänud arvude 1 kuni $2k + 1$ hulgas paaritu numbrite summaga arve rohkem. Seega ei saa ka arvude 1 kuni $2k$ seas olla paaris numbrite summaga arvud enamuses (kui $2k + 1$ on paaritu numbrite summaga, siis on 1 kuni $2k$ seas paaris ja paaritu numbrite summaga arve ühepalju, vastasel juhul on aga paaritu numbrite summaga arve koguni 2 võrra rohkem). Et iga positiivne täisarv n esitub kujul $2k$ või $2k + 1$, on sellega võimalused ammendatud.

Lahendused

1. *Vastus:* 60.

Lahendus 1. Olgu pere igakuine väljaminek pärast sanktsioonide kehtestamist a. Ülesande tingimuste järgi kulub krõpsudele kuus $\frac{3}{16}a$ ja kookidele $\frac{1}{4}a$, mis kokku teeb $\frac{7}{16}a$. Et pudrule kulus 5 korda vähem kui krõpsudele ja juurviljale 10 korda vähem kui kookidele, olid varasemad kulud pudrule ja juurviljale kuus vastavalt $\frac{3}{80}a$ ja $\frac{1}{40}a$, mis kokku teeb $\frac{1}{16}a$. Järelikult sanktsioonide tõttu lisandus igakuist kulu $\frac{7}{16}a - \frac{1}{16}a$ ehk $\frac{6}{16}a$, sanktsioonideeelsed kogukulud olid aga $\frac{10}{16}a$. Kogukulud on suurenenud seega $\frac{6}{10}$ ehk 60% võrra.

Lahendus 2. Olgu sanktsioonideeelne Jukule pudruvalmistamise kulu x, juurviljade muretsemise kulu y ja muu igakuine kulu z. Siis igakuised kulud kokku olid enne sanktsioone $x + y + z$ ja pärast sanktsioone vastavalt ülesande tingimustele $5x + 10y + z$, niisiis kulud suurenesid $4x + 9y$ võrra. Ülesande tingimustest saame veel $\frac{5x}{5x+10y+z} = \frac{3}{16}$ ja $\frac{10y}{5x+10y+z} = \frac{1}{4}$, kust murdude kaotamisel ja sarnaste liikmete koondamisel saame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} 65x - 30y - 3z = 0, \\ -5x + 30y - z = 0. \end{cases}$$

Liites esimesele võrrandile 13-ga läbi korrutatud teise võrrandi, saame $360y - 16z = 0$, kust $y = 2 \cdot \frac{z}{45}$. Võrrandite liitmisel kordajatega 1 saame aga $60x - 4z = 0$, kust $x = \frac{1}{15}z = 3 \cdot \frac{z}{45}$. Otsitava suuruse leiame nüüd arvutusest

$$\frac{4x+9y}{x+y+z} = \frac{4 \cdot 3 + 9 \cdot 2}{3 + 2 + 45} = \frac{30}{50} = 60\%.$$

2. *Vastus:* $\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}$ ja $\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$.

Kui $a = 1$, siis oleks kolmnurk küljepikkustega a, a^2, a^3 võrdkülgne, mitte täisnurkne. Seega $a > 1$ või $a < 1$.

Kui $a > 1$, siis $a < a^2 < a^3$, mistõttu a^3 peaks olema hüpotenuusi pikkus. Pythagorase teoreemist saame $a^2 + a^4 = a^6$ ehk $1 + a^2 = a^4$. Tehes siin muutujavahetuse $y = a^2$, saame ruutvõrrandi $y^2 - y - 1 = 0$, mille lahendid on $y = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Et $y = a^2$, rahuldab meid ainult positiivne lahend $y = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, kust $a = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}}$.

Kui $a < 1$, siis $a > a^2 > a^3$, mistõttu a peaks olema hüpotenuusi pikkus. Pythagorase teoreemist saame $a^6 + a^4 = a^2$ ehk $a^4 + a^2 = 1$. Tehes jällegi muutujavahetuse $y = a^2$, saame ruutvõrrandi $y^2 + y - 1 = 0$, mille lahendid on $y = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Et $y = a^2$, rahuldab meid ainult positiivne lahend $y = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$, kust $a = \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}}$.

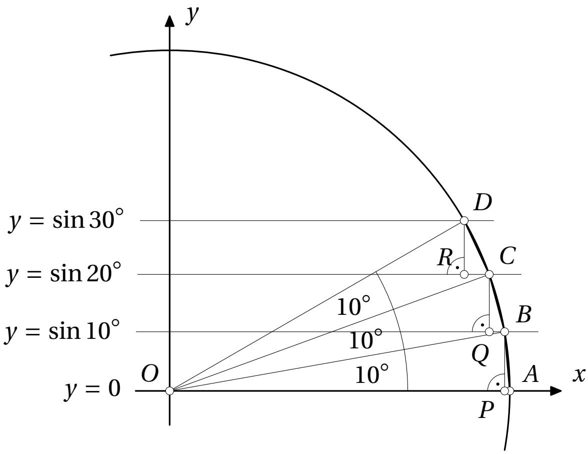
3. *Vastus:* jah.

Sobivad näiteks arvud 1, 2, 3, 6, 12, 24, 48, 96, 192 ja 384. Nende summa on $2 \cdot 384$ ehk 768. Kuna kõik valitud arvud on arvu 384 tegurid, siis jagub nende kõigiga ka arv 768.

Märkus. Sobivaid komplekte on lõpmata palju. Toodud näide on ehk neist lihtsaimini avastatav, sest võib alustada arvu 6 esitusest 3 jagaja summana kujul $6 = 1+2+3$ ning märgata, et 2-ga korrutamine võimaldab summasse alati vana summa uue jagajana lisada. Vähim arv, mis esitub 10 jagaja summana, on aga 120, mis esitub selliselt 17 erineval viisil. Üks võimalus ülesannet lahendada ongi proovida summakandidaadina arve, mis väga paljude väikeste arvudega jaguvad (nagu 120) ja selekteerida tema jagajatest sobivad 10 välja.

4. *Lahendus 1.* Vaatleme ringjoont keskpunktiga O raadiusega 1. Olgu A, B, C, D selle ringjoone punktid, mille korral $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = 10^\circ$ ja vastavad sektorid ei kattu (joonis 9). Olgu P punkti B projektsioon sirgele OA, olgu Q punkti C projektsioon punkti B läbivale sirgega OA paralleelsele sirgele ning olgu R punkti D projektsioon punkti C läbivale sirgega OA paralleelsele sirgele. Siis $|BP| + |CQ| + |DR| = \sin 30^\circ$ ja $|BP|+|CQ| = \sin 20^\circ$. Et $|AB| = |BC| = |CD|$, kuid lõigud AB, BC ja CD on OA suhtes järjest väiksema nurga all, siis $|BP| > |CQ| > |DR|$. Seega neist kolmest lõigust kahe pikema pikkuste summa on üle $\frac{2}{3}$ kõigi kolme lõigu pikkuste summast ehk

$$\sin 20^\circ > \frac{2}{3} \sin 30^\circ = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}.$$



Joonis 9

Lahendus 2. Olgu α esimese veerandi nurk, mille korral $\sin\alpha = \frac{1}{3}$. Siis

$$\begin{aligned}\sin 3\alpha &= \sin(2\alpha+\alpha) = \sin 2\alpha\cos\alpha + \cos 2\alpha \sin\alpha \\ &= 3\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha \\ &= 3\sin\alpha - 3\sin^3\alpha - \sin^3\alpha \\ &= 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha \\ &= 3\cdot\frac{1}{3} - 4\cdot\frac{1}{27} = \frac{23}{27}.\end{aligned}$$

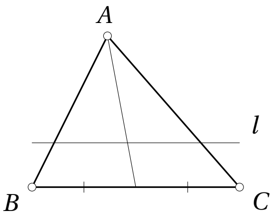
Kuna $3\cdot 27^2 = 2187 > 2116 = 46^2 = (2\cdot 23)^2$, siis $\frac{\sqrt{3}}{2} > \frac{23}{27}$ ehk $\sin(3\cdot 20^\circ) > \sin 3\alpha$. Järelikult $3\cdot 20^\circ > 3\alpha$, sest siinus on esimeses veerandis kasvav. Siit $20^\circ > \alpha$, millest siinuse kasvavuse tõttu omakorda järeldub $\sin 20^\circ > \sin\alpha = \frac{1}{3}$.

Lahendus 3. Siinusfunktsioon on esimeses veerandis kumer. Rakendades Jenseni võrratust punktides 0° ja 30° kaaludega $\frac{1}{3}$ ja $\frac{2}{3}$, saame

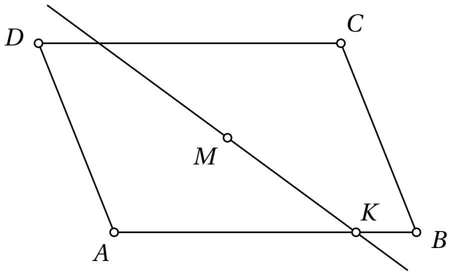
$$\frac{1}{3}\sin 0^\circ + \frac{2}{3}\sin 30^\circ < \sin\left(\frac{1}{3}\cdot 0^\circ + \frac{2}{3}\cdot 30^\circ\right)$$

ehk $\frac{1}{3} < \sin 20^\circ$.

5. *Vastus:* a) ei; b) jah.



Joonis 10



Joonis 11

a) Olgu kolmnurga ABC tipust A tõmmatud mediaani pikkus m. Vaatleme küljega BC paralleelset sirget l, mis jagab kolmnurga kaheks pindalalt võrdseks osaks (joonis 10). Üks neist osadest on kolmnurk, mis on sarnane esialgse kolmnurgaga. Et väikse kolmnurga pindala on pool kolmnurga ABC pindalast, on sarnasustegur $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Seega on tipust A tõmmatud mediaani väikse kolmnurga sisse jääva osa pikkus $\frac{m}{\sqrt{2}}$, väiksest kolmnurgast välja jääva osa pikkus aga $m\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Nende osade pikkuste suhe on $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$ ehk $\sqrt{2}+1$. Et aga mediaanide lõikepunkt jagab mediaani suhtes $2:1$, siis sirge l ei läbi kolmnurga mediaanide lõikepunkti.

b) Olgu rööpküliku $ABCD$ diagonaalide lõikepunkt M. Olgu l suvaline sirge, mis jagab rööpküliku $ABCD$ kaheks pindalalt võrdseks osaks. Üldisust kitsendamata võib eeldada, et l läbib külge AB punktis K. Sümmeetria tõttu jaotab ka sirge KM rööpküliku $ABCD$ kaheks pindalalt võrdseks osaks (joonis 11). Kuna sirge pööramisel ümber punkti K muutub osade pindalade suhe ainult ühes suunas (ühe osa pindala väheneb, teise osa pindala suureneb), ei saa teised punkti K läbivad sirged rööpkülikut kaheks võrdse pindalaga osaks jaotada. Järelikult ka sirge l läbib punkti M.

6. *Vastus:* 6.

Olgu maleturiiril osalenute arv n. Et iga võistleja mängis igaühega ülejäänud $n-1$ võistlejast ühe partii, on mängitud partiide koguarv $\frac{n(n-1)}{2}$. Kuna iga partii panustab turniiritabelisse 1 punkti (võitja saab 1 ja kaotaja 0 või mõlemad 0,5 punkti), oli turniiri lõpuks kõigil võistlejatel kokku $\frac{n(n-1)}{2}$ punkti. Tingimuste kohaselt said kõik peale esikolmiku 1,5 või vähem punkti. Seega on võistlejate poolt saadud punktide koguarv ülimalt $4{,}5+4+2{,}5+(n-3)\cdot 1{,}5$ ehk $1{,}5n+6{,}5$. Kokkuvõttes $\frac{n(n-1)}{2} \leqslant 1{,}5n+6{,}5$, kust $n^2-4n-13 \leqslant 0$. Et ruutvõrrandi $n^2-4n-13=0$ lahendid on $2\pm\sqrt{17}$, saame $n \leqslant 2+\sqrt{17}$ ehk täisarvulisust arvestades $n \leqslant 2+4=6$.

Teisalt pidi turniiri võitja 4,5 punkti kogumiseks mängima vähemalt 5 partiid, mis nõuab vähemalt 6 osalejat. Seega osalenute arv pidi olema 6.

Lahendused

1. *Vastus:* 0, $\sqrt{\frac{6}{7}}$ ja $-\sqrt{\frac{6}{7}}$.

Kahekordse nurga koosinuse valemi $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$ kahekordsel rakendamisel saame

$$\cos 4x = 2\cos^2 2x - 1 = 2\left(2\cos^2 x - 1\right)^2 - 1 = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1.$$

Asendades selle algsesse võrrandisse $\cos 4x = \cos^4 x$ ja koondades sarnased liikmed, saame

$$7\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1 = 0.$$

Muutujavahetusega $y = \cos^2 x$ jõuame ruutvõrrandini $7y^2 - 8y + 1 = 0$, mille lahendid on $y_1 = 1$ ja $y_2 = \frac{1}{7}$. Mõlemad ka sobivad $\cos^2 x$ väärtuseks. Et $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - y$, siis $\sin^2 x$ võimalikud väärtused on 0 ja $\frac{6}{7}$. Avaldise $\sin x$ võimalikud väärtused on seega 0, $\sqrt{\frac{6}{7}}$ ja $-\sqrt{\frac{6}{7}}$.

2. *Vastus:* 0 ja -2.

Lahendus 1. Et kahe funktsiooni graafiku puutepunkt kuulub neile mõlemale, rahuldab puutepunkti x-koordinaat võrdust $x^2+ax+a = -x^2+bx+b$, mis lihtsustub kujule

$$2x^2 + (a-b)x + (a-b) = 0. \tag{1}$$

Puutumine tähendab lisaks ka funktsioonide tuletiste võrdumist kohal x. Seega $2x + a = -2x + b$ ehk

$$4x + (a-b) = 0. \tag{2}$$

Avaldades võrrandist (2) $a - b = -4x$ ja asendades võrrandisse (1), saame $2x^2 - 4x^2 - 4x = 0$ ehk $-2x(x+2) = 0$, kust $x = 0$ või $x = -2$.

Lahendus 2. Nagu lahenduses 1, tuletame ühiste punktide x-koordinaatide määramiseks ruutvõrrandi (1). Et funktsiooni $y = x^2 + ax + a$ graafik on üleni nõgus ja $y = -x^2 + bx + b$ graafik üleni kumer, on nende graafikute puutepunkt ka nende ainus ühine punkt. See tähendab, et ruutvõrrandil (1) peab olema täpselt üks lahend ehk tema diskriminant on null. Sellest saame

$$(a-b)^2 - 8(a-b) = 0,$$

kust $a - b = 0$ või $a - b = 8$. Esimesel juhul jääb võrrandist (1) järele $2x^2 = 0$, kust $x = 0$. Teisel juhul saame võrrandist (1) $2x^2 + 8x + 8 = 0$ ehk $2(x+2)^2 = 0$, kust $x = -2$.

3. *Vastus:* 90.

Kui õpetaja kirjutab arvud $\overline{ab}$ ja $\overline{cd}$, siis Jüri saab arvu $\overline{ab} \cdot \overline{cd} + \overline{ab} + \overline{cd}$, Mari aga arvu $\overline{abcd}$ ehk $\overline{ab} \cdot 100 + \overline{cd}$. Ülesande tingimuse kohaselt peab kehtima võrdus $\overline{ab} \cdot \overline{cd} + \overline{ab} + \overline{cd} = \overline{ab} \cdot 100 + \overline{cd}$, mis on samaväärne võrdusega

$$\overline{ab} \cdot \left(\overline{cd} + 1\right) = \overline{ab} \cdot 100. \tag{3}$$

Siit $\overline{cd} = 99$. Ilmselt kehtib võrdus (3) nüüd suvalise kahekohalise arvu $\overline{ab}$ korral. Seega on õpetajal võimalik arvud valida 90 erineval viisil.

4. *Lahendus 1.* Kuna tõestatava võrratuse pooled on positiivsed, on ta samaväärne poolte ruututõstmisel saadava võrratusega. Viies seejärel paremalt $2n+1$ üle vasakule, saame omakorda samaväärse võrratuse

$$\frac{1^2}{2^2} \cdot \frac{3^2}{4^2} \cdot \frac{5^2}{6^2} \cdot \ldots \cdot \frac{(2n-1)^2}{(2n)^2} \cdot (2n+1) \leqslant \frac{3}{4}. \tag{4}$$

Võrratuse (4) vasaku poole korrutise teisendamisel saame

$$\begin{aligned}
&\frac{1^2}{2^2} \cdot \frac{3^2}{4^2} \cdot \frac{5^2}{6^2} \cdot \ldots \cdot \frac{(2n-1)^2}{(2n)^2} \cdot (2n+1) \\
&\quad = 1 \cdot \frac{1 \cdot 3}{2^2} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4^2} \cdot \ldots \cdot \frac{(2n-3)\cdot(2n-1)}{(2n-2)^2} \cdot \frac{(2n-1)\cdot(2n+1)}{(2n)^2} \\
&\quad = \frac{2^2-1}{2^2} \cdot \frac{4^2-1}{4^2} \cdot \ldots \cdot \frac{(2n-2)^2-1}{(2n-2)^2} \cdot \frac{(2n)^2-1}{(2n)^2}.
\end{aligned}$$

Et $\frac{2^2-1}{2^2} = \frac{3}{4}$ ja kõik ülejäänud tegurid on 1-st väiksemad, on saadud korrutis väiksem arvust $\frac{3}{4}$ (või sellega võrdne, kui $n = 1$). Seega võrratus (4) kehtib.

Lahendus 2. Teeme induktsiooni n järgi. Juhul $n = 1$ on tõestatava võrratuse pooled võrdsed arvuga $\frac{1}{2}$. Vaatame olukorda $n = k$ jaoks ja eeldame võrratuse kehtivust $n = k - 1$ jaoks. Saame

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{2k-1}{2k} = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{2k-3}{2k-2}\right) \cdot \frac{2k-1}{2k} \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2k-1}} \cdot \frac{2k-1}{2k}.$$

Paneme tähele, et kehtib $\frac{2k-1}{2k} < \frac{\sqrt{2k-1}}{\sqrt{2k+1}}$, sest see lihtsustub kujule $(2k-1)(2k+1) < (2k)^2$, mis peab paika $(2k-1)(2k+1) = (2k)^2 - 1$ tõttu. Seega

$$\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2k-1}} \cdot \frac{2k-1}{2k} < \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2k-1}} \cdot \frac{\sqrt{2k-1}}{\sqrt{2k+1}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2k+1}}.$$

Induktsiooni samm on sellega tehtud.

Lahendus 3. Paneme tähele, et iga k korral

$$\frac{2k-1}{2k} = \sqrt{\frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k-1}{2k}} < \sqrt{\frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k}{2k+1}} = \sqrt{\frac{2k-1}{2k+1}} = \frac{\sqrt{2k-1}}{\sqrt{2k+1}}.$$

Seega

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} \leqslant \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}} \cdot \ldots \cdot \frac{\sqrt{2n-1}}{\sqrt{2n+1}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2n+1}}.$$

5. *Vastus:* ei.

Oletame, et ülesandes kirjeldatud olukord on võimalik. Üldisust kitsendamata olgu A ja B sellised, et punktid C ja D asuvad samal pool sirget AB. Kuna punkt D asub väljaspool kolmnurga ABC ümberringjoont, siis $\angle ADB < \angle ACB$. Et ülesande tingimuste järgi ka C asub väljaspool kolmnurga DAB ümberringjoont, siis $\angle ACB < \angle ADB$. Saime vastuolu, mis näitab, et ülesandes kirjeldatud olukord on tegelikult võimatu.

6. *Vastus:* $\frac{n(n^2+1)}{2}$.

Arv i-nda rea j-nda veeru ristumiskohal on $(i-1)n+j$. Kuna igast reast ja igast veerust on valitud täpselt üks arv, siis liidetakse see suurus üks kord iga i jaoks ja samal ajal üks kord iga j jaoks. Seega valitud arvude summa on $(0+1+\ldots+(n-1))\,n+(1+2+\ldots+n)$ ehk $\frac{(n-1)n}{2} \cdot n + \frac{n(n+1)}{2}$ ehk $\frac{n(n^2+1)}{2}$.

Lp hindaja!

Käesolevas esitame kõigepealt hindamise üldised põhimõtted ning seejärel järjekorras konkreetsed hindamisjuhised iga ülesande kohta eraldi.

1. Õpilase lahenduseks tuleb esmajoones lugeda see, mida õpilane on ülesande kohta vormistanud puhtandina (sh mustandipaberile selgesti arusaadavalt kirja pandud mõttekäigud, kui need on ametlikult puhtandipaberilt viidatud). Töö mustandi arvestamine või mittearvestamine ülesande lahenduse hulka on hindaja otsustada (või piirkonna hindamiskomisjoni ühine otsus kõigi ülesannete suhtes), kuid see peab toimuma kõigis töödes ühtmoodi.

2. Alljärgnevas on 7.–9. klassi olümpiaadi I osa (testi) ning kõikide ülejäänud ülesannete hindamisjuhised esitatud erinevalt.

   Testi iga küsimuse jaoks on eraldi loetletud või kirjeldatud vastused, mille eest tuleks anda vastavalt kaks punkti või üks punkt (st vastavaid punkte ühe küsimuse piires *ei tule* liita). Testiülesannete lahendusi õpilased ei pea esitama, vaid kirjutavad ülesannete lehel vastavale punktiirile või ülesande tekstis viidatud kohta ainult vastuse.

   Seevastu kõigi teiste ülesannete kohta tuleb esitada täielikud lahendused, ainult vastustest ei piisa. Nende ülesannete lahendused on hindamisjuhistes jaotatud võimalust mööda osadeks (etappideks) ning on näidatud iga osa eest antav punktide arv (st ühe ülesande eest antava punktisumma saamiseks *tuleb* lahenduse erinevate osade eest antud punktid liita).

   Mõnes skeemis on mõne etapi kirjelduse all („*Sealhulgas:*“ järel) alapunktidena välja toodud konkreetse etapi väiksemate osade eest antavad punktid – need lähevad käiku juhul, kui lahenduse see etapp on ebatäielik või vigane ja selle osa täispunkte seetõttu ei saa anda. Alamosade punktid tuleb omavahel samuti liita.

3. Žürii lahendustes ja käesolevates hindamisjuhistes on ülesannete vastused esitatud enamasti ainult ühel, lihtsaimal või kõige tõenäolisemalt esineval kujul. Hindamisel (sh testid!) tuleb võrdselt õigeks lugeda ka sama vastuse teised mõistlikud esitusviisid – sh taandatud hariliku murruna, segaarvuna, kümnendmurruna, sõnadega välja kirjutatuna –, seejuures ka osana pikemalt (nt täislausega, koos sobiva liigisõnaga või koos selgitustega) antud

vastusest. Juhud, kus ülesande sisu tingib erandeid sellest üldreeglist, on eraldi mainitud vastava ülesande hindamisjuhises.

Ühik arvu järel on vastuses vajalik juhul, kui ülesandes on küsitud suurust, mis teatud ühikutes avaldub. Näiteks küsimusele „Kui suur pindala …?“ saab õige vastus olla „120 cm^2“, kuid mitte „120“ (kui ülesande tekstis pole kasutatud ühikuta pikkusi/pindalasid). Teistes ühikutes väljendatud sama suurus tuleb lugeda õigeks, näiteks vastused „120 cm^2“ ja „1,2 dm^2“ on samaväärsed. Ühik vastuses ei ole nõutav, kui ülesandes on küsitud kindlate ühikute arvu. Näiteks küsimusele „Mitu ruutsentimeetrit …?“ antud vastused „120“ ja „120 cm^2“ tuleb võrdväärseks lugeda samal alusel nagu küsimusele „Mitu karu …?“ antud vastused „3“ ja „3 karu“ (vastus koos liigisõnaga). Teistes ühikutes antud vastus tuleb aga lugeda valeks, vastused „120 cm^2“ ja „1,2 dm^2“ ei ole siin samaväärsed.

4. Mõnede ülesannete kohta, mida saab lahendada mitmel oluliselt erineval viisil, anname eraldi hindamisskeemid erinevate lahendusviiside jaoks. Rõhutame, et iga konkreetset mittetäielikku lahendust tuleb hinnata ainult *ühe* sellise skeemi järgi (selle järgi, mille kohaselt ta saaks kõige rohkem punkte).

5. Enamiku ülesannete korral (v.a testid ja tõestusülesanded) on hindamisjuhiste lõpus eraldi näidatud, mitu punkti anda ainult õige vastuse eest. See hinne on mõeldud juhuks, kui töös on ülesande kohta toodud ainult õige vastus või õige vastus koos mõttekäiguga, mis ei annaks skeemi järgi rohkem punkte kui on ette nähtud õige vastuse eest.

6. Kahtlemata esineb õpilaste töödes ka mõttekäike, mis ei mahu meie poolt pakutud skeemidesse. Selliste lahenduste hindamisel tuleb lähtuda sellest, *kui suur osa* antud ülesandest on õpilasel lahendatud, kasutades lahenduse üksikute osade kaalu määramisel võimaluse korral võrdluseks punktide jaotust meie pakutud hindamisskeemides.

7. *Mistahes* täieliku ja matemaatiliselt korrektse lahenduse eest tuleb igal juhul anda maksimumpunktid, sõltumata selle lahenduse pikkusest või otstarbekusest võrreldes teiste lahendusviisidega.

I osa hindamisjuhised

1.
- Antud õige vastus 270000: 2 p

2.
- Antud õige vastus $\frac{8}{9}$: 2 p
- Antud vastuseks $\frac{24}{27}$ või muu õige, kuid taandamata murd: 1 p

3.
- Antud õige vastus 12.03: 2 p

4.
- Antud õige vastus 5: 2 p

5.
- Antud õige vastus 12 ja 18 suvalises järjestuses, ühikuga a või ilma: 2 p
- Antud ainult 12 või ainult 18; teine vanus puudub või on vale: 1 p

6.
- Antud õige vastus 30°: 2 p
- Antud vastuseks 30 ilma kraadimärgita: 1 p

7.
- Antud õige vastus 30 cm^2: 2 p
- Antud vastuseks 30 ilma ühikuta või vale ühikuga: 1 p

8.
- Antud õige vastus $\frac{1}{5}$ või 20%: 2 p
- Antud vastuseks $\frac{2}{10}$, $\frac{4}{20}$, $\frac{20}{100}$ või muu õige, kuid taandamata murd: 1 p

9.
- Antud õige vastus 15°: 2 p
- Antud vastuseks 15 ilma kraadimärgita: 1 p

10.
- Antud õige vastus 24 cm^2: 2 p
- Antud vastuseks 24 ilma ühikuta või vale ühikuga: 1 p

I osa hindamisjuhised

1.	∘ Antud õige vastus $-\frac{1}{3}$:	2 p
2.	∘ Antud õige vastus 19:	2 p
3.	∘ Antud õige vastus 50:	2 p
4.	∘ Antud õige vastus 7:	2 p
5.	∘ Antud õige vastus 30:	2 p
6.	∘ Antud õige vastus 90°:	2 p
	∘ Antud vastuseks 90 ilma kraadimärgita:	1 p
7.	∘ Antud õige vastus $\frac{8}{9}$:	2 p
	∘ Antud vastuseks $\frac{16}{18}$ või muu õige, kuid taandamata murd:	1 p
	∘ Antud õige arv koos mõne ühikuga:	1 p
8.	∘ Antud õige vastus 130°:	2 p
	∘ Antud vastuseks 130 ilma kraadimärgita:	1 p
9.	∘ Antud õige vastus 54°:	2 p
	∘ Antud vastuseks 54 ilma kraadimärgita:	1 p
10.	∘ Antud õige vastus 54 cm^2:	2 p
	∘ Antud vastuseks 54 ilma ühikuta või vale ühikuga:	1 p

Eesti LXII matemaatikaolümpiaad

7. veebruar 2015 Piirkonnavoor **9. klass**

I osa hindamisjuhised

1.	◦ Antud õige vastus 100:	2 p
	◦ Antud vastuseks $\frac{600}{6}$ või muu õige, kuid taandamata murd:	1 p
2.	◦ Antud õige vastus 81 punktiga või ilma:	2 p
3.	◦ Antud õige vastus 85:	2 p
4.	◦ Antud õige vastus 11:	2 p
5.	◦ Antud õige vastus 110°:	2 p
	◦ Antud vastuseks 110 ilma kraadimärgita:	1 p
6.	◦ Antud õige vastus 50°:	2 p
	◦ Antud vastuseks 50 ilma kraadimärgita:	1 p
7.	◦ Antud õige vastus 12 cm:	2 p
	◦ Antud vastuseks 12 ilma ühikuta või vale ühikuga:	1 p
8.	◦ Antud õige vastus 34 cm:	2 p
	◦ Antud vastuseks 34 ilma ühikuta või vale ühikuga:	1 p
9.	◦ Antud õige vastus 6 cm^2:	2 p
	◦ Antud vastuseks 6 ilma ühikuta või vale ühikuga:	1 p
10.	◦ Antud õige vastus 94 cm^2:	2 p
	◦ Antud vastuseks 94 ilma ühikuta või vale ühikuga:	1 p

II osa hindamisjuhised

1.
- Leitud, et kõigis raamatutes kokku on värvitud 21 pilti: 1 p
- Leitud, et kolmandas raamatus on värvitud 11 pilti: 1 p
- Leitud, et kolmandas raamatus on värvimata 7 pilti: 1 p
- Leitud, et kolmandas raamatus on kokku 18 pilti: 1 p
- Leitud, et esimeses ja teises raamatus on kokku 66 pilti: 1 p
- Leitud, et esimeses raamatus on 39 pilti: 1 p
- Leitud, et teises raamatus on 27 pilti: 1 p

Ainult täieliku õige vastuse (39, 27 ja 18) eest ilma selgitusteta anda 2 punkti. Kahe õige arvu korral (kolmas puudu või vale) anda 1 punkt. Kui õiged arvud on raamatutega valesti vastavusse seatud (nt öeldakse, et 27 on esimese ja 39 teise raamatu piltide arv), siis anda vastuse eest 0 punkti. Kui vastuses pole öeldud, milline arv näitab millise raamatu pilte, siis eeldada, et esimene arv näitab lahendaja arvates esimese, teine arv teise ja kolmas arv kolmanda raamatu piltide arvu.

2. Esitame ühtse hindamisskeemi paljude võimalike lähenemiste jaoks. Kasutame žürii lahenduse juures joonisel 3 sisse toodud tähistusi.

- Leitud, et ristkülikud $ABCD$ ja $ABHG$ on võrdse kõrgusega: 1 p
- Leitud, et ristküliku $DEFG$ alus on pool lõigu AB pikkusest: 1 p
- Leitud, et ristküliku $EFKL$ alus on pool lõigu AB pikkusest: 1 p
- Leitud, et ristküliku $HIJK$ kõrgus on pool lõigu BC pikkusest: 1 p
- Leitud, et ristküliku $JLMN$ alus on $\frac{1}{6}$ ruudu küljepikkusest: 1 p
- Lahendus lõpule viidud: 2 p

Ainult õige vastuse ($\frac{24}{5}$ cm) eest ilma selgitusteta anda 2 punkti. Õige arvu eest ilma ühikuta või vale ühikuga anda 1 punkt.

3.
- Ülesande a-osa õige vastus ammendava põhjendusega: 2 p
- Ülesande b-osa õige vastus ammendava põhjendusega: 3 p

  Sealhulgas:
  - Näidatud, et kui tuli vahetuks iga minuti järel, siis põleks uuritaval minutil roheline tuli: *1 p*

- Näidatud, et kui tuli vahetuks iga 3 minuti järel, siis põleks uuritaval minutil roheline tuli: *1 p*
- Järeldatud sellest, et tuli vahetub iga 2 minuti järel: *1 p*

Ülesande c-osa õige vastus ammendava põhjendusega: 2 p

Ainult õigete vastuste eest ilma selgitusteta anda 0 punkti.

Kui ülesande b-osas on õiget vastust põhjendatud ainult kontrolliga, et tule vahetumine iga 2 minuti järel on tingimustega kooskõlas, siis selle osa eest anda 0 punkti.

Eesti LXII matemaatikaolümpiaad

7. veebruar 2015 Piirkonnavoor **8. klass**

II osa hindamisjuhised

1. Anname siin kaks võimalikku hindamisskeemi vastavalt žürii lahendustele 1 ja 2.

Skeem algebralise lähenemise (žürii lahendus 1) järgi.

- Võetud kasutusele muutujad suurema arvu üheliste numbri ja väiksema arvu tähistamiseks: 1 p
- Koostatud ülesande tingimustele vastav võrrand: 1 p
- Saadud võrrand teisendatud kujule $11a + b = 2015$: 1 p
- Leitud, et $2015 = 11 \cdot 183 + 2$: 1 p
- Põhjendatud korrektselt, et sellest järeldub $b = 2$: 2 p
- Leitud otsitavad arvud: 1 p

Skeem monotoonsusele tugineva lahenduse (žürii lahendus 2) järgi.

- Leitud, et 183 ja 1832 rahuldavad ülesande tingimusi: 2 p
- Mainitud, et arvu suurenedes temast üheliste numbri eemaldamisel saadav arv ei vähene: 3 p
- Järeldatud, et iga arv esitub ülimalt ühe naturaalarvu ja temast üheliste numbri eemaldamisel saadava arvu summana: 2 p

Skeem numbrite järkjärgulise tuvastamisega (vt kontrollija kommentaar):

- Esitatud ülesande tingimustele vastavad arvud kujul $\overline{abcd}$ ja $\overline{abc}$: 1 p
- Põhjendatud, et $a = 1$: 1 p
- Ammendavalt põhjendatud, et $b = 8$: 2 p
- Ammendavalt põhjendatud, et $c = 3$: 2 p
- Leitud, et $c = 2$: 1 p

Ainult õige vastuse (183 ja 1832 suvalises järjestuses) eest ilma selgitusteta anda 2 punkti.

2.

- Avaldatud väikse ristküliku mõõtmed suure ristküliku mõõtmete kaudu või vastupidi: 1 p
- Avaldatud ruudu küljepikkus emma-kumma ristküliku pikema külje pikkuse kaudu või vastupidi: 1 p
- Avaldatud õigesti hallist ristkülikust alles jääva osa ümbermõõt: 2 p
- Leitud suure või väikse ristküliku mõõtmed: 1 p

- Leitud hallist ristkülikust alles jäänud osa pindala: 2 p

Ainult õige vastuse (81 cm^2) eest ilma selgitusteta anda 2 punkti. Õige arvu eest ilma ühikuta või vale ühikuga anda 1 punkt.

3. Anname eraldi skeemid vastavalt žürii lahendustele 1 ja 2.

Skeem žürii lahenduse 1 järgi.

- Märgatud, et võistlejate saadud punktide summa võrdub mängitud partiide arvuga: 1 p
- Leitud, et kaheksanda klassi õpilased said kokku $\frac{n(n-1)}{2} - 8$ punkti, kus n on osalejate koguarv: 3 p
- Mainitud, et selle arvu ja arvu $n - 2$ jagatis peab olema 0,5 täiskordne: 1 p
- Vaadatud variandid läbi ja leitud ainsana sobiv vastus 7: 2 p

Skeem žürii lahenduse 2 järgi.

- Märgatud, et võistlejate saadud punktide summa võrdub mängitud partiide arvuga: 1 p
- Koostatud võrrand $px+8 = \frac{(x+2)(x+1)}{2}$ või mõni samaväärne võrrand: 3 p
- Võrrand teisendatud kujule, kust on näha, et otsitav arv on arvu 14 tegur: 1 p
- Vaadatud variandid läbi ja leitud ainsana sobiv vastus 7: 2 p

Ainult õige vastuse 7 eest ilma selgitusteta anda 2 punkti.

Kui õpilane on leidnud mängitud partiide arvu $\frac{n(n-1)}{2}$ või $\frac{(x+2)(x+1)}{2}$ ainult konkreetsete osavõtjate arvude jaoks, mitte üldkujul nagu žürii lahendustes, ja saab seetõttu ühe avaldise/võrrandi asemel palju erinevaid (iga osavõtjate arvu jaoks eraldi avaldise/võrrandi), siis anda ikkagi skeemis ettenähtud punktid kätte, kui vaadeldud juhud on antud ülesande kontekstis ammendavad (nt on hõlmatud kõik juhud, kus osalejate arv on alla 10).

Kui õpilane on leidnud mängitud partiide arvu $\frac{n(n-1)}{2}$ üldkujul või ülesande kontekstis ammendava hulga erijuhtude kujul, kuid pole osanud seda ülesande muude andmetega kuidagi seostada, siis anda skeemide teise rea järgi 2 punkti.

II osa hindamisjuhised

1.
- Märgitud, et ülesande tingimust rahuldav arv n jagub arvuga $n-1$: 3 p
- Korrektselt põhjendatud, et see on võimalik ainult juhul $n = 2$: 4 p

Ainult õige vastuse eest ilma selgitusteta anda 1 punkt.

2. Anname eraldi skeemid kahe pisut erineva lähenemise jaoks.

Skeem lahenduse jaoks, kus analüüsitakse ekstraktikoguse muutumist ühe operatsiooni käigus (žürii lahendused 1 ja 2).

- Tähistatud operatsioonieelne ekstraktikogus (žürii lahendustes a või $x+1$): 1 p
- Õigesti avaldatud ekstrakti kogus pärast liitri segu eemaldamist: 2 p
- Õigesti avaldatud ekstrakti kogus pärast 900 ml vee ja 100 ml ekstrakti lisamist: 1 p
- Märgatud, et kui operatsiooni eel on ekstrakti rohkem kui liiter, siis ka operatsiooni järel on ekstrakti rohkem kui liiter: 1 p
- Järeldatud, et kuna algul on ekstrakti rohkem kui liiter, siis kuitahes paljude sammude järel on ekstrakti ikka rohkem kui liiter: 2 p

Skeem induktsiooniga lahenduse jaoks (žürii lahendus 3).

- Püstitatud hüpotees, et ekstrakti kogus enne i-ndat sammu on $0{,}9^i \cdot 10 + 1$ liitrit: 2 p
- Veendutud hüpoteesi kehtivuses $i = 1$ või mõne muu konkreetse i korral: 1 p
- Eeldusel, et hüpotees kehtib enne i-ndat sammu, leitud ekstrakti kogus i-nda sammu seguliitri eemaldamise järel: 2 p
- Samal eeldusel avaldatud ekstrakti kogus pärast i-ndat sammu: 1 p
- Tehtud sellest õige lõppjäreldus: 1 p

Ainult õige vastuse eest ilma selgitusteta anda 0 punkti.

3. Anname eraldi skeemid vastavalt kahele lähenemisele.

Skeem diameetri omadusi ja sümmeetriat kasutava lahenduse järgi (žürii lahendus 1).

- Märgitud, et teist diagonaali poolitav diagonaal läbib nelinurga ümberringjoone keskpunkti: 2 p

- Järeldatud, et see diagonaal on ümberringjoone diameeter: 1 p
- Järeldatud, et sellele kõõlule toetuvad nelinurga sisenurgad on täisnurgad: 1 p
- Põhjendatud diameetrist samale poole jääva kahe jaotuskolmnurga sarnasus: 2 p
- Põhjendatud ülejäänud kahe kolmnurga sarnasus nendega: 1 p

Skeem võrdhaarsust ja piirdenurkade võrdsust kasutava lahenduse järgi (žürii lahendus 2).

- Põhjendatud võrdus $\angle ABD = \angle ADB$ (või $\angle CBD = \angle CDB$): 3 p

  Sealhulgas:
  - Põhjendatud kolmnurga ABD võrdhaarsus (või vastavalt kolmnurga CBD võrdhaarsus): *2 p*
- Piirdenurkade abil tuletatud võrdus $\angle ACB = \angle ADB$ või võrdus $\angle ACD = \angle ABD$ (või vastavalt võrdus $\angle CAB = \angle CDB$ või võrdus $\angle CAD = \angle CBD$): 1 p
- Tuletatud teine sarnasuseks vajalik nurkade võrdus: 1 p
- NN tunnusega põhjendatud vajalik kolmnurkade sarnasus: 2 p

4. *Skeem esialgse žürii lahenduse järgi:*

- Väidetud, et viimati käigu teinud tüdrukul ongi suurim summa: 1 p
- Jaotatud kõik käigud kolmestesse rühmadesse alates lõpust: 2 p
- Märgitud, et igas rühmas on viimati käigu teinud tüdruku arv suurim: 1 p
- Järeldatud, et 3 arvust koosnevatesse rühmadesse kuuluvate arvude seas on viimati käigu teinud tüdruku arvude summa suurim: 2 p
- Analüüsitud ka juhud, kus 1 või 2 esimest arvu jäävad üle: 1 p

Skeem lisandunud lahenduse 2 järgi:

- Leitud, et vahed on vastavalt $2n$ ja n: 3 p
- Leitud järgmise sammu arvud $x + 3n$ ja $x + 3n + 1$: 2 p
- Kontroll, et tõepoolest viimasel tüdrukul on suurim summa: 1 p
- Õige vastus: 1 p

Skeem aritmeetilise jada summeerimist kasutava lahenduse järgi:

- Koostatud õiged avaldised summeerimiseks: 2 p
- Summad õigesti leitud: 2 p
- Kontrollitud, et viimasel tüdrukul on suurim summa: 2 p
- Õige vastus: 1 p

Ainult õige vastuse „kohe“ eest ilma selgitusteta anda 1 punkt.

Kui tööl midagi suurt (peale õiget vastust) ühegi hindamiskeemi kohaselt ei ole, siis anti punkte järgmiselt.

- Õigesti tõestatud, et kui Carmen kirjutas viimasena, siis tal on suurim summa: 1 p
- Vaadeldud, et negatiivsel juhtumil on olukord erinev: 1 p

Eesti LXII matemaatikaolümpiaad

7. veebruar 2015 Piirkonnavoor **10. klass**

Hindamisjuhised

1. Anname kaks eraldi skeemi vastavalt žürii lahendustele.

Skeem žürii lahenduse 1 järgi.

- Avaldatud mõlemast võrrandist y: 1 p
- Saadud seoste paremate poolte võrdsustamisel saadud seos x suhtes: 1 p
- Teisendatud see tavakujul ruutvõrrandiks x suhtes: 2 p
- Leitud ruutvõrrandi lahendid: 1 p
- Leitud vastavad y väärtused: 2 p

Skeem žürii lahenduse 2 järgi.

- Avaldatud teisest võrrandist x: 1 p
- Asendatud saadud seosest x esimesse võrrandisse: 1 p
- Teisendatud see tavakujul ruutvõrrandiks y suhtes või kujule $y(4y+5)=0$: 2 p
- Leitud ruutvõrrandi lahendid: 1 p
- Tagasiasendamisel leitud vastavad x väärtused: 2 p

Ainult õige vastuse (lahendid $x=-1, y=0$ ja $x=\frac{3}{2}, y=-\frac{5}{4}$) eest ilma selgitusteta anda 1 punkt.

Kui lahenduse 2 moodi tehes on lõpus tehtud tagasiasendus valesse võrrandisse (kuhu juba kord asendati), siis anda skeemi viimase rea järgi ainult 1 punkt, kui ei ole vähemalt mainitud, et leitud lahendeid on kontrollitud. Punkt võtta maha isegi siis, kui võõrlahendeid pole tegelikult vastuseks pakutud (õpilane on need leidmata jätnud).

2. Anname eraldi hindamisskeemid kõigi žürii lahenduste järgi.

Skeem võrrandi koostamisega lahenduse järgi (žürii lahendus 1).

- Avaldatud väikse ja suure kolmnurga vastavate tippude vaheline kaugus (kolmnurga kõrguse n-ö ülemine osa): 2 p
- Põhjendatud, et väikse kolmnurga kõrgus on pool suure kolmnurga kõrgusest: 1 p
- Leitud suure ja väikse kolmnurga kõrgused: 1 p
- Koostatud võrrand trapetsi kõrguse leidmiseks: 2 p

- Võrrandi lahendamisega saadud õige vastus: 1 p

Skeem tükeldamisega lahenduse järgi (žürii lahendus 2).

- Tuldud lagedale sobiva tükeldusega (36 võrdkülgset kolmnurka jagatud ülesande jaotusele vastavateks piirkondadeks): 2 p
- Põhjendatud, miks on tegu ülesandes antud tükeldusega: 2 p
- Järeldatud, et trapetsi kõrgus on $\frac{1}{6}$ suure kolmnurga kõrgusest: 1 p
- Leitud suure kolmnurga kõrgus: 1 p
- Leitud trapetsi kõrgus: 1 p

Skeem sümmeetriale tugineva lahenduse järgi (žürii lahendus 3).

- Põhjendatud, et suure ja väikse kolmnurga ümberringjoontel on ühine keskpunkt: 2 p
- Märgitud, et see punkt asub kummagi kolmnurga küljest $\frac{1}{3}$ vastava kolmnurga kõrguse kaugusel: 1 p
- Põhjendatud, et väikse kolmnurga kõrgus on pool suure kolmnurga kõrgusest: 1 p
- Järeldatud, et ümberringjoone keskpunkti kaugus väikse kolmnurga küljest on $\frac{1}{6}$ suure kolmnurga kõrgusest (või kaugus suure kolmnurga küljest on $\frac{2}{3}$ väikse kolmnurga kõrgusest): 1 p
- Leitud suure (või väikse) kolmnurga kõrgus: 1 p
- Leitud trapetsi kõrgus: 1 p

Ainult õige vastuse $\frac{\sqrt{3}}{12}$ eest ilma selgitusteta anda 1 punkt.

3. Anname eraldi skeemid vastavalt võimalikele lähenemistele.

Skeem tegurdamisega lahenduse järgi (žürii lahendus 1).

- Ruutude vahe 100 esitatud vahe ja summa korrutisena: 2 p
- Põhjendatud, et mõlemad tegurid ei saa olla paaritud: 1 p
- Põhjendatud, et mõlemad tegurid peavad olema paaris: 1 p
- Näidatud, et vahe 2 on võimalik: 1 p
- Põhjendatud, et vahe -100 pole võimalik: 1 p
- Näidatud, et vahe -50 on võimalik: 1 p

Skeem läbivaatusega lahenduse järgi (žürii lahendus 2).

- Põhjendatud, et vahe 1 pole võimalik: 2 p
- Näidatud, et vahe 2 on võimalik: 1 p
- Leitud kõik ruutude paarid vahega 100: 1 p
- Leitud nende seas vähim arvude endi vahe -50: 1 p

- Põhjendatud, et läbivaatamata arvude seast ei ole võimalik leida ülesande tingimustele vastavaid: 2 p

Ainult kummagi osa õige vastuse (2 ja -50) eest ilma selgitusteta anda 1 punkt.

4.
- Pandud ülesande tingimused algebraliselt kirja: 1 p
- Murdudest vabanetud: 1 p
- Teisendades saadud $(xy - 1)(x + y) = 0$ või mõni analoogne ja niisama lihtne seos: 2 p
- Märgitud, et kui $x+y = 0$, siis x ja y on teineteise vastandarvud: 1 p
- Näidatud, et kui $xy-1 = 0$, siis x ja y on teineteise pöördarvud: 2 p

5. Kasutame tähiseid M ja K žürii lahendustest.

- Tõestatud, et $|AM| = |DM|$: 4 p

  Sealhulgas kolmnurkade sarnasusele tugineva lahenduse järgi (žürii lahendus 1):
  - Leitud nurkade MBD ja MCA võrdsus: *1 p*
  - Järeldatud kolmnurkade MBD ja MCA sarnasus: *1 p*
  - Märgitud, et $|CM| = |BM|$: *1 p*

  Sealhulgas rööpküliku omadust kasutava lahenduse järgi (žürii lahendus 2):
  - Leitud nii nurkade CAM ja BDM võrdsus kui ka nurkade CDM ja BDM võrdsus: *1 p*
  - Järeldatud, et BA ja CD on paralleelsed ehk $ABDC$ on rööpkülik: *1 p*
  - Märgitud, et rööpküliku diagonaalid poolitavad teineteist: *1 p*
- Märgatud, et K on kolmnurga ABD mediaanide lõikepunkt: 1 p
- Järeldatud, et $|BK| = 2|KM|$: 1 p
- Lahendus lõpule viidud: 1 p

Ainult õige vastuse $1 : 2$ eest ilma selgitusteta anda 1 punkt.

6.
- Märgatud, et paarisarv ja talle vahetult järgnev paaritu arv erinevad ainult üheliste numbri poolest: 1 p
- Järeldatud, et paarisarvul ja talle vahetult järgneval paaritul arvul on numbrite summad eri paarsusega: 2 p
- Järeldatud, et 0-st suvalise paaritu arvuni on võrdselt paaris ja paaritu numbrite summaga arve: 2 p
- Järeldatud, et 1-st suvalise paaritu arvuni on paaritu numbrite summaga arve rohkem: 1 p

- ◦ Analüüsitud ka paarisarvu juht: 1 p

Ainult õige vastuse eest ilma selgitusteta anda 0 punkti.

On kindel, et paljud õpilased ei tule 0 kaasamise ideele ja üritavad kuidagi analüüsida seda, kuidas 1 ja n vaheliste paaris ja paaritu numbrite summaga arvude koguste vahekord muutub täiskümnete puhul. Kui on tähele pandud, et kahel järjestikusel arvul, mille kümneliste number on sama, on numbrite summad eri paarsusega, kuid rohkem midagi asjalikku pole tehtud, siis anda 2 punkti.

Eesti LXII matemaatikaolümpiaad

7. veebruar 2015 Piirkonnavoor **11. klass**

Hindamisjuhised

1. Anname eraldi skeemid erinevate lähenemiste puhuks.

Skeem vahetu analüüsiga lahenduse järgi (žürii lahendus 1).

- Leitud krõpsudele ja kookidele kokku kuluvate väljaminekute osakaal $\frac{7}{16}$ (või 43,75%): 1 p
- Leitud pudrule kulunud väljaminekute ja praeguste kogukulude suhe $\frac{3}{80}$ (või protsentides): 1 p
- Leitud juurviljale kulunud väljaminekute ja praeguste kogukulude suhe $\frac{1}{40}$ (või protsentides): 1 p
- Leitud summa $\frac{3}{80} + \frac{1}{40} = \frac{1}{16}$: 1 p
- Leitud sanktsioonide tõttu lisandunud kulude osa praegustes kogukuludes, $\frac{6}{16}$: 1 p
- Õige tehtega arvutatud lõppvastus: 2 p

Skeem algebralise lahenduse järgi (žürii lahendus 2).

- Avaldatud igakuised kogukulud enne ja pärast sanktsioonide kehtestamist pudru-, juurvilja- ja muude kulude (või krõpsu-, koogi- ja muude kulude) kaudu: 2 p
- Ülesande tingimused krõpsudele ja kookidele kuluvate väljaminekute osakaalu kohta valatud võrranditesse: 2 p
- Võrrandisüsteemist avaldatud kulud pudrule ja juurviljale (või krõpsudele ja kookidele) muude kulude kaudu: 2 p
- Arvutatud lõppvastus: 1 p

Ainult õige vastuse 60 eest ilma selgitusteta anda 1 punkt.

2.
- Põhjendatud, et $a > 1$ või $a < 1$: 1 p
- Analüüsitud juht $a > 1$: 3 p
- Analüüsitud juht $a < 1$: 3 p

Ainult täieliku õige vastuse ($\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}$ ja $\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$) eest ilma selgitusteta anda 2 punkti. Ainult ühe õige pikkuse eest (teine puudub või on vale) anda 1 punkt.

Nii juhu $a > 1$ kui juhu $a < 1$ analüüsi juures anda õige 6. astme võrrandi koostamise eest 1 punkt ning ruutvõrrandiks taandamise eest 1 punkt.

3. Anname skeemi lähtuvalt eeldusest, et enamik lahendajaid kasutab väikse komplekti täiendamise strateegiat (vt märkus žürii lahenduse järel).

- Leitud millised tahes vähem kui 10 erinevat arvu, mille summa jagub igaühega neist: 3 p
- Näidatud, et kui arvuhulka, mille arvude summa jagub selle hulga iga arvuga, lisada nende arvude summa, siis saadud hulga arvude summa jagub samuti kõigi saadud hulga arvudega: 3 p
- Järeldatud, et leitud arvukomplekti saab täiendada ülesande tingimusi rahuldavaks komplektiks: 1 p

Kui summa lisamine hulka, mille arvude summa jagub selle hulga iga arvuga, on läbi tehtud ainult ühe konkreetse hulga korral, ja pole märki mõistmisest, et sama saab teha mistahes sama omadusega arvuhulga korral, siis anda skeemi teise rea järgi ainult 2 punkti (koos esimese reaga siis 5 punkti).

Kui on leitud 9 erinevat arvu, mille summa jagub igaühega neist, kuid pole avastatud viisi selle komplekti täiendamiseks, siis anda samuti 5 punkti (sest täislahenduseks piisab ainult selle konkreetse komplekti ühekordsest täiendamisest summaga).

Ainult õige vastuse eest ilma selgitusteta anda 0 punkti.

4. Anname siin eraldi skeemid kahe tõestusmeetodi jaoks.

Skeem siinuse definitsioonist lähtuva tõestuse järgi (žürii lahendus 1).

- Vaadeldud kolme kõrvutist 10° kesknurgaga sektorit ja projekteeritud neid piiravate raadiuste otspunktid paralleelsetele sirgetele nagu joonisel 9: 3 p
- Põhjendatud, et $|BP| > |CQ| > |DR|$: 2 p
- Märgitud, et $\sin 20^\circ = |BP|+|CQ|$ ja $\sin 30^\circ = |BP|+|CQ|+|DR|$: 1 p
- Saadud väidete baasil põhjendatud teoreemi väide: 1 p

Skeem kolmekordse nurga lahtikirjutuse abil (žürii lahendus 2).

- Tähistatud nurk, mille siinus on täpselt $\frac{1}{3}$ (žürii lahenduses α): 2 p
- Algebraliselt näidatud, et $\sin 3\alpha = \frac{23}{27}$: 2 p
- Näidatud, et $\sin 60^\circ > \frac{23}{27}$: 1 p
- Siinusfunktsiooni kasvavusele tuginedes põhjendatud võrratus $\alpha < 20^\circ$: 1 p
- Siinusfunktsiooni kasvavusele tuginedes põhjendatud võrratus $\sin 20^\circ > \sin \alpha$: 1 p

5. ◦ Lahendatud a-osa: 3 p

Sealhulgas:

- Väidetud, et küljega paralleelne sirge, mis jaotab kolmnurga kaheks pindalalt võrdseks osaks, ei läbi kolmnurga mediaanide lõikepunkti: *1 p*
- Arvutatud nende osade, milleks see sirge jaotab vastastipust tõmmatud mediaani, pikkuste suhe: *1 p*

◦ Lahendatud b-osa: 4 p

- Vaadeldud punkti, milles meelevaldselt valitud sirge, mis jaotab rööpküliku kaheks pindalalt võrdseks osaks, läbib rööpküliku külge (žürii lahenduses K): *1 p*
- Märgitud, et ka sirge KM, kus M on rööpküliku diagonaalide lõikepunkt, jaotab rööpküliku kaheks pindalalt võrdseks osaks: *1 p*
- Põhjendatud, et sama punkti K läbib ainult üks selline sirge: *1 p*

Ainult õigete vastuste eest ilma selgitusteta anda 0 punkti.

6. ◦ Avaldatud partiide koguarv $\dfrac{n(n-1)}{2}$: 1 p

◦ Märgatud, et partiide koguarv võrdub osalejate poolt teenitud punktide summaga: 1 p

◦ Arvestades ülesandes toodud lisaandmeid, leitud osalejate teenitud punktide summa ülempiir $1{,}5n + 6{,}5$: 1 p

◦ Saadud ruutvõrratus $n^2 - 4n - 13 \leqslant 0$ või sellega ilmselgelt samaväärne võrratus: 1 p

◦ Võrratus lahendatud ja saadud tingimus $n \leqslant 6$: 1 p

◦ Märgatud, et 4,5 punkti saamiseks pidi olema $n \geqslant 6$: 1 p

◦ Kahe võrratuse kokkuvõttes järeldatud, et $n = 6$: 1 p

Ainult õige vastuse (6) eest ilma selgitusteta anda 1 punkt.

Eesti LXII matemaatikaolümpiaad

7. veebruar 2015 Piirkonnavoor **12. klass**

Hindamisjuhised

1. *Skeem žürii lahenduse järgi:*

- Avaldatud suurus $\cos^4 x$ suuruse $\cos x$ kaudu: 2 p
- Teisendatud algne võrrand kujule $7\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1 = 0$: 1 p
- Leitud $\cos^2 x$ võimalikud väärtused 1 ja $\frac{1}{7}$: 2 p
- Leitud $\sin^2 x$ võimalikud väärtused 0 ja $\frac{6}{7}$: 1 p
- Leitud $\sin x$ kõik võimalikud väärtused: 1 p

Kui $\cos^2 x$ üks väärtus on õige, kuid teine leidmata või vale, siis anda skeemi kolmanda rea järgi 1 punkt ning neljanda ja viienda rea järgi kokku 1 punkt.

Kui $\cos^2 x$ väärtused on leitud õigesti, kuid $\sin^2 x$ ühe väärtuse leidmisel eksitakse ja üks on korrektne, siis anda skeemi kahe viimase rea järgi kokku 1 punkt.

Skeem enamiku õpilaste töödes kasutatud lahenduse järgi:

- Kahekordsete nurkade valemite abil $\cos 4x$ lahti kirjutatud: 3 p
- Jõutud võrrandini $7\sin^4 x - 6\sin^2 x = 0$: 1 p
- Leitud $\sin^2 x$ võimalikud väärtused: 2 p
- Leitud $\sin x$ kõik võimalikud väärtused: 1 p

Ainult täieliku õige vastuse (0, $\sqrt{\frac{6}{7}}$ ja $-\sqrt{\frac{6}{7}}$) eest anda 2 punkti. Ainult kahe õige vastuse eest (kolmas puudu või vale) anda 1 punkt.

2. Anname eraldi skeemid vastavalt erinevatele lähenemistele.

Skeem tuletist kasutava lahenduse järgi (žürii lahendus 1).

- Saadud graafikute ühiste punktide leidmiseks kas ruutvõrrand $2x^2 + (a - b)x + (a - b) = 0$ või sellega ilmselgelt samaväärne võrrand: 2 p
- Tuletiste võrdumisest saadud seos $4x + (a - b) = 0$ või sellega samaväärne võrrand: 1 p
- Kahe võrrandi kokkupanekul saadud võrrand x suhtes: 2 p
- Saadud kätte üks lahend: 1 p
- Saadud kätte teine lahend: 1 p

Skeem graafikute kuju analüüsiva lahenduse järgi (žürii lahendus 2).

- Saadud graafikute ühiste punktide leidmiseks kas ruutvõrrand $2x^2 + (a-b)x + (a-b) = 0$ või sellega ilmselgelt samaväärne võrrand: 2 p
- Põhjendatud, et puutumise korral peab graafikutel olema ainult üks ühine punkt: 1 p
- Järeldatud sellest, et ühiste punktide leidmiseks koostatud ruutvõrrandi diskriminant on null, ja koostatud selle info alusel uus võrrand: 1 p
- Saadud kätte lahend $x = 0$: 1 p
- Teise lahendi leidmiseks saadud võrrand $2x^2+8x+8$ või sellega ilmselgelt samaväärne võrrand: 1 p
- Saadud kätte teine lahend $x = -2$: 1 p

Ainult täieliku õige vastuse (0 ja -2) eest anda 1 punkt.

3.
- Võetud kasutusele muutujad numbrite või kahekohaliste arvude märkimiseks ja väljendatud Jüri ja Mari kirjutatud arvud algebraliselt nende kaudu: 1 p
- Ülesande tingimuste järgi koostatud võrrand, mis seob õpetaja mõeldud kahekohalisi arve: 2 p
- Võrrandi sobiva teisendamisega jõutud järeldusele, et teine arv on 99: 2 p
- Ühtlasi tehtud järeldus, et esimene arv võib olla suvaline: 1 p
- Tuletatud sellest õige lõppvastus: 1 p

Ainult õige vastuse (90) eest ilma selgitusteta anda 1 punkt.

4. Anname eraldi skeemid kahe eri lähenemise puhuks.

Skeem tegurite rühmitamist kasutava lahenduse järgi (žürii lahendus 1).

- Tõstetud tõestatava võrratuse pooled ruutu: 1 p
- Tehtud nutikas tegurite rühmitamine: 2 p
- Kasutatud lugejates ruutude vahe valemit: 2 p
- Märgitud, et kõik tegurid peale esimese on 1-st väiksemad: 1 p
- Eelnevale tuginedes põhjendatud vajalik võrratus: 1 p

Skeem induktsiooniga lahenduse järgi (žürii lahendus 2).

- Märgitud, et juhul $n = 1$ on tõestatava võrratuse pooled võrdsed (või et tõestatav võrratus kehtib): 1 p
- Eraldatud vasaku poole murdude korrutises viimane tegur ja rakendatud ülejäänutele induktsiooni eeldust: 2 p
- Põhjendatud abivõrratus $\dfrac{2k-1}{2k} < \dfrac{\sqrt{2k-1}}{\sqrt{2k+1}}$ (sammu $n \to n+1$ korral $\dfrac{2k+1}{2k+2} < \dfrac{\sqrt{2k+1}}{\sqrt{2k+3}}$): 3 p

- Teostatud viimane samm: 1 p

5.
- Valitud kaks punkti (žürii lahenduses A ja B) nii, et ülejäänud jäävad neid ühendavast sirgest samale poole: 2 p
- Märgitud, et ülesande tingimuste järgi $\angle ADB < \angle ACB$: 2 p
- Märgitud, et teise tingimuse järgi $\angle ACB < \angle ADB$: 2 p
- Vastuolu põhjal tehtud õige lõppjäreldus: 1 p

Ainult õige vastuse eest ilma selgitusteta anda 0 punkti.

6.
- Avaldatud tabeli arvud rea- ja veerunumbri kaudu: 2 p
- Märgatud, et see suurus liidetakse üks kord iga rea- ja veerunumbri jaoks: 2 p
- Selle tähelepaneku alusel koostatud õige summa avaldis: 3 p

Kui lõppvastus on lihtsustamata, siis anda skeemi viimase rea järgi 2 punkti.

Ainult õige vastuse ($\dfrac{n(n^2+1)}{2}$ või samaväärne lihtsustamata avaldis) eest ilma selgitusteta anda 1 punkt.

Kokkuvõtteks

Võrreldes eelmise aastaga olid komplektid lihtsamad. Liiga sai tehtud 11. klassile, kus lõpliku punktitabeli ülemises otsas on väga järsk langus ja lõppvooru pääsemise piiriks kujunesid napid 21 punkti. Eriti raske oli 4. ülesanne, mille lahendas täis- või peaaegu täispunktidele vaid käputäis õpilasi ning ülejäänud said valdavalt 0 punkti.

Materjalidesse oli seekord sisse jäänud kaks sisulist apsakat. Üks oli 9. klassi 4. ülesande tekstis, kus puudus vajalik arvude positiivsuse eeldus. Kui otsustada tagasiside järgi piirkondadest, siis valdavalt ei tekitanud see suuri probleeme parandamisel. Ilma positiivsuse eelduseta on ülesanne palju raskem, kuid sisaldab ka ettenähtud ülesande. Enamik õpilastest oli nagunii ainult positiivseid arve vaadelnudki ja punkte selle tõttu maha ei võetud.

Teine viga tuli välja alles üleparandamise käigus. 8. klassi 3. ülesande žürii lahenduses 1 oli mõttekäik vigane, jättes arvestamata ülesande püstituse järgi täiesti legaalse võimaluse, et võistlejad ei pruukinud saada ainult täisarvulisi punkte. Sellest lahendusest lähtuvalt tehtud hindamisskeem oli samuti sellest veast nakatunud, lubades teatud etapil punkti põhjendamatu väite eest. Kuna auk lahenduses oli kergesti lapitav, viga puudutas ainult üht sammu mõttekäigus, ei olnud seetõttu vaja hindamist oluliselt muuta. Otsustasime 8. klassi hindajaga võtta töödel, kus õpilane oli teinud sama vea, 1 punkti maha.

Sel aastal vaatasid üleriigilise žürii 7.–10. ja 12. klassi parandajad läbi kõigis töödes kõik ülesanded. 11. klassi parandajad vaatasid läbi kõik ülesanded nende õpilaste töödes, kes kutsutakse lõppvooru; mitte keegi, kelle töös mõni ülesanne on jäänud läbi vaatamata, ei pääseks lõppvooru ka siis, kui ta kõigi läbi vaatamata jäänud ülesannete eest saaks maksimumpunktid.

Kontrollijate kommentaarid (Reimo Palm, Terje Hõim)

Test

Testis eriti punktimuudatusi vaja teha ei olnud. Lahendajatele valmistas üsna suurt raskust ülesanne 5, kus paljudel oli vastus andmata või vale. Ülesandes 8 pakuti tihtipeale vastuseks osa pindalast ($\frac{2}{5}$), mitte osa kontuurist ($\frac{1}{5}$), st ei loetud ülesande teksti piisavalt täpselt. Mõneti üllatavalt esines päris palju vigu ka arvutamisülesandes 1, kus jäi mulje, et mitmed lahendajad olid püüdnud vastust leida arve järjest korrutades, selle asemel et tegurid 2 ja 5 paarikaupa kokku võtta.

Ülesanne 1

Kuuele tööle lisati juurde punkt, mis oli andmata jäetud, kuna õpilane polnud eraldi lausena välja toonud, et kolmandas raamatus on värvimata 7 pilti. Kõik kuus õpilast olid selle aga selgelt matemaatiliselt väljendanud (kasutades sulgusid) järgneva avaldisega seotult, arvutades kogu piltide arvu kolmandas raamatus.

Ülesanne 2

Punktimuudatused olid valdavalt ühtlustamised ühe-kahe punkti piires.

Lahenduskäikudes esines sageli väiteid, mis olid loogiliselt põhjendamata ning mille alusena nimetati „oletamist“ ja „silmaga vaatamist“. Kui lahendus oli muidu õige, ainult ristküliku $HIJK$ kõrgus ja $JLMN$ alus olid leidmata ning selle asemel lihtsalt oletati, et ristküliku $JLMN$ aluse pikkus on 2 cm, siis hinnati lahendust 5 punktiga. Kui lahenduse alguses võeti, et ruudu küljepikkus on 12 cm, ja arvutati korrektselt välja lõigu BC pikkus, siis sai lahenduse eest 3 punkti.

Ettearvatult pakuti palju vastuseks 5 cm, mis ilmselt tuleneb joonise pealiskaudsel uurimisel tehtud järeldusest, et ristkülik $ABCD$ on ruut. Sellised lahendused said kõik 0 punkti.

See ülesanne oli ülejäänutest märksa raskem.

Ülesanne 3

Punkte lisati juurde, kui põhjendus oli olemas mustandis.

Kahel tööl võeti punkte maha, sest vastus oli küll õige, aga põhjendus puudus.

Ka oli kolmel õpilasel lihtsalt tabelisse punktid valesti sisestatud ja need said korrigeeritud.

Kontrollijate kommentaarid (Maksim Ivanov)

Test

Testi eest on enamuses üleriigilisele žüriile saadetud töödes saadud 12 kuni 16 punkti.

Väga hästi olid lahendatud ülesanded 1, 5, 8 ja 9, natuke rohkem vigu oli ülesannetes 3 ja 6. Umbes kolmandik õpilastest on eksinud ülesannete 4 ja 10 lahendamisel ning enamus õpilastest ei saanud hakkama ülesannete 2 ja 7 lahendamisega.

Ülesandes 2 ei näinud õpilased summa ruudu valemi kasutusvõimalust ning sellepärast jätsid väga paljud üldse sellele vastamata, ülesandes 7 aga püüdsid paljud õpilased pindalade suhet silma järgi hinnata, näiteks pakkudes vastuseks arvu 1.

Ülesanne 1

Kõik õpilased on selles ülesandes jõudnud õige vastuseni. Punktide ühtlustamisel umbes kolmandikus töödes aga punktid muutusid 2 kuni 5 võrra. Selleks oli mitu põhjust, millest peamine on see, et paljud õpilased olid ülesannet lahendanud ülesande tingimustele vastavate arvude $\overline{abcd}$ ja $\overline{abc}$ kirjaliku liitmise teel, mille kohta žürii materjalides ei olnud ei lahendust ega hindamisskeemi. Vastav hindamiskeem on nüüd lisatud.

Selle lahenduskäigu juures oli vaja mitte ainult leida kõikidele numbritele sobivad väärtused, vaid ka põhjalikult näidata, et iga tähe väärtuseks sobib vaid üks number (st põhjendada, et teiste numbrite korral koostatud tehe ei kehti). Paljudes lahendustes just sellised põhjendused olid ebapiisavad.

Teiseks punktimuutuste põhjuseks oli see, et mõned õpilased lihtsalt näitasid oma lahenduses saadud lahendi sobivust (tegid lahendi kontrolli). Näiteks, kirjutasid, et arvud 183 ja 1832 sobivad, sest nende üheliste summaks peab olema 5 ja sel juhul $3+2=5$ jne. Mõned hindajad olid andnud selliste või sarnaste lahenduste eest rohkem kui 2 punkti, kuigi hindamisskeemi järgi saab anda vaid 2 punkti vastuse eest.

Ülesanne 2

See geomeetriaülesanne oli lahendatud väga hästi, kusjuures enamus õpilastest suutsid kõik tehtud sammud ilusasti ära põhjendada. Ainult üksikutes töödes olid arvutusvigade tõttu valed vastused.

Leidus ikkagi ka töid, kus lahendused algasid oletusega, et esialgse ristküliku küljed on pikkustega 12 cm ja 18 cm, ning seejärel jätkasid tehtud oletuse kontrollimisega. Kõik sellised lahendused said ühtlustamisel hinnatud 2 punktiga.

Ülesanne 3

See oli komplekti kõige raskem ülesanne, aga töödega tutvumisel oli rõõm näha mitmeid täis- ja peaaegu täislahendusi.

Paljud õpilased olid selle ülesande lahendamisel proovinud katsetada, kuidas maleturniiri osalejad võisid omavahel mängida. Kahjuks üksikutest näidetest ei piisa selleks, et ülesande küsimusele vastata.

Mõned õpilased olid raskustes valitud osalejate arvuga toimunud partiide arvu loendamisega, kuigi seda on võimalik lihtsalt teha, kasutades turniiritabelit.

Žürii tähelepanematuse tõttu oli ka meie materjalides olev lahendus 1 vigane. Kohas, kus kasutatakse eeldust, et 8. klassi õpilased said ühepalju punkte, oli väidetud, et seega nende õpilaste poolt kogutud punktide kogusumma jagub arvuga $n-2$. See väide kehtiks, kui punktid oleksid täisarvulised. Poolikute punktide tõttu saab aga järeldada vaid nõrgema väite, et 8. klassi õpilaste kogutud punktide arvu jagatis arvuga $n-2$ on arvu 0,5 täiskordne. Sellest veast tulenevalt tuli muuta ka sellele lahendusele vastavat hindamisskeemi (uuenenud materjalis on nii lahendus kui ka skeem parandatud). Ka mõnede õpilaste lahenduses esines sama viga; neil võeti ülehindamisel 1 punkt maha.

Kontrollijate kommentaarid (Indrek Zolk, Aleksei Lissitsin)

Test

Testis ei olnud vaja parandada ühtki piirkondades tehtud parandamisviga.

Ülesanne 1

Argumenteerimisvõimalusi ülesande lahendamiseks on mitu. Skitseerime siin mõned (kõiki neid esines töödes).

- Võib kirjutada $n = (n-1) + 1$, märkida, et ülesande tingimus nõuab muuhulgas, et $n - 1 \mid n$, mistõttu siis $n - 1 \mid n - (n-1) = 1$, millest $n - 1 = 1$.
- Kasutades asjaolu, et n suurim pärisjagaja on ülimalt (NB! mitte alati täpselt) $\frac{n}{2}$, saame võrratuse $\frac{n}{2} \geqslant n - 1$, millest $n \leqslant 2$.
- Paneme tähele, et juhul $n - 1 > 1$ annab arv n arvuga $n - 1$ jagades jäägi 1, mistõttu n üldiselt ei jagu $(n-1)$-ga, välja arvatud juhul, kui $n - 1 = 1$.
- Kasutame asjaolu, et iga kahe järjestikuse positiivse täisarvu suurim ühistegur on 1. Kuna nüüd $n - 1 \mid n$ ja $n - 1 \mid n - 1$, siis $n - 1$ on arvude n ja $n - 1$ ühine tegur, järelikult $n - 1 \mid \text{SÜT}(n, n-1) = 1$, seega $n - 1 = 1$.

Mõnikord tehti täiendav tähelepanek, et juhtum, kus n on paaritu, langeb kohe mängust välja, kuna paaritu arv ei saa jaguda paarisarvuga $n - 1$. See tähelepanek lahendamist põhimõtteliselt ei hõlbusta. Vormistuslikult teeb see asja mõneti mugavamaks, kuna paarisarvu n suurim pärisjagaja (ülesandes siis $n - 1$) on nüüd $\frac{n}{2}$ ning võrratuse asemel piisab töötada võrdusega.

Rõõmustav oli, et töid, kus täisarvude jaguvuse mõiste (b jagub a-ga, kui leidub c nii, et $ac = b$) oli ära õpitud ekslikult, kasutades nt reaalarvude või mõnda muud täisarvude ülemhulka (väljendid stiilis „jagamisel ei jää komasid“ vms), oli vähe.

Leidus töid, kus püüti ära kasutada algarvude „liiga tihedat“ paiknemist täisarvude hulgas. Kuna võib leida kuitahes pikki kordarvude lõikusid (nt. $n! + 2$, $n! + 3$, …, $n! + n$), siis sellist lähenemist kasutavat täielikku lahendust ei esinenud.

Ülesanne 2

Üks tüüpiline probleem oli selline, et tõestati ainult, et kui anumas on juba täpselt 1 liiter ekstrakti, siis sammu järel kogus ei muutu. Sellest aga ei piisa. Taolised lahendused said 1 punkti.

Samuti pandi piirkondades väga harva punkte järgneva põhimõtteliselt korrektse mõttekäigu eest. Paneme tähele, et alguses on ekstrakti kontsentratsioon anumas suurem kui 10% ja igal sammul osa sellest segatakse lahusega, milles ekstrakti kontsentratsioon on 10%. Selle tulemus on lahus, milles ekstrakti konsentratsioon on jälle suurem kui 10%. Seega ekstrakti kontsentratsioon anumas jääb alati suuremaks kui 10%.

Ülesanne 3

Lahendamisel oli põhiliseks komistuskiviks see, kuidas põhjendada, et üht diagonaali poolitav ja temaga ristuv teine diagonaal on ringjoone diameeter. (Muidugi, piirdenurki kasutavad lahendused väldivad seda probleemi.)

Mõnes töös oli algusest peale eeldatud, et *mõlemad* diagonaalid poolitavad teineteist, ringjoone keskpunkt asub diagonaalide lõikepunktis vms. Sellistes töödes punktiväärilist võis olla vaid kolmnurkade kongruentsuse tähelepanek (ainult juhul, kui see tehti mõnda taolist lisaeeldust kasutamata).

Ülesanne 4

Peab tunnistama, et ülesande tekstist puudus vajalik algse arvu mittenegatiivsuse eeldus (uuendatud materjalis on viga parandatud). Üleparandamisel hinnati seda ülesannet nii nagu skeem ette nägi, st nagu eeldus oleks olnud sees. See tähendab, et positiivsuse eelduse kasutamise ega kasutamata jätmise eest punkte maha ei võetud. Tundub aga nii, et reeglina need, kes käsitlesid mingil määral negatiivset juhtu, said ka positiivse juhtumiga paremini hakkama. Võibolla kõikide juhtumite läbivaatus aitas ülesannet ka paremini mõista.

Selles ülesandes oli hindamine raske seetõttu, et ülesandel leidus veel kaks lisalahendust, millega žürii poolt etteantud hindamisskeem ei arvestanud. Need lahendused ja vastavad skeemid on materjali lisatud.

Mõned õpilased said kahjuks ülesandest aru nii, nagu viimase tüdruku poolt kirjutatud arvude summa peaks olema suurem kui teiste tüdrukute poolt kirjutatud arvude kogusumma. Niisugune tõlgendus ei vasta ülesande tekstile, sest mitmus („mõlemad … summad“) osutab sellele, et üksijäänud tüdruku summat tuleb võrrelda vähemalt kahe suurusega, kogusumma puhul võrreldakse aga ainult ühe suurusega. Reeglina sellistes töödes ei olnud midagi punktiväärilist ei sellise keerulisema ülesande lahendamise ega õige ülesande lahendamise seisukohalt. Kuid mõnes töös esinesid siiski õige ülesande lahenduse elemendid (nt: õiged valemid; väide, et viimase tüdruku summa on suurem iga teise tüdruku summast eraldi; Carmeni juhu tõestus), mille eest need tööd said ka punktid.

Kontrollijate kommentaarid (Raul Kangro, Oleg Košik)

Ülesanne 1

Tegemist oli õpilaste ja ka parandajate jaoks lihtsa ülesandega. Punkte muudeti juhul, kui õpilane kasutas asendust $x = \sqrt{1-y}$, mis võib põhjustada lahendite kadu (korrektne oleks sellise asenduse puhul vaadelda edasi kahte juhtu, $x = \sqrt{1-y}$ ning $x = -\sqrt{1-y}$). Kuigi hiljem tehtud viga taandus välja (sest kastutati võõrlahendeid tekitavat lahendusvõtet, võrrandi poolte ruututõstmist, mis tekitas vahepeal kaotatud lahendid tagasi), on tegemist siiski veaga lahenduses.

Ülesanne 2

Ülesanne oli raskusastmel pigem kergemapoolne. Huvitav on see, et kuigi žürii poolt pakuti välja kolm erinevat lahendust, kasutasid õpilased valdavalt muid ideid. See tähendas, et õpetajad pidid ise hindamisskeeme looma. Õnneks ei olnud õpetajate poolt kasutatud hindamisskeemid piirkonniti kuigi palju erinevad, nii et selle ülesande korral tuli teha suhteliselt vähe ja enamasti küllalt väikeseid punktimuudatusi. Mõnel üksikul korral tuli skoori arvestatavalt tõsta, kuna ebaõnnestunud tähistuste või segase väljenduse tõttu oli õige lahendusidee valeks loetud.

Lahenduste osas tasub märkida, et suur osa lahendajaist ei pidanud üldse vajalikuks põhjendada, et tegemist on võrdhaarse trapetsiga, kuigi lahenduses kasutasid seda fakti. Üllataval kombel aga ei pidanud ühegi piirkonna õpetajad oluliseks, et see fakt oleks põhjendatud (kellelgi ei võetud põhjendamata jätmise eest punkte maha) ning seetõttu ei hakatud ka ühtlustamise käigus kedagi mainitud puuduse pärast karistama.

Ülesanne 3

Ülesannet lahendati erineval viisil, kuid kõige levinum lahendusmeeetood kasutas tegurdamist $(x-y)(x+y) = 100$, mille järel uuriti $x-y$ võimalikke vähimaid väärtusi: 1 ja 2 naturaalarvude korral ning -100 ja -50 täisarvude korral.

Mõnikord jäid 1 ja -100 käsitlemata, kuna unustati ära, et ka 1 ja -1 on arvu tegurid, või oli selgitus nende juhtude kohta ebapiisav.

Ülesande esimene osa oli žüriile saadetud tööde osas tehtud üldiselt hästi, rohkem raskusi tekitas teine osa. Vahel alustati selles juhtude läbivaatust valest otsast (-100 asemel -1-st), mõnikord kombineeriti esimese osa sobivad arvud 26 ja 24 ümber teises osas sobivaks näiteks, kuid ei selgitatud, miks tekib nii tõesti vähim väärtus.

Ülesanne 4

Selle ülesande puhul esines lahendustes kaks põhilist viga. Mõni õpilane selle asemel, et näidata, kuidas ülesande tingimusest (kahe arvu summa võrdub nende arvude pöördarvude summaga) järeldub väide, kontrollis ainult, et juhul kui on tegemist pöörd- või vastandarvudega, siis ülesande tingimus on täidetud. Niisugune kontroll pole mingil juhul väite tõestus!

Teine viga tekkis siis, kui ülesande tingimusega samaväärses võrduses $a+b=\dfrac{a+b}{ab}$ jagati mõlemad pooled läbi $(a+b)$-ga, järeldati, et a ja b peavad olema pöördarvud ja seejärel lisaks kontrolliti, et ülesande tingimus kehtib ka vastandarvude korral. Tegemist on tõsise loogikaveaga, sest ühelt poolt leiti, et arvud *peavad* olema pöördarud, kuid siis avastati, et ka vastandarvud rahuldavad esialgset tingimust, mis on aga esimese väitega vastuolus. Probleem tekkis sellest, et võrduse mõlemaid pooli võib jagada sama arvuga vaid siis, kui see arv on nullist erinev. Nii et pidi vaatlema kahte juhtu: $a+b \neq 0$, ja siis saab sellega jagada, ning eraldi $a+b=0$, mis annab vastandarvud.

Rõõmustas, et enamikul juhtudel kohapealsed kontrollijad oskasid ära tunda õpilaste loogikavigu. Suurem osa punktimuutustest tulenes hindamise ühtlustamisest.

Ülesanne 5

Lisaks žürii lahendustele leidus ülesandel ka mitmeid alternatiivlahendusi, nii et pole imestada, et nende käsitlemine oli paras pähkel ka kohalikele hindajatele. Nii sai ülevaatamisel mitu lahendust punkte küllalt oluliselt juurde.

Levinuimaks veaks oli väitmine ilma tõestuseta, et kolmnurk ABD on võrdhaarne, või et $ABCD$ on romb. Kuigi joonisele peale vaadates võis see tõesti tunduda intuitiivselt ilmsena, siis tegelikkuses vajasid need väited selgitamist ning moodustasid lahendusest olulise osa. Üksikutel juhtudel jäid nende väidete ilmsusse uskuma ka parandajad.

Üksikud lahendajad arvasid, et mediaande lõikepunkt jagab need suhtes mitte $1:2$, vaid $2:3$. Piirkondades võeti selle eest maha kuni 3 punkti, ühtlustamisel karistasime siiski vaid 1 punktiga (kui muidu lahenduskäik õige).

Ülesanne 6

Vaadeldavas ülesandes ei kasutanud õpilastest mitte keegi žürii lahendust. Õiged lahendused baseerusid ideel rühmitada arve kujul 1–9, 10–19, 20–29 jne, kus iga rühma sees on paarsused vaheldumisi ja seega alates teisest rühmast on nii paarisarvulise ristsummaga kui paarituarvulise ristsummaga väärtuseid võrdselt, mistõttu etteantud suvalise arvu n korral saab taandada küsimus seda sisaldava rühma uurimisele teadmisega, et enne rühma algust (või rühma lõpuks) on paarituarvulise ristsummaga arve ühe võrra rohkem. Saadud punktide arv sõltus sellest, kui korralikult olid põhipunktid üldkujul põhjendatud ning siin oli piirkondade vahel suuri erinevusi. Selle ülesande puhul lähtuti rangematest hindajatest, kes nõudsid kõikide sammude korrektset põhjendamist.

Väga paljud õpilased üritasid argumenteerida, vaadeldes ristsummade paarsuse vaheldumist. Sõnastati ja mõnel juhul ka tõestati mitmesuguseid tulemusi: et kui 9-lt nullile üle minnes muutub arvus kaks numbrit või üldjuhul paarisarv numbreid, siis tekib kaks sama paarsusega arvu järjest; paaritu arvu numbrite muutumisel jääb paarsus vahelduma jne. Need on toredad faktid, kuid ei aita sugugi ülesannet korrektselt lahendada. Paarsuste vahetumise käitumisel ei ole kindlat korduvat seaduspära ja seetõttu ei ole lihtsalt mainitud faktide mainimisest kuigivõrd kasu selleks, et teha kindlaks, kas paarisarvulisi ristsummasid saab olla rohkem kui paarituid mingi arvu n korral. Näiteks ei saa vaadelda eraldi juhtusid, kus järgmine arv erineb eelnevast ainult kahe numbrikoha võrra – kui me vaatame paare $9,10; 19,20; \ldots, 89,90; 109,110$ jne, siis võib tunduda, et need on vaheldumisi paaritu ja paaris ristsummaga. Samas see seaduspära ei ole õige, nt 989,990 ja 1009, 1010 on selliste paaride jada järjestikused elemendid (vahele jääb üks paar, kus muutub neli numbrit), mille mõlema ristsummad on paarisarvud. Kuna mainitud faktide abil on väga raske korrektselt näidata, et suvalise n korral on arvude 1 kuni n hulgas paaritu ristsummaga arve vähemalt sama palju kui paaris ristsummaga arve, siis sellel ideel põhinevate lahenduskatsete eest valdavalt punkte ei saadud. Kahjuks olid mitmed õpetajad arvanud, et eelpooltoodud tähelepanekud vastavad korrektsele lahendusele ning seetõttu esines mitmeid suuri punktimuutuseid.

Kontrollijate kommentaarid (Härmel Nestra, Aleksandr Šved)

Ülesanne 1

Ülesanne oli õpilastele lihtne ja enamasti õigesti lahendatud. Sagedaseim viga oli anda vastuseks 37,5, mis on muutuse protsent uute väljaminekute suhtes.

Paljudes töödes esines ka ebatäpsusi või puudusi selgitamisel, milline suurus võetakse ühikuks. Näiteks kirjutati, et olgu z igakuine väljaminek, kuid ei mainitud, kas see on enne või pärast sanktsioonide kehtestamist, või leiti pudru ja juurvilja maksumusteks vastavalt 3,75% ja 2,5% ilma selgitamata, millest need protsendid on. Kuna puder ja juurvili tekitasid väljaminekuid ainult enne sanktsioone, oleks nende puhul kõige loomulikum rääkida protsentidest sanktsioonideeelse väljaminekute summa suhtes, aga leitud protsendid on hoopis praegustest kuludest. Selliseid puudusi oli osades piirkondades 1 miinuspunktiga karistatud, isegi kui ebatäpsus selgitamisel ei põhjustanud valesid arvutusi. Meie otsustasime punkti mahavõtmise kasuks, kui muidu oleks töö saanud 5–7 punkti, ja karistamata jätmise kasuks, kui juba muude vigade tõttu poleks töö üle 4 punkti teeninud.

Mõnes töös võeti eelduseks mingi konkreetne väljaminekute summa (nt 100 €) ja lahendati ülesanne sellest lähtuvalt. Sel puhul võtsime punkti maha, kui polnud seletatud, miks selline lisaeeldus ei ole üldisust kitsendav. Kui tulemuse sõltumatus summa tegelikust suurusest oli põhjendatud (loevad ainult kuluartiklite suhted), siis lugesime sellise lahenduse korrektseks.

Ülesanne 2

Ülesanne oli suhteliselt lihtne, kuid paljud unustasid juhu $a = 0$ ning kaotasid seetõttu ühe punkti.

Mõned õpilased lahendasid ainult variandi $a > 1$ ning said ühe vastuse, mille eest saadi 3 punkti. Kui vastusesse jäeti negatiivseid arve, siis võeti 1 punkt maha. Kui oli vigu võrratuse lahendamisel, siis iga variandi ($a > 1$ ja $a < 1$) eest anti kas 1 või 2 punkti, sõltuvalt sellest, kui suur osa oli õigesti tehtud.

Ülesanne 3

Ülesanne oli eelmistest veidi keerulisem, kuid täislahenduseks piisas lihtsalt ühe vastusevariandi väljatoomisest, mille tõttu enamus lahendajatest said täispunktid.

Enamus nendest, kes vastasid, et lahendust ei ole, said 0 punkti, kuna mingit sammu lahenduse poole ei olnud. Poolikuid lahendusi oli väga vähe, ning igaüks sai individuaalselt hinnatud.

Ülesanne 4

See ülesanne oli oodatult raske, aga tegelik raskus oli siiski natuke üllatav. Väga paljud õpilased üldse ei esitanudki midagi lahenduseks.

Vähese hulga lahenduste tõttu polnud vaja ka punkte tihti korrigeerida, kuid paaril tööl esines suuri punktimuudatusi nii ühes kui ka teises suunas. Kõige lihtsam lahendus sellele ülesandele kasutab siinuse graafiku kumerust, millest tulenevalt asub see graafik kohal 20° kõrgemal kui kohtadel 0° ja 30° võetud selle graafiku punkte ühendav sirge (žürii lahendus 3 vormistab selle mõttekäigu Jenseni võrratuse abil). Mõned õpilased olid selle idee peale ka tulnud, kuid jäid vähem või rohkem jänni oma mõttekäigu selgitamisega korrektses matemaatilises terminoloogias ning olid saanud kohalikelt parandajatelt 0 punkti. Andsime neile heldelt juurde. Suured punktide alandamised olid seotud kas töödega, kus tulemuseni jõuti teisendusvea tagajärjel ning õigete teisenduste puhul poleks sama mõttekäik sihile viinud, või töödega, kus pikkade teisendustega oli jõutud väiteni, mida olnuks vähemalt sama raske tõestada kui algset.

Ülesanne 5

Sarnaselt eelmise ülesandega osutus ka see ülesanne väga raskeks, mis tuli meile juba suure üllatusena. Paljud õpilased andsid mõlemale osale vastuse „jah“ ja põhjendasid seda väitega, et sirge, mis jagab kujundi kaheks võrdse pindalaga osaks, peab läbima kujundi raskuskeset. Tegelikult see nii üldse ei ole, mida kolmnurga juht otse ka näitab, sest mediaanide lõikepunkti läbiv sirge ei jaota kolmnurka pindvõrdseteks osadeks. Palju oli ka õpilasi, kes vaatasid vaid üksikuid võimalusi kujundi jaotamiseks, näiteks kolmnurga puhul jaotust mediaaniga ja rööpküliku puhul jaotust diagonaalidega ja kesklõikudega. Sellised tööd said meilt 0 punkti.

Osa õpilasi oli a-osa eitava vastuse põhjenduse kirjutanud vaid võrdkülgse, täisnurkse või mõne muu kitsendusega kolmnurga jaoks. See viitab, et on kasutatud loogikat, mille järgi piisab üldväite ümberlükkamiseks näidata ümberlükkav üksikjuhtum. Siin pole aga tegu ühe üldväitega kõigi kolmnurkade kohta, vaid kõigi kolmnurkade kohta eraldi käivate väidete perega. Eitada ei tule mitte väidet, et kõigi kolmnurkade korral läbivad kõik teda pindvõrdselt jaotavad sirged tema mediaanide lõikepunkti, vaid iga väidet, et kõik kindlat kolmnurka pindvõrdselt jaotavad sirged läbivad selle kolmnurga mediaanide lõikepunkti. (Kolmnurk on väites parameeter, justnagu arvuteooriaülesannetes on suvaline naturaalarv n tihti parameeter, mis jääb ka vastusesse sisse.) Kui tõestuses lisaeeldust reaalselt ei kasutatud, siis me selle eest punkte ei alandanud. Mõnes töös oli neid lisaeeldusi siiski ka kasutatud, mispuhul võtsime raske südamega 1 punkti maha. On ju mõttekäik suvalise kolmnurga jaoks üldjoontes sama mis võrdkülgse või täisnurkse kolmnurga jaoks. Otsust kergendas asjaolu, et kõigis neis töödes oli samas mõttekäigus veel mõni kas või pisike viga.

Ülesanne 6

Ülesanne oli keskmise raskusega, ning osa ülesandest oli lihtne ära teha. Paljud õpilased lahendasid ära esimese poole, saades, et osalejate arv on 5-st suurem ning vastus 6 sobib. Kui üritused 7 võistlejaga lahendit saada ei õnnestunud, kirjutati lihtsalt, et suurema arvuga ei saa, või lausa kirjutati ilma suuremaid arve vaatlemata kohe vastus. Sellised tööd said enamuses 3 punkti. Kui olid mingid väited olemas, mis viiksid täieliku lahenduseni, siis oli veel punkte lisatud.

Oli paar lahedust, kus vaadati ainult ülejäänud mängijate omavahelisi mänge ja alles siis esimese kolme mängija mänge, kuid nendes lahendustes oli puudu mõned tõestused ning seletatavad laused ning enamus selliseid lahendusi said 5–6 punkti.

Eesti LXII matemaatikaolümpiaad

7. veebruar 2015 Piirkonnavoor **12. klass**

Kontrollijate kommentaarid (Urve Kangro, Kairi Kangro)

Ülesanne 1

See ülesanne oli valdavalt hästi lahendatud – kes ikka kahekordse nurga valemeid teadis, see enamasti ka vastuseni jõudis. Tüüpilisemad vead olid lisaks arvutusvigadele $\sin^2 x$-ga läbijagamine, mis kaotas nulllahendi, ja ruutjuure võtmisel negatiivse lahendi unustamine. Seda ülesannet lahedasid vaid üksikud õpilased žürii skeemi järgi, kus kõigepealt lahendati võrrand koosinuse jaoks ja sealt arvutitati siinus. Enamus õpilasi viis võrrandi kohe siinuste peale üle. Vastav hindamisskeem on lisatud.

Ülesanne 2

See ülesanne oli õpilaste jaoks lihtne, esinenud vead olid põhiliselt arvutusvead. Esines mõningaid kummalisi väiteid puutumise kohta, näiteks „graafikud puutuvad parajasti siis, kui neil on ainult üks ühine punkt“, mis ei ole õige, kuna ka lõikuvatel graafikutel võib olla ainult üks ühine lõikepunkt, või siis „kui funktsioonide graafikud puutuvad, peab neil olema vaid üks ühine punkt“, mis on õige ruutfunktsioonide korral, aga juba näiteks kuupfunktsiooni graafiku korral ei pruugi kehtida – graafikud võivad ühes punktis puutuda ja teises lõikuda.

Ülesanne 3

Ülesanne oli üks lihtsamatest. Kohati esines põhjendamatuid väiteid, näiteks et kuna arvude bd ja $9b$ üheliste number peab olema sama, siis $d = 9$. See pole sugugi ainus võimalus, näiteks kui $b = 5$, siis d võib olla suvaline paaritu number.

Ülesanne 4

Selles ülesandes saadi valdavalt 0, 1 (kui oli näidatud juht $n = 1$) või 7 punkti. Esines lahendusi, kus püüti lõpmatust korrutisest tuletist võtta (vigaselt) ning selle põhjal väita, et vasak pool väheneb kiiremini kui parem pool. Paaris töös oli induktsiooni samm korrektselt läbi tehtud, kuid baas (juht $n = 1$) näitamata. Isegi kui see on triviaalne, tuleks vähemalt ära märkida, et see kehtib. Juhtude $n = 2, 3, 4$ vaatlemise eest eraldi punkte ei saanud. Paaris töös väideti ka, et võrratus kehtib, kui $n = 1$ ning kui $n = \infty$ (sest siis on mõlemal poolel 0), järelikult kehtib ka vahepealsete n väärtuste korral. See järeldus pole üldjuhul korrektne.

Ülesanne 5

See ülesanne osutus õpilastele raskeks. Enamik õpilastest küll taipasid, et sellist nelinurka ei leidu, aga põhjendused jäid paraku puudulikuks. Valdavalt üritati kas alustada ruudust ja siis üritada punktide „nihutamise“ teel selgitada, miks sellist nelinurka ei leidu, või siis vaadeldi ühe kolmnurga ümberringjoont ja üritati kõigi juhtude läbivaatusega näidata, et neljandat punkti ei saa kuhugi panna. Paraku aga jäeti kas mõni juht vaatamata, või lihtsalt väideti, et „kui panna neljas punkt sinna, siis ta jääb mingi ümberringjoone sisse“ ilma igasuguse põhjenduseta. Leidusid ka mõned tööd, kus oldi vaadeldud ühe kolmnurga ümberringjoont, ja väidetud, et selleks, et neljas punkt asuks sellest ümberringjoonest väljas, peab neljandast punktist tõmmatud diagonaal olema pikem kui ümberringjoone diameeter, mis ei ole tõene. Üllataval kombel oldi sellist väidet piirkondades õigeks loetud, mis põhjustas mõnel juhul suuri punktimuudatusi.

Ülesanne 6

See ülesanne oli küllaltki hästi lahendatud. Paljud õpilased olid lahendanud nii, et arvutanud ühe võimaliku summa välja (näiteks valides arvud mööda diagonaali) ning siis näidanud, et valitud arve sobivalt vahetades on võimalik saada kätte suvaline lubatud arvude valik, ning arvude summa ei muutu. See on samuti korrektne lahendus. Kui töös oli välja arvutatud ainult üks võimalik summa ning siis väidetud (mitte tõestatud), et arvude summa ei sõltu nende valikust, siis otsustasime anda 4 punkti.