Piirkonnavoor 2014

Eesti LXI matemaatikaolümpiaad

25. jaanuar 2014 Piirkonnavoor **7. klass**

I osa. *Lahendamisaega on 40 minutit.*
Sellele lehele kirjuta ainult vastused, lahendamiseks võid kasutada lisapaberit.
Iga ülesande õige vastus annab 2 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Arvuta:

$$1001 - 2332 + 5445 - 6776 + 9889 = \dots\dots\dots\dots$$

2. Arvud a ja b on vähimad võimalikud naturaalarvud, mille korral kehtib võrdus

$$\frac{1}{2} : \frac{1}{3} + \frac{1}{4} : \frac{1}{5} = \frac{1}{a} : \frac{1}{b}.$$

Leia arvud a ja b.

$a = \dots\dots\dots$, $b = \dots\dots\dots$

3. Mitu korda on üks meeter suurem poolest sentimeetrist?

....

4. Üheteistkohaline arv $\overline{2013abc2014}$ jagub arvuga 9 ning ka arvud $\overline{2013ab2014}$ ja $\overline{2013a2014}$ jaguvad arvuga 9. Mitu sellist üheteistkohalist arvu $\overline{2013abc2014}$ leidub?

....

5. Kui kastis olevad õunad jagada klassi õpilastele nii, et igaüks saaks 5 õuna, siis jääb kasti 6 õuna. Selleks, et igaüks saaks 6 õuna, peaks kastis olema 5 õuna rohkem. Mitu õuna on kastis?

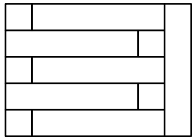
....

6. Võrduses tuleb üks number asendada mõne teise numbriga nii, et võrdus oleks õige.

$$1 \cdot 2 - 3 + 4 \cdot 5 - 6 = 7$$

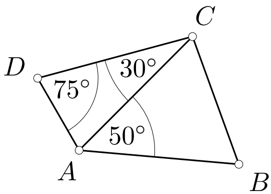
Number .... tuleb asendada numbriga ....

7. Suur ristkülik on jaotatud viieks võrdseks ruuduks ja kuueks võrdseks ristkülikuks. Suure ristküliku pindala on 140 cm^2. Leia suure ristküliku ümbermõõt.



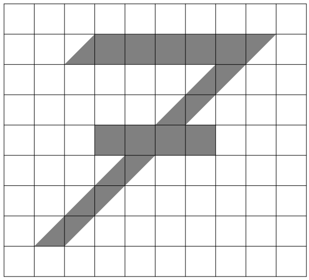
....

8. Joonisel kujutatud nelinurgas $|AB| = |CD|$. Leia nurga ABC suurus.



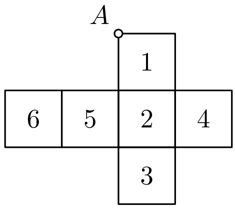
....

9. Ruudustiku pindala on 90 cm^2. Leia tumedaks värvitud kujundi pindala.



....

10. Joonisel on antud kuubi pinnalaotus, kus üks tipp on tähistatud tähega A. Leia neil tahkudel olevate arvude summa, mille üks tipp pärast kuubi kokkupanemist on A.



....

Eesti LXI matemaatikaolümpiaad

25. jaanuar 2014 Piirkonnavoor **8. klass**

I osa. *Lahendamisaega on 40 minutit.*
Sellele lehele kirjuta ainult vastused, lahendamiseks võid kasutada lisapaberit.
Iga ülesande õige vastus annab 2 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Leia x väärtus, kui

$$2\frac{3}{4} : 5{,}5 = \frac{x}{6}.$$

. . . .

2. Olgu a ja b sellised positiivsed täisarvud, et $a - b = 2014$ ja $a + b$ on 4-kohaline. Leia arvu b suurim võimalik väärtus.

. . . .

3. Annal on kaks korda rohkem säutse kui Bertal. Bertal on kolm korda rohkem säutse kui Celial ja Celial on neli korda rohkem säutse kui Donnal. Mitu korda on Annal, Bertal ja Celial kokku rohkem säutse kui Donnal?

. . . .

4. Arvud x ja y on sellised, et $x + y < 0$, $x \cdot y < 0$ ja $x < y$. Järjesta arvud x, $-x$, y ja $-y$, alustades väiksemast.

. . . . $<$ . . . . $<$ . . . . $<$ . . . .

5. Mitu täisarvu vahemikus 201-st 699-ni jaguvad nii 4-ga kui ka 5-ga?

. . . .

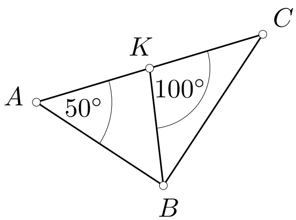
6. Leia avaldise

$$\frac{a \cdot b \cdot c}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}$$

vähim võimalik täisarvuline väärtus, kui a, b ja c on kolm järjestikust positiivset täisarvu.

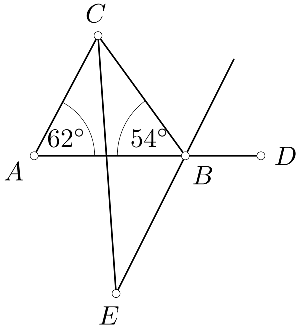
. . . .

7. Kolmnurk ABC on täisnurkne. Punkt K asub küljel AC ja $|KB| = 15$ cm. Leia külje AC pikkus.



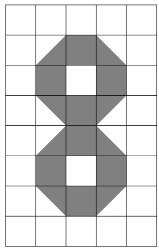
....

8. Nurga ACB poolitaja lõikub nurga CBD poolitajaga punktis E. Leia nurga CEB suurus.



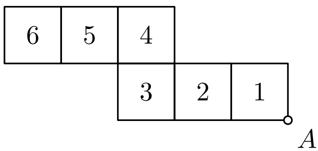
....

9. Ruudustiku pindala on 88 cm^2. Leia tumedaks värvitud osa pindala.



....

10. Joonisel on antud kuubi pinnalaotus, kus üks tipp on tähistatud tähega A. Leia neil tahkudel olevate arvude summa, mille üks tipp pärast kuubi kokkupanemist on A.



....

Eesti LXI matemaatikaolümpiaad

25. jaanuar 2014 Piirkonnavoor **9. klass**

I osa. *Lahendamisaega on 40 minutit.*
Sellele lehele kirjuta ainult vastused, lahendamiseks võid kasutada lisapaberit.
Iga ülesande õige vastus annab 2 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Arv a on positiivne täisarv. Mitu täisarvu on suuremad kui $2014a^2 + 1000$, aga väiksemad kui $2014(a^2 + 1000)$?

. . . .

2. Olgu a, b, c ja d sellised arvud, et $abc = 4$, $bcd = 12$ ja $a + d = 2$. Leia korrutis $abcd$.

. . . .

3. Kuubikujulise hoone ruumala on 2699900% võrra suurem selle hoone maketi ruumalast. Mitu korda on hoone kõrgus suurem maketi kõrgusest?

. . . .

4. Mitu paaritut positiivset tegurit on arvul 6^{2014}?

. . . .

5. Leia avaldise

$$\frac{a \cdot b \cdot c}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}$$

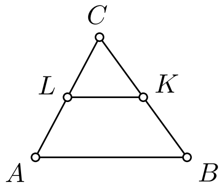
vähim võimalik täisarvuline väärtus, kui a, b ja c on kolm järjestikust positiivset täisarvu.

. . . .

6. Leia $\frac{y}{z}$, kui $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z} = 0$ ja $\frac{1}{x} - \frac{6}{y} - \frac{5}{z} = 0$.

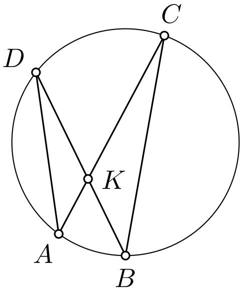
. . . .

7. Kolmnurgas ABC on tõmmatud kesklõik KL. Nelinurga $ABKL$ ümbermõõt on 38 cm ja kolmnurga ABC ümbermõõt on 48 cm. Leia külje AB pikkus.



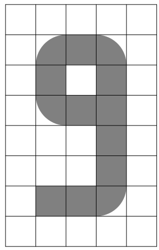
. . . .

8. Kõõlud AC ja BD lõikuvad punktis K. Kaar AB moodustab $\frac{1}{10}$ ringjoonest ning kaar CD moodustab $\frac{1}{5}$ ringjoonest. Leia nurga AKB suurus.



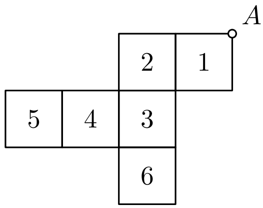
. . . .

9. Ruudustiku pindala on $40\ \mathrm{cm}^2$. Tumedaks värvitud number 9 koosneb ruutudest ja veerandringidest. Leia tumedaks värvitud osa täpne pindala.



. . . .

10. Joonisel on antud kuubi pinnalaotus, kus üks tipp on tähistatud tähega A. Leia neil tahkudel olevate arvude summa, mille üks tipp pärast kuubi kokkupanemist on A.



. . . .

Eesti LXI matemaatikaolümpiaad

25. jaanuar 2014 Piirkonnavoor **7. klass**

II osa. *Lahendamisaega on 2 tundi.*
Ülesannete lahendused kirjuta eraldi lehele.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti. Ainult vastusest ei piisa!
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Leia antud korrutamistehtes tähtedele vastavad numbrid, kui erinevatele tähtedele vastavad erinevad numbrid.

$$\begin{array}{ccccc} & & D & A & B \\ \times & & & 5 & D \\ \hline & & D & A & B \\ & E & 3 & 5 & \\ \hline & E & 5 & D & B \end{array}$$

2. Teravnurkse kolmnurga ABC küljel BC on valitud punkt D. On teada, et kolmnurga ABC üks nurkadest on suurusega 40° ning kummaski kolmnurgas ABD ja ACD on nurk suurusega 60°. Leia nurga BAC suurus.

3. Papist on välja lõigatud ristkülikukujulised tükid mõõtmetega 6×1, 5×1, 4×1 ja 3×1, igaüht kaks eksemplari. Milliste positiivsete täisarvude n korral on neid tükke kasutades võimalik koostada $n \times n$ ruut?

Märkus. Tükid ei või omavahel kattuda, ruudu sisemuses ei tohi olla tühje alasid. Kõiki tükke ei pea tingimata kasutama.

Eesti LXI matemaatikaolümpiaad

25. jaanuar 2014 Piirkonnavoor **8. klass**

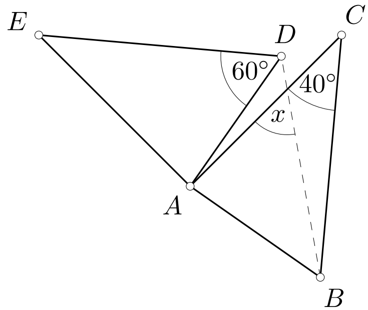
II osa. *Lahendamisaega on 2 tundi.*
Ülesannete lahendused kirjuta eraldi lehele.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti. Ainult vastusest ei piisa!
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Tahvlil seisab korrutis $m(m+n)(m+3n)$.

a) Kas antud korrutis on paarisarv alati, kui m ja n on positiivsed täisarvud?

b) 17-aastane Pille märkas täna hommikul, et kui arvud m ja n asendada mingis järjekorras tema ning tema väikevenna vanustega täisaastates, tuleb korrutiseks aastaarv, millal ta väikevend õppis ujuma. Kui vana on Pille väikevend?

2. Joonisel olev kolmnurk ADE on saadud kolmnurga ABC pööramisel 90 kraadi võrra ümber tipu A. Leia tähega x märgitud nurga suurus.



3. Sirge tee ääres on 11 bussipeatust järjestuses A, B, C, D, E, F, G, H, I, J ja K. Peatuste A ja K vaheline kaugus on täpselt 56 km. Kaks peatust, mille vahele jääb täpselt üks peatus, ei asu teineteisest kunagi kaugemal kui 12 km ning kaks peatust, mille vahele jääb vähemalt kaks peatust, ei asu teineteisele kunagi lähemal kui 17 km. Leia peatuste B ja G vaheline kaugus.

Eesti LXI matemaatikaolümpiaad

25. jaanuar 2014 Piirkonnavoor **9. klass**

II osa. *Lahendamisaega on 4 tundi.*
Ülesannete lahendused kirjuta eraldi lehele.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti. Ainult vastusest ei piisa!
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Olgu x ja y sellised positiivsed täisarvud, mille korral korrutis $360x$ on mingi täisarvu ruut ja $360y$ on mingi täisarvu kuup.

a) Leia arvude x ja y vähimad võimalikud väärtused.

b) Leia summa $x + y$ vähim võimalik väärtus, kui xy on mingi täisarvu kuup.

2. Poes on müügil kolme liiki šokolaade A, B ja C. Erinevat liiki šokolaadide hind on erinev. Kolm poissi läksid poodi ja neist igaüks ostis neli ühte liiki šokolaadi, kolm teist liiki šokolaadi ja kaks kolmandat liiki šokolaadi. Kõikide poiste ostud olid erinevad. Tõesta, et ei ole võimalik, et kõik poisid maksid ostu eest ühe ja sama summa.

3. On antud romb $ABCD$. Külgedel AB ja BC on vastavalt punktid E ja F nii, et DEF on võrdkülgne kolmnurk ja $|AD| = |DE|$. Leia rombi nurkade suurused.

4. Etteantud arv teisendatakse uueks arvuks nii, et kõigepealt kirjutatakse selle arvu numbrite arv, siis kohe selle järele antud arvu paarisnumbrite arv ja seejärel paaritute numbrite arv. (Näiteks arv 11223344556677 teisendatakse arvuks 1468 ning arv 200000 arvuks 660.) Sama teisendus tehakse uuesti eelmise teisenduse teel saadud arvuga jne. Põhjenda, et alustades ülimalt 18-kohalisest arvust, jõutakse alati mitte rohkem kui 3 teisendusega arvuni, mille teisenduseks oleks arv ise.

Eesti LXI matemaatikaolümpiaad

25. jaanuar 2014 Piirkonnavoor **10. klass**

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Leia kõik sellised reaalarvud x, mille korral

$$\frac{1+x}{1-x} \cdot \frac{1+x^2}{1-x^2} = \frac{1+(x+x^2)}{1-(x+x^2)}.$$

2. Tehasest tulevad töökotta ristkülikukujulised metallplaadid mõõtmetega 1 dm × 1,6 dm. Sepp vormis neist ühe ümber ristkülikukujuliseks plaadiks, mille ümbermõõt oli algse plaadiga võrreldes 20% ja pindala 40% suurem. Leia sepa valmistatud plaadi mõõtmed.

3. Võrdkülgse kolmnurga tippudesse on kirjutatud positiivsed täisarvud 14, 20 ja n. Mistahes kahes tipus olevate arvude korrutis jagub kolmandas tipus oleva arvuga. Leia kõik võimalused, milline saab olla arv n.

4. Olgu x, y, z sellised nullist erinevad reaalarvud, et kehtib seos

$$\frac{x+y}{z} = \frac{y+z}{x} = \frac{z+x}{y}.$$

Leia avaldise $\dfrac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz}$ kõik võimalikud väärtused.

5. Kolmnurgal on kaks tippu, millest tõmmatud kõrgus on vähemalt niisama pikk kui vastaskülg. Leia kõik võimalused, millised saavad olla selle kolmnurga nurkade suurused.

6. Mitmel viisil on võimalik 3 lapse vahel jaotada 3 punast ja 3 sinist kommi nii, et iga laps saaks vähemalt 1 kommi?

Eesti LXI matemaatikaolümpiaad

25. jaanuar 2014 Piirkonnavoor **11. klass**

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Leia kõik reaalarvud x, mille korral

$$\frac{\tan x - \sin x}{\cos x} = \tan x.$$

2. Kumb arvudest $\sqrt[7]{3}$ ja $\sqrt[3]{\frac{5}{3}}$ on suurem?

3. Näita, et 18 järjestikuse ülimalt 3-kohalise naturaalarvu hulgas leidub vähemalt üks, mis jagub oma numbrite summaga.

4. Leia kõik positiivsed täisarvud n, mille korral leiduvad positiivsed reaalarvud $x_1, \ldots, x_n$ nii, et $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 2014$ ja $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} = 2014$.

5. Võrdkülgse kolmnurga ABC külgedel BC, CA ja AB võetakse vastavalt punktid K, L ja M nii, et $|BK| = |CL| = |AM|$. Olgu kolmnurkade ABC, KLM ja ALM pindalad vastavalt S, S_1 ja S_2 ning samade kolmnurkade ümbermõõdud vastavalt P, P_1 ja P_2. Tõesta, et $\frac{S_1}{P_1} + \frac{S_2}{P_2} = \frac{S}{P}$.

6. Laual on kolm kivihunnikut, mille kivide arvud on 2012, 2013 ja 2014. Ühel sammul tohib võtta mingist hunnikust 2 kivi ja panna need ülejäänud kahte hunnikusse, kummassegi ühe, või võtta mingist kahest hunnikust kummastki 1 kivi ning panna need mõlemad kolmandasse. Kas on võimalik, et peale lõplikku arvu samme on

a) kõigis hunnikutes võrdselt 2013 kivi?

b) kõik kivid ühes hunnikus?

Eesti LXI matemaatikaolümpiaad

25. jaanuar 2014 | Piirkonnavoor | **12. klass**

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Ritta on kirjutatud kõik lihtmurrud (ka taandamata), mille nimetaja ei ole suurem kui 100. Leia ritta kirjutatud arvude summa.

2. Leia kõik positiivsed reaalarvud x, mille korral

$$x^{2014x} = (2014x)^x.$$

3. Positiivse täisarvu n mingid tegurid d_1, d_2 ja d_3 rahuldavad järgmisi tingimusi:

(1) kõik tegurid d_1, d_2, d_3 on väiksemad n-st;

(2) summa $d_1 + d_2 + d_3$ ei ole väiksem n-st;

(3) ükski kaks arvudest d_1, d_2, d_3 ei jagu teineteisega.

Tõesta, et n jagub 30-ga.

4. Leia kõik reaalarvud x, mille korral

$$2\sqrt{2x(1-x)} = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}.$$

5. Kolmnurga erinevatest tippudest tõmmatud nurgapoolitaja, kõrgus ja mediaan lõikuvad ühes punktis. Projektsioon sellest punktist mingile küljele poolitab selle. Tõesta, et projektsioon sellest punktist mistahes küljele poolitab selle.

6. Leia kõik positiivsed täisarvud n, mille korral leiduvad erinevad reaalarvud $a_1, \ldots, a_n$, mis rahuldavad järgmist kahte tingimust:

(1) arvud $a_1, \ldots, a_n$ on mingi aritmeetilise jada n järjestikust liiget;

(2) arvude $a_1, \ldots, a_n$ kõikvõimalikud 0-kaupa, 1-kaupa, 2-kaupa jne kuni n-kaupa summad mingis järjekorras võetuna on mingi aritmeetilise jada 2^n järjestikust liiget.

Märkus. Ühe arvu summa on see arv ise; nulli arvu summaks loetakse 0.

LXI Олимпиада Эстонии по математике

25 января 2014 г. Региональный тур **7 класс**

I часть. *Время, отводимое для решения: 40 минут.*
На этом листке написать только ответы, для решения можно использовать дополнительную бумагу.
Верный ответ каждой задачи даёт 2 балла.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Вычислить:

$$1001 - 2332 + 5445 - 6776 + 9889 = \dots\dots\dots\dots$$

2. Числа a и b являются наименьшими натуральными числами, при которых действует равенство

$$\frac{1}{2} : \frac{1}{3} + \frac{1}{4} : \frac{1}{5} = \frac{1}{a} : \frac{1}{b}.$$

Найти числа a и b.

$a = \dots\dots\dots$, $b = \dots\dots\dots$

3. Во сколько раз один метр больше половины сантиметра?

. . . .

4. Одиннадцатизначное число $\overline{2013abc2014}$ делится на число 9. Числа $\overline{2013ab2014}$ и $\overline{2013a2014}$ также делятся на число 9. Сколько всего существует таких одиннадцатизначных чисел $\overline{2013abc2014}$?

. . . .

5. Если лежащие в ящике яблоки раздать всем ученикам класса так, чтобы каждый получил по 5 штук, то в ящике останется 6 яблок. А чтобы раздать каждому по 6 штук, в ящике должно быть яблок на 5 больше. Сколько всего яблок в ящике?

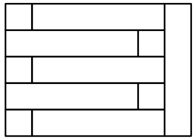
. . . .

6. В равенстве нужно одну цифру заменить какой-то другой цифрой так, чтобы равенство стало верным.

$$1 \cdot 2 - 3 + 4 \cdot 5 - 6 = 7$$

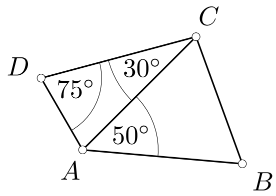
Цифру . . . . нужно заменить на цифру . . . .

7. Большой прямоугольник поделён на пять равных квадратов и шесть равных прямоугольников. Площадь большого прямоугольника равна 140 см^2. Найти периметр большого прямоугольника.



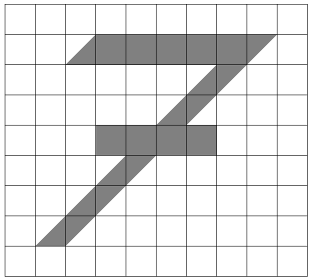
. . . .

8. В изображённом на рисунке четырёхугольнике $|AB| = |CD|$. Найти величину угла ABC.



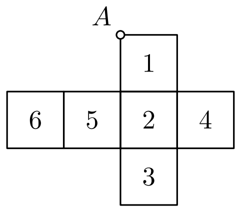
. . . .

9. Площадь клетчатой доски равна 90 см^2. Найти площадь окрашенной тёмным цветом фигуры.



. . . .

10. На рисунке изображена развёртка куба, где одна из вершин обозначена буквой A. Найти сумму чисел, которые записаны на тех гранях, у которых после составления куба одной из вершин окажется A.



. . . .

LXI Олимпиада Эстонии по математике

25 января 2014 г. Региональный тур **8 класс**

I часть. *Время, отводимое для решения: 40 минут.*
На этом листке написать только ответы, для решения можно использовать дополнительную бумагу.
Верный ответ каждой задачи даёт 2 балла.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Найти значение x, если

$$2\frac{3}{4} : 5{,}5 = \frac{x}{6}.$$

. . . .

2. Пусть a и b такие положительные целые числа, при которых $a - b = 2014$ и $a + b$ является 4-значным числом. Найти наибольшее возможное значение числа b.

. . . .

3. У Ани в два раза больше твитов, чем у Вали. У Вали в три раза больше твитов, чем у Гали, а у Гали в четыре раза больше твитов, чем у Даши. Во сколько раз общее число твитов у Ани, Вали и Гали больше числа твитов у Даши?

. . . .

4. Числа x и y такие, что $x + y < 0$, $x \cdot y < 0$ и $x < y$. Расположить числа x, $-x$, y и $-y$, начиная с наименьшего.

. . . . < . . . . < . . . . < . . . .

5. Сколько всего целых чисел на промежутке от 201 до 699 делится как на число 4, так и на число 5?

. . . .

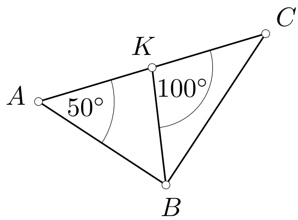
6. Найти наименьшее возможное целочисленное значение выражения

$$\frac{a \cdot b \cdot c}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6},$$

где a, b и c – это три последовательных положительных целых числа.

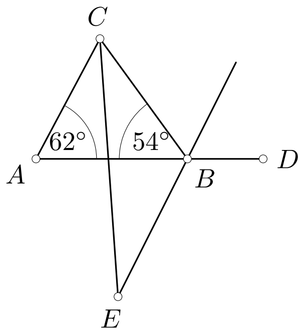
. . . .

7. Треугольник ABC прямоугольный. Точка K лежит на стороне AC и $|KB| = 15$ см. Найти длину стороны AC.



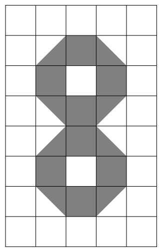
. . . .

8. Биссектриса угла ACB пересекает биссектрису угла CBD в точке E. Найти величину угла CEB.



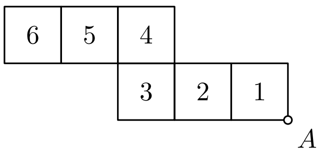
. . . .

9. Площадь клетчатой доски равна 88 см^2. Найти площадь окрашенной тёмным цветом части.



. . . .

10. На рисунке изображена развёртка куба, где одна из вершин обозначена буквой A. Найти сумму чисел, которые записаны на тех гранях, у которых после составления куба одной из вершин окажется A.



. . . .

LXI Олимпиада Эстонии по математике

25 января 2014 г. Региональный тур **9 класс**

I часть. *Время, отводимое для решения: 40 минут.*
На этом листке написать только ответы, для решения можно использовать дополнительную бумагу.
Верный ответ каждой задачи даёт 2 балла.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Число a является положительным целым числом. Сколько всего существует целых чисел, которые больше $2014a^2 + 1000$, но меньше $2014(a^2 + 1000)$?

. . . .

2. Пусть a, b, c и d такие числа, что $abc = 4$, $bcd = 12$ и $a + d = 2$. Найти произведение $abcd$.

. . . .

3. Объём кубической формы здания на 2699900% больше объёма макета этого же здания. Во сколько раз высота здания больше высоты его макета?

. . . .

4. Сколько всего нечётных положительных делителей у числа 6^{2014}?

. . . .

5. Найти наименьшее возможное целочисленное значение выражения

$$\frac{a \cdot b \cdot c}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7},$$

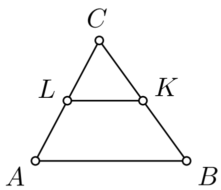
где a, b и c – это три последовательных положительных целых числа.

. . . .

6. Найти $\frac{y}{z}$, если $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z} = 0$ и $\frac{1}{x} - \frac{6}{y} - \frac{5}{z} = 0$.

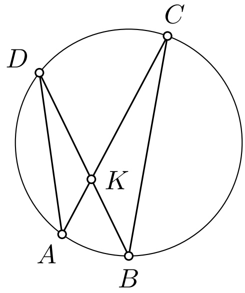
. . . .

7. В треугольнике ABC проведена средняя линия KL. Периметр четырёхугольника $ABKL$ равен 38 см, а периметр треугольника ABC равен 48 см. Найти длину стороны AB.



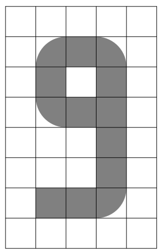
. . . .

8. Хорды AC и BD пересекаются в точке K. Дуга AB является $\dfrac{1}{10}$ частью окружности, дуга CD является $\dfrac{1}{5}$ частью окружности. Найти величину угла AKB.



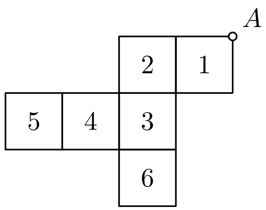
. . . .

9. Площадь клетчатой доски равна 40 см^2. Окрашенная в тёмный цвет цифра 9 состоит из квадратов и четвертей круга. Найти точное значение площади окрашенной тёмным цветом части.



. . . .

10. На рисунке изображена развёртка куба, где одна из вершин обозначена буквой A. Найти сумму чисел, которые записаны на тех гранях, у которых после составления куба одной из вершин окажется A.



. . . .

LXI Олимпиада Эстонии по математике

25 января 2014 г. Региональный тур **7 класс**

II часть. *Время, отводимое для решения: 2 часа.*
Решения задач написать на отдельном листе.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов. Написать только ответ недостаточно!
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Найти в данном действии умножения соответствующие буквам цифры, если различным буквам соответствуют различные цифры.

$$\begin{array}{rcccc}
 & & D & A & B \\
\times & & & 5 & D \\
\hline
 & & D & A & B \\
 & E & 3 & 5 & \\
\hline
 & E & 5 & D & B
\end{array}$$

2. На стороне BC остроугольного треугольника ABC выбрана точка D. Известно, что один из углов треугольника ABC равен 40°, а в обоих треугольниках ABD и ACD имеется угол величиной 60°. Найти величину угла BAC.

3. Из картона вырезали прямоугольные части, размеры которых 6×1, 5×1, 4×1 и 3×1, по два экземпляра каждого размера. Найти все такие положительные целые числа n, при которых можно из этих частей составить квадрат размером $n \times n$.

Замечание. Эти части нельзя накладывать друг на друга, и внутри квадрата нельзя оставлять пустоты. Не обязательно использовать все части.

LXI Олимпиада Эстонии по математике

25 января 2014 г. Региональный тур **8 класс**

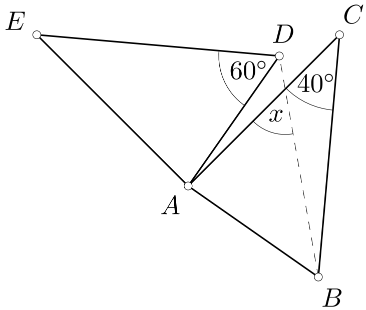
II часть. *Время, отводимое для решения: 2 часа.*
Решения задач написать на отдельном листе.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов. Написать только ответ недостаточно!
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. На доске записано выражение $m(m+n)(m+3n)$.

а) Будет ли значение данного выражения всегда чётным числом, если m и n положительные целые числа?

б) 17-летняя Полина сегодня утром заметила, что если вместо чисел m и n подставить в каком-то порядке её возраст и возраст её младшего братика в полных годах, то значение выражения окажется равно году, когда её младший братик научился плавать. Сколько лет сейчас братику Полины?

2. Изображённый на рисунке треугольник ADE получен при повороте треугольника ABC на 90 градусов вокруг вершины A. Найти величину угла, обозначенного буквой x.



3. На обочине прямолинейной дороги расположены 11 автобусных остановок, которые по порядку обозначим буквами A, B, C, D, E, F, G, H, I, J и K. Расстояние между остановками A и K ровно 56 км. Любые две остановки, между которыми только одна остановка, находятся друг от друга на расстоянии не более 12 км, а любые две остановки, между которыми по крайней мере две остановки, находятся друг от друга на расстоянии не менее 17 км. Найти расстояние между остановками B и G.

LXI Олимпиада Эстонии по математике

25 января 2014 г. Региональный тур **9 класс**

II часть. *Время, отводимое для решения: 4 часа.*
Решения задач написать на отдельном листе.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов. Написать только ответ недостаточно!
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Пусть x и y – такие положительные целые числа, что произведение $360x$ является квадратом целого числа, а $360y$ – кубом целого числа.

а) Найти наименьшие возможные значения чисел x и y.

б) Найти наименьшее возможное значение суммы $x + y$, если xy – это куб целого числа.

2. В магазине продаётся три вида шоколада A, B и C, причём у различных видов разная цена. Три мальчика пошли в магазин, и каждый из них купил по четыре шоколадки одного вида, по три шоколадки второго вида и по две шоколадки третьего вида. Покупки всех мальчиков были разные. Доказать, что все мальчики не могли заплатить за покупку одинаковую сумму.

3. Дан ромб $ABCD$. На сторонах AB и BC есть соответственно точки E и F такие, что DEF – равносторонний треугольник и $|AD| = |DE|$. Найти величины углов ромба.

4. Заданное число видоизменяют таким образом, что сначала выписывают количество цифр этого числа, затем сразу за ним количество чётных цифр заданного числа, и затем количество нечётных цифр этого числа. (Например, число 11223344556677 преобразуется в число 1468, а число 200000 в 660). После, такое же преобразование производят с уже изменённым числом и т.д. Доказать, что начиная с не более чем 18-ти значного числа, всегда не более чем за 3 преобразования достигается число, которое преобразуется в самого себя.

LXI Олимпиада Эстонии по математике

25 января 2014 г. Региональный тур **10 класс**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Найти все действительные числа x, при которых

$$\frac{1+x}{1-x} \cdot \frac{1+x^2}{1-x^2} = \frac{1+(x+x^2)}{1-(x+x^2)}.$$

2. Из завода в мастерскую поступают прямоугольные металлические пластины размерами 1 дм × 1,6 дм. Кузнец одну из них перековал в прямоугольную пластину, периметр которой больше начального на 20%, а площадь – на 40%. Найти размеры пластины, изготовленной кузнецом.

3. В вершины равностороннего треугольника записаны положительные целые числа 14, 20 и n. Произведение чисел любых двух вершин делится на число в третьей вершине. Найти все возможные значения числа n.

4. Пусть x, y, z – такие отличные от нуля действительные числа, что выполняется соотношение

$$\frac{x+y}{z} = \frac{y+z}{x} = \frac{z+x}{y}.$$

Найти все возможные значения выражения $\dfrac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz}$.

5. В треугольнике имеются две стороны, каждая из которых не длиннее опущенной на неё высоты. Найти все возможности, какими могут быть величины углов данного треугольника.

6. Сколькими разными способами можно между 3 детьми поделить 3 красные и 3 синие конфеты так, чтобы каждый ребёнок получил хотя бы 1 конфету?

LXI Олимпиада Эстонии по математике

25 января 2014 г. Региональный тур **11 класс**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Найти все действительные числа x, при которых

$$\frac{\tan x - \sin x}{\cos x} = \tan x.$$

2. Какое из чисел $\sqrt[7]{3}$ и $\sqrt[3]{\frac{5}{3}}$ больше?

3. Доказать, что среди 18 последовательных не более чем 3-значных натуральных чисел найдётся по меньшей мере одно, которое делится на сумму своих цифр.

4. Найти все положительные целые числа n, при которых найдутся такие положительные действительные числа $x_1, \ldots, x_n$, что $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 2014$ и $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} = 2014$.

5. На сторонах BC, CA и AB равностороннего треугольника ABC берут соответственно точки K, L и M так, что $|BK| = |CL| = |AM|$. Пусть площади треугольников ABC, KLM и ALM – соответственно S, S_1 и S_2, а периметры этих же треугольников равны соответственно P, P_1 и P_2. Доказать, что $\frac{S_1}{P_1} + \frac{S_2}{P_2} = \frac{S}{P}$.

6. На столе три кучи камней, количество камней в которых 2012, 2013 и 2014. Одним ходом можно из одной кучи взять 2 камня и переложить их в остальные две кучи, в каждую по одному, или забрать из каких-то двух куч по 1 камню и переложить их оба в третью кучу. Возможно ли, что после конечного числа ходов

а) во всех кучах будет по 2013 камней?

б) все камни будут находиться в одной куче?

LXI Олимпиада Эстонии по математике

25 января 2014 г. Региональный тур **12 класс**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. В ряд выписаны все правильные дроби (в том числе и сократимые), знаменатель которых не больше 100. Найти сумму записанных в ряд чисел.

2. Найти все положительные действительные числа x, при которых

$$x^{2014x} = (2014x)^x.$$

3. Для некоторых делителей d_1, d_2 и d_3 положительного целого числа n выполняются следующие условия:

(1) все делители d_1, d_2, d_3 меньше, чем n;

(2) сумма $d_1 + d_2 + d_3$ не меньше, чем n;

(3) ни одно из чисел d_1, d_2, d_3 не делится ни на одно другое из них.

Доказать, что n делится на 30.

4. Найти все действительные числа x, при которых

$$2\sqrt{2x(1-x)} = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}.$$

5. Проведённые из разных вершин треугольника бисектрисса, высота и медиана пересекаются в одной точке. Проекция из этой точки на одну из сторон делит эту сторону пополам. Доказать, что проекция из этой точки на любую сторону делит эту сторону пополам.

6. Найти все целые положительные числа n, для которых существуют такие различные действительные числа $a_1, \ldots, a_n$, что выполняются следующие два условия:

(1) числа $a_1, \ldots, a_n$ являются n последовательными членами какой-либо арифметической прогрессии;

(2) суммы всех возможных комплектов, составленных из чисел $a_1, \ldots, a_n$, и размером по 0, 1, 2 и так далее до n штук, представляют собой 2^n последовательных членов какой-либо арифметической прогрессии, взятые в некотором порядке.

Замечание. Сумма одного числа равна этому же числу; сумму нуля чисел будем считать равной 0.

Eesti LXI matemaatikaolümpiaad

25. jaanuar 2014 Piirkonnavoor **7. klass**

I osa vastused

1. 7227.

2. $a = 4, b = 11$.

3. 200.

4. 4.

5. 61.

6. 3 asendada 9-ga.

7. 48 cm.

8. $65°$.

9. $15\ \text{cm}^2$.

10. 12.

Lahendused

1. Muutes tehete järjekorda, saame

$$1001 + (-2332 + 5445) + (-6776 + 9889) = 1001 + 3113 + 3113 = 7227.$$

2. Esitame võrduse kujul $\frac{3}{2} + \frac{5}{4} = \frac{b}{a}$ ehk $\frac{11}{4} = \frac{b}{a}$. Kuna arvud 11 ja 4 on ühistegurita, siis vähimad sobivad arvud on $a = 4$ ja $b = 11$.

3. Ühes meetris on 100 cm ning $100 : 0{,}5 = 200$.

4. Ülesandes toodud arvude ristsummad on vastavalt $13 + a + b + c$, $13 + a + b$ ja $13 + a$. Et kõik ristsummad jaguks 9-ga, peab olema $a = 5$ ning b ja c valikuks on neli võimalust: $b = c = 0$, $b = 0$ ja $c = 9$, $b = 9$ ja $c = 0$ ning $b = c = 9$.

5. Kuuekaupa õunu jagades kulub neid $6 + 5 = 11$ võrra rohkem võrreldes viiekaupa jagamisega, seega klassis on 11 õpilast. Kausis on $5 \cdot 11 + 6 = 61$ õuna.

6. Võrduse vasaku poole väärtus on 13, võrduse kehtimiseks tuleks vasaku poole väärtust vähendada 6 võrra. Korrutisi $1 \cdot 2$ ja $4 \cdot 5$ ei ole võimalik ühe numbri väljavahetamise teel vähendada 6 võrra. Samuti ei ole võimalik vähendada arvu -6, sest tulemus ei oleks enam ühekohaline. Ainsaks võimaluseks on 3 asendamine 9-ga.

7. Olgu ruudu küljepikkus x, siis suure ristküliku mõõtmed on $5x$ ja $7x$. Kuna $35x^2 = 140\ \text{cm}^2$, siis $x = 2$ cm. Suure ristküliku ümbermõõt on $2 \cdot (5x + 7x) = 24x = 48$ cm.

8. Kuna $\angle CAD = 180^\circ - 30^\circ - 75^\circ = 75^\circ$, siis $|AC| = |CD| = |AB|$ ning $\angle ABC = (180^\circ - 50^\circ) : 2 = 65^\circ$.

9. Ühe ruudu pindala on $1\ \text{cm}^2$. Tumeda osa pindala on võrdne 9 täisruudu ja 12 poolruudu pindalaga, $9 + 12 : 2 = 15$.

10. Tipp A satub tahkudele 1, 5 ja 6 ja küsitud summa on $1 + 5 + 6 = 12$.

Eesti LXI matemaatikaolümpiaad

25. jaanuar 2014 Piirkonnavoor **8. klass**

I osa vastused

1. 3.
2. 3992.
3. 40.
4. $x < -y < y < -x$.
5. 24.
6. 1.
7. 30 cm.
8. $31°$.
9. 26,4 cm^2.
10. 12.

Lahendused

1. Viime võrduse kujule $\frac{11}{4} : \frac{11}{2} = \frac{x}{6}$ ehk $\frac{1}{2} = \frac{x}{6}$, millest $x = 3$.

2. Esimesest tingimusest saame, et $a = b + 2014$. Teise tingimuse põhjal $2b + 2014 \leqslant 9999$ ehk $2b \leqslant 7985$, mistõttu b saab olla maksimaalselt 3992.

3. Olgu Donnal x säutsu, siis Celial on $4x$, Bertal $12x$ ja Annal $24x$ säutsu. Annal, Bertal ja Celial on kokku $40x$ säutsu ehk 40 korda rohkem kui Donnal.

4. Kuna $x \cdot y < 0$, siis peavad x ja y olema erimärgilised. Võrratuse $x < y$ põhjal on x negatiivne ning y positiivne. Kuna $x + y < 0$, siis $|x| > |y|$. Saadud tingimuste põhjal $x < -y < y < -x$.

5. Arvudega 5 ja 4 jaguv arv peab jaguma 20-ga. Antud piiridesse jääv vähim 20-ga jaguv arv on $220 = 11 \cdot 20$ ning suurim $680 = 34 \cdot 20$. 20-ga jaguvaid arve on $34 - 11 + 1 = 24$.

6. Võttes $a = 8$, $b = 9$, $c = 10$, on avaldise väärtuseks 1, mis on vähim positiivne täisarv.

   Märkus. Esitades avaldise nimetaja algtegurite korrutisena, saame $\frac{a \cdot b \cdot c}{2^4 \cdot 3^2 \cdot 5}$, mis peab olema täisarv. Kuna kolme järjestikuse arvu seast vaid üks jagub kolmega, siis peab üks arvudest a, b, c jaguma 9-ga, üks peab jaguma 5-ga. Tuleks vaadelda arvu 9 kordseid $9k$, mille korral arvude $9k - 2$, $9k - 1$, $9k$ $9k + 1$ ja $9k + 2$ seas oleks 5-ga jaguv arv.

7. Kuna kolmnurk BKC on nürinurkne, siis nurk $\angle C$ ei saa olla täisnurk. Järelikult $\angle ABC = 90^\circ$. Kolmnurgast ABC saame, et $\angle C = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$, kolmnurgast BKC saame, et $\angle CBK = 180^\circ - 100^\circ - 40^\circ = 40^\circ$. Tipu B juures on täisnurk, seega $\angle KBA = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$. Kolmnurgad AKB ja BKC on võrdhaarsed, mistõttu $|AC| = 2 \cdot |KB| = 30$ cm.

8. Kolmnurga ABC kolmas nurk on suurusega $\angle ACB = 180^\circ - 62^\circ - 54^\circ = 64^\circ$ ning välisnurk on suurusega $\angle CBD = 62^\circ + 64^\circ = 126^\circ$. Kuna $\angle ABE = \frac{1}{2}\angle CBD = 63^\circ$ ning $\angle BCE = \frac{1}{2}\angle ACB = 32^\circ$, siis $\angle CEB = 180^\circ - 63^\circ - 54^\circ - 32^\circ = 31^\circ$.

9. Ühe ruudu pindala on $88 \text{ cm}^2 : 40 = 2{,}2 \text{ cm}^2$. Tumeda osa pindala on võrdne 12 ruudu pindalaga, milleks on $12 \cdot 2{,}2 \text{ cm}^2 = 26{,}4 \text{ cm}^2$.

10. Tipp A satub tahkudele 1, 5 ja 6 ja küsitud summa on $1 + 5 + 6 = 12$.

Eesti LXI matemaatikaolümpiaad

25. jaanuar 2014 Piirkonnavoor **9. klass**

I osa vastused

1. 2012999.

2. 6.

3. 30.

4. 2015.

5. 17.

6. -1.

7. 14 cm.

8. 54°.

9. $(9+\pi)$ cm^2.

10. 12.

Lahendused

1. Arve on $2014(a^2+1000)-(2014a^2+1000)-1=2013\cdot 1000-1=2012999$.

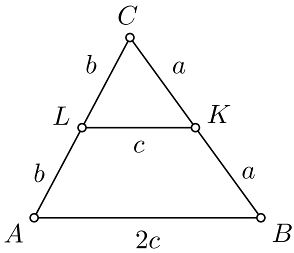
2. *Lahendus 1.* Kuna $\frac{abc}{bcd}=\frac{4}{12}$ ehk $\frac{a}{d}=\frac{1}{3}$, siis $d=3a$. Asendades selle võrdusesse $a+d=2$, saame $a=\frac{1}{2}$. Seega $abcd=\frac{1}{2}\cdot 12=6$.

Lahendus 2. Kahe esimese võrduse liitmisel saame $bc(a+d)=16$, kust kolmandat võrdust arvestades $bc=8$. Kahe esimese võrduse korrutamisel aga saame $ab^2c^2d=48$; et $bc=8$, siis $abcd=6$.

3. Hoone ruumala moodustab maketi ruumalast 2700000% ehk hoone ruumala on maketi ruumalast 27000 korda suurem. Hoone kõrgus on maketi kõrgusest $\sqrt[3]{27000}=30$ korda suurem.

4. Arvu $2^{2014}\cdot 3^{2014}$ paaritud positiivsed jagajad on $1,3,3^2,3^3,\ldots,3^{2014}$, neid on kokku 2015 tükki.

5. Esitades avaldise nimetaja algtegurite korrutisena, saame $\frac{a\cdot b\cdot c}{2^3\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7}$, mis peab olema täisarv. Kuna kolme järjestikuse arvu seast vaid üks jagub kolmega, siis peab üks arvudest a,b,c jaguma 9-ga. Arvude a,b,c seas peab olema ka 5-ga ja 7-ga jaguv arv. Vaatleme arvu 9 kordseid $9k$, mille korral arvude $9k-2$, $9k-1$, $9k$ $9k+1$ ja $9k+2$ seas oleks 5-ga ja 7-ga jaguv arv: 9 korral 10 ja 7; 27 korral 25 ja 28, kuid kumbki neist kolmikutest ei osutu kolmeks järjestikuseks arvuks; 36 korral jagub 35 nii 5-ga kui ka 7-ga. Kuna $34\cdot 35\cdot 36=2^3\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7\cdot 17$, siis jagatise väärtus on 17, mis on tõepoolest täisarv.



Joonis 1

6. Lahutame omavahel võrrandite vastavad pooled, saame $\dfrac{8}{y} + \dfrac{8}{z} = 0$, millest $y = -z$. Seega $\dfrac{y}{z} = -1$.

7. Olgu $|AB| = 2c$, $|BC| = 2a$ ja $|AC| = 2b$ (vt joonis 1), siis antud ümbermõõtude põhjal $2c + a + c + b = 38$ cm ning $2(a + b + c) = 48$ cm. Kuna $a + b + c = 48 \text{ cm} : 2 = 24$ cm, siis $|AB| = 2c = 38 \text{ cm} - 24 \text{ cm} = 14$ cm.

8. Kaarele AB toetuv kesknurk on $\dfrac{1}{10} \cdot 360^\circ = 36^\circ$, seega vastav piirdenurk on $\angle ACB = 36^\circ : 2 = 18^\circ$. Kaarele CD toetuv kesknurk on $\dfrac{1}{5} \cdot 360^\circ = 72^\circ$, seega vastav piirdenurk on $\angle CBD = 72^\circ : 2 = 36^\circ$. Nurk AKB on kolmnurga KBC välisnurk, seega $\angle AKB = \angle KCB + \angle CBK = 18^\circ + 36^\circ = 54^\circ$.

9. Ühe ruudu pindala on 1 cm^2. Tumeda osa pindala on võrdne 9 ruudu ja 4 veerandringi pindalaga. Neli veerandringi moodustab täisringi raadiusega 1 cm, seega tumedaks värvitud osa pindala on $(9 + \pi)$ cm^2.

10. Tipp A satub tahkudele 1, 5 ja 6 ja küsitud summa on $1 + 5 + 6 = 12$.

II osa lahendused

1. *Vastus:* $A = 6$, $B = 7$, $D = 1$, $E = 8$.

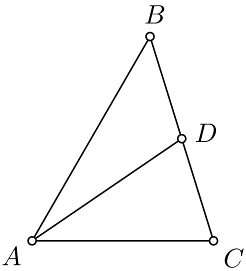
Kuna $\overline{DAB} \cdot D = \overline{DAB}$, siis $D = 1$. Et kümneliste numbriks tuleks 1, peab olema $A + 5 = 11$, millest $A = 6$. Kuna $\overline{16B} \cdot 5 = \overline{E35}$ ehk $160 \cdot 5 + B \cdot 5 = \overline{E35}$ ehk $800 + B \cdot 5 = \overline{E35}$ ning $B \cdot 5$ on ülimalt kahekohaline, siis $E = 8$ ja $B = 7$.

2. *Vastus:* 80°.

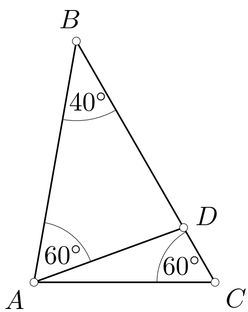
Vaatame, kus saavad paikneda nurgad suurusega 60° kolmnurkades ABD ja ACD (vt joonis 2). Kui kasvõi üks neist oleks tipu D juures, siis teises kolmnurgas oleks tipu D juures nurk 120°, mis ei laseks seal enam olla nurgal suurusega 60°. Kui mõlemad nurgad suurusega 60° oleksid tipu A juures, poleks kolmnurk teravnurkne. Kui kumbki nurk suurusega 60° poleks tipu A juures, siis oleks kolmnurga ABC kaks nurka 60° ja seal ei saaks olla nurka 40°. Järelikult ühes kolmnurgas, ütleme ABD, on 60° tipu A juures ja teises kolmnurgas siis $\angle ACD = 60^\circ$. Kuna kolmnurgas ABC ei saa nurk suurusega 40° olla enam tipu A ega C juures, siis $\angle ABC = 40^\circ$ (vt joonis 3). Järelikult $\angle BAC = 180^\circ - 60^\circ - 40^\circ = 80^\circ$.

3. *Vastus:* 6.

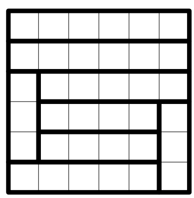
Kuna kokku on 36 ühikruutu, saab küljepikkus olla ülimalt 6. Ruut mõõtmetega 6×6 on võimalik koostada (vt joonis 4). Kui küljepikkus oleks väiksem kui 6, siis ei saaks kasutada paneele pikkusega 6. Sel juhul aga oleks



Joonis 2



Joonis 3



Joonis 4

kokku 24 ühikruutu, mis on vähem kui läheks tarvis 5×5 ruudu koostamiseks. Seega 5×5 pole võimalik. Kuid 4×4 ruudu koostamisel ei saa kasutada paneele pikkusega 5. Seega jääb järele vaid 14 ühikruutu, millest 4×4 ruudu jaoks ei piisa. Ilmselt 3×3 ruudu jaoks ei saa kasutada ka paneele pikkusega 4, kuid kahest paneelist pikkusega 3 ei saa 3×3 ruutu koostada. Seega rohkem võimalusi ei ole.

II osa lahendused

1. *Vastus:* a) ei; b) 2-aastane.

a) Kui $m = 1$ ja $n = 2$, on korrutise väärtus $1 \cdot 3 \cdot 7 = 21$. Seega võib korrutis olla ka paaritu arv.

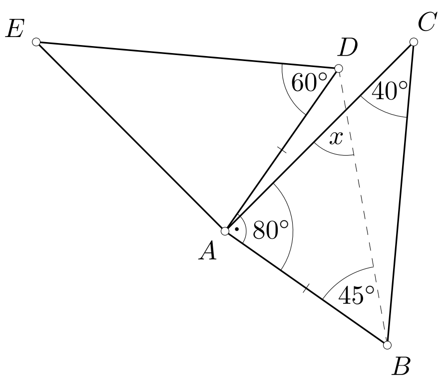
b) Pille vanust peab tähistama arv n, muidu oleks korrutise väärtus suurem kui $17^3 = 4913$. Kui $m = 0$ või $m = 1$, on korrutise väärtus vastavalt 0 või 936, kumbki neist ei sobi aastaarvuks. Kui $m = 2$, on korrutise väärtus 2014, mis sobib aastaarvuks. Kui $m > 2$, on korrutise väärtus suurem kui 2014, mis ei sobi samuti aastaarvuks. Järelikult on väikevend 2-aastane.

2. *Vastus:* 55°.

Kuna $\angle ADE = 60^\circ$, siis $\angle ABC = 60^\circ$ ja $\angle CAB = 180^\circ - 40^\circ - 60^\circ = 80^\circ$ (vt joonis 5). Kolmnurk BAD on täisnurkne võrdhaarne, seega $\angle DBA = 45^\circ$. Otsitav nurk on $x = 180^\circ - 80^\circ - 45^\circ = 55^\circ$.

3. *Vastus:* 29 km.

Kuna $|AD| \geqslant 17$ km ja $|BD| \leqslant 12$ km, siis $|AB| \geqslant 17\text{ km} - 12\text{ km} = 5$ km. Samas aga $|BK| \geqslant 3 \cdot 17\text{ km} = 51$ km, millest $|AB| = |AK| - |BK| \leqslant \leqslant 56\text{ km} - 51\text{ km} = 5$ km. Oleme näidanud, et $|AB| = 5$ km. Samuti saab näidata, et $|JK| = 5$ km, mistõttu $|BJ| = 56\text{ km} - 5\text{ km} - 5\text{ km} = 46$ km.



Joonis 5

Kuna $|GJ| \geqslant 17$ km, saame $|BG| \leqslant 46$ km $-$ 17 km $=$ 29 km. Teiselt poolt $|BG| = |AG| - |AB| \geqslant 2 \cdot 17$ km $-$ 5 km $=$ 29 km. Oleme näidanud, et $|BG| = 29$ km.

II osa lahendused

1. *Vastus:* a) $x = 10$, $y = 75$; b) 435.

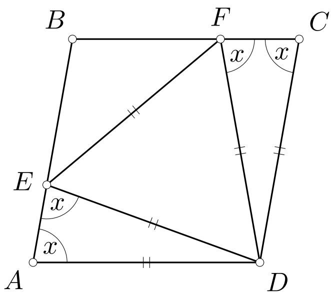
Ülesande tingimuste põhjal võime kirjutada, et $360x = a^2$ ja $360y = b^3$, kus a ja b on mingid positiivsed täisarvud.

a) Täisarvu ruudu esituses algtegurite korrutisena peavad kõigi algtegurite astendajad olema paarisarvud. Täisarvu kuubi esituses algtegurite korrutisena peavad kõigi algtegurite astendajad olema 3-ga jaguvad arvud. Kuna $6^2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot x = a^2$, siis $x = 2 \cdot 5 \cdot c^2 = 10c^2$, kus c on mingi positiivne täisarv. Kuna $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot y = b^3$, siis $y = 3 \cdot 5^2 \cdot d^3 = 75d^3$, kus d on mingi positiivne täisarv. Vähimad võimalikud x ja y väärtused on $x = 10$, $y = 75$.

b) Eelmise osa põhjal $x = 10c^2$, $y = 75d^3$, kus c ja d on mingid positiivsed täisarvud. Leiame c ja d vähimad väärtused, mille korral xy on mingi täisarvu kuup. Kuna $xy = 2 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot c^2 \cdot d^3$, siis $2 \cdot 3 \cdot c^2$ on mingi täisarvu kuup, millest vähim võimalik c väärtus on $c = 6$. Vähim võimalik d väärtus on $d = 1$. Seega $x = 10 \cdot 6^2 = 360$, $y = 75$ ja $x + y = 360 + 75 = 435$.

2. Olgu šokolaadi A hind a, šokolaadi B hind b ning šokolaadi C hind c, kusjuures a, b, c on paarikaupa erinevad. Oletame, et mingid kaks poissi ostsid šokolaadi A ühepalju. Siis kahe ülejäänud šokolaadi ostetud kogused on vahetatud, st kui esimene poiss ostis šokolaade B ja C vastavalt x tükki ja y tükki, siis teine poiss ostis neid vastavalt y tükki ja x tükki. Kahe poisi arvete vahe on $(xb + yc) - (yb + xc)$ ehk $(x - y)(b - c)$; kuna $x \neq y$ ja $b \neq c$, siis see arv on nullist erinev, st poisid maksid erineva summa. Samale tulemusele jõuame, kui ühepalju osteti šokolaadi B või šokolaadi C.

Jääb üle juht, kus ükski kaks poissi ei ostnud ühtki liiki šokolaadi ühepalju. Siis poiste arved olid kas $4a + 3b + 2c$, $4b + 3c + 2a$ ja $4c + 3a + 2b$ või $4c + 3b + 2a$, $4b + 3a + 2c$ ja $4a + 3c + 2b$; üldisust kitsendamata eeldame esimest varianti. Oletame, et poiste arved olid võrdsed. Siis $4a + 3b + 2c = 4b + 3c + 2a$ annab $a = \dfrac{b + c}{2}$ ehk a peab olema b ja c vahel, $4b + 3c + 2a = 4c + 3a + 2b$ aga annab samamoodi, et b peab olema hoopis c ja a vahel. Järelikult ei saa kõik arved võrdsed olla.



Joonis 6

3. *Vastus:* 80°, 100°, 80° ja 100°.

Tähistame $\angle BAD = \angle BCD = x$ (vt joonis 6), siis võrdhaarsetest kolmnurkadest EDA ja FDC saame $\angle EDA = \angle FDC = 180^\circ - 2x$. Kuna $\angle EDF = 60^\circ$, siis $\angle ADC = (180^\circ - 2x) + 60^\circ + (180^\circ - 2x) = 420^\circ - 4x$. Kuna rombi lähisnurkade summa on 180°, siis $420^\circ - 4x + x = 180^\circ$, millest $3x = 240^\circ$ ehk $x = 80^\circ$. Rombi nurgad on 80°, 100°, 80° ja 100°.

4. Märgime, et iga arvu teisendus on vähemalt 3-kohaline. Ülimalt 18-kohalise arvu teisendus on ülimalt 5-kohaline, sest ei ole võimalik, et 18-kohalises arvus on kahekohalise arvu jagu paaris ning kahekohalise arvu jagu paarituid numbreid. Kui esimene teisendus tekitab 5-kohalise arvu, siis teise teisendusega tekib üks järgmistest arvudest: 550, 541, 532, 523, 514, 505. Kõigi nende arvude teisendus on 312, mille teisendus on tema ise. Kui esimene teisendus tekitab 3-kohalise arvu, siis järgmise teisendusega tekib üks arvudest 330, 321, 312, 303 ning kõigi nende teisendus on 312.

Kui esimese teisendusega tekib 4-kohaline arv, siis selle tuhandeliste number on kindlasti 1. Kui sajaliste number on paarisarv, siis peab kümneliste ja üheliste paarsus olema sama. Seega teise teisenduse käigus saab tekkida arv 413 või 431, mõlema teisendus on 312. Kui sajaliste number on paaritu arv, siis kümneliste ja üheliste paarsus peab olema erinev. Seega teise teisenduse käigus saab tekkida vaid arv 413, mille teisendus on 312.

Lahendused

1. *Vastus:* $x = 0$.

Läbi korrutades ning mõlemad murrud ühele poole võrdusmärki viies saame võrrandi kujul

$$\frac{1 + (x + x^2) + x^3}{1 - (x + x^2) + x^3} - \frac{1 + (x + x^2)}{1 - (x + x^2)} = 0.$$

Laiendades esimest murdu avaldisega $1 - (x + x^2)$, teist murdu avaldisega $1 - (x + x^2) + x^3$ ning kasutades ruutude vahe valemit, saame

$$\frac{1 - (x + x^2)^2 + x^3 (1 - (x + x^2)) - \left(1 - (x + x^2)^2\right) - x^3 (1 + (x + x^2))}{(1 - (x + x^2) + x^3) (1 - (x + x^2))} = 0.$$

Koondades lugejas vastandavaldised, jõuame esialgsega samaväärse võrrandini

$$\frac{-2x^3 (x + x^2)}{(1 - (x + x^2) + x^3) (1 - (x + x^2))} = 0.$$

Leiame lugeja nullkohad, selleks lahendame võrrandi $-2x^3 (x + x^2) = 0$ ehk $x^4(1 + x) = 0$. Nullkohtadeks on $x = 0$ ja $x = -1$, kusjuures $x = 0$ sobib esialgse võrrandi lahendiks, kuid $x = -1$ on võõrlahend.

2. *Vastus:* 1,12 dm × 2 dm.

Olgu sepa valmistatud plaat mõõtmetega $a \times b$. Et algse plaadi ümbermõõt on $2 \cdot (1\text{ dm} + 1{,}6\text{ dm})$ ehk 5,2 dm ja pindala 1,6 dm^2, siis uue plaadi ümbermõõt on $1{,}2 \cdot 5{,}2$ dm ehk 6,24 dm ja pindala $1{,}4 \cdot 1{,}6$ dm^2 ehk 2,24 dm^2. Saame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} 2(a + b) &= 6{,}24\text{ dm}, \\ ab &= 2{,}24\text{ dm}^2. \end{cases}$$

Avaldades esimesest võrrandist $b = 3{,}12\text{ dm} - a$ ning asendades selle teise võrrandisse, saame ruutvõrrandi

$$a^2 - 3{,}12\text{ dm} \cdot a + 2{,}24\text{ dm}^2 = 0,$$

millest $a = 1{,}56\text{ dm} \pm \sqrt{0{,}1936}\text{ dm} = 1{,}56\text{ dm} \pm 0{,}44\text{ dm}$. Süsteemi üks lahend on $a = 1{,}56\text{ dm} + 0{,}44\text{ dm} = 2\text{ dm}$, $b = 3{,}12\text{ dm} - 2\text{ dm} = 1{,}12\text{ dm}$. Teine lahend on sama, aga vahetatud väärtustega. Seega plaadi mõõtmed on $1{,}12\text{ dm} \times 2\text{ dm}$.

3. *Vastus:* 70, 140 ja 280.

Vastavalt ülesande tingimustele jagub $14n$ arvuga 20 ehk $2 \cdot 7 \cdot n$ jagub arvuga $2^2 \cdot 5$, millest saame, et n jagub arvuga $2 \cdot 5$. Lisaks jagub $20n$ arvuga 14 ehk $2^2 \cdot 5 \cdot n$ jagub arvuga $2 \cdot 7$, mille tõttu n jagub arvuga 7. Seega n jagub arvuga $2 \cdot 5 \cdot 7$. Kuna aga $20 \cdot 14 = 2^3 \cdot 5 \cdot 7$ jagub arvuga n, saab arvul n olla kolm väärtust $2 \cdot 5 \cdot 7$, $2^2 \cdot 5 \cdot 7$ ja $2^3 \cdot 5 \cdot 7$.

4. *Vastus:* -1 ja 8.

Lahendus 1. Liites antud võrduse igale poolele 1, saame

$$\frac{x+y+z}{z} = \frac{x+y+z}{x} = \frac{x+y+z}{y}.$$

See võrdus saab kehtida kahel juhul:

- kui $x+y+z=0$, siis $x+y=-z$, $y+z=-x$ ja $z+x=-y$ ning avaldise väärtuseks on $\dfrac{-z(-x)(-y)}{xyz} = -1$;
- kui $x=y=z$, siis avaldise väärtus on $\dfrac{2x \cdot 2x \cdot 2x}{x^3} = 8$.

Lahendus 2. Teisendades esimest võrdust $\dfrac{x+y}{z} = \dfrac{y+z}{x}$, saame $y(z-x) = x^2 - z^2$ ehk $y(z-x) = (x-z)(x+z)$, mis annab kaks võimalust: $z = x$ või $x+y+z=0$. Teisendades teist võrdust $\dfrac{y+z}{x} = \dfrac{z+x}{y}$, saame analoogiliselt $x = y$ või $x+y+z=0$. Näeme, et kui $x+y+z \neq 0$, siis peavad kehtima nii $z = x$ kui ka $x = y$, kust kokkuvõttes $x = y = z$. Nii jõuame samade juhtudeni nagu lahenduses 1 ja võime jätkata nagu seal.

5. *Vastus:* 90°, 45° ja 45°.

Olgu need alused a ja b ning neile vastavad kõrgused h_a ja h_b. Ülesande tingimuste kohaselt $a \leqslant h_a$ ja $b \leqslant h_b$. Kuna kõrgus on lühim tee tipust vastasküljeni, siis samast tipust lähtuvad kolmnurga küljed ei ole lühemad kui vastav kõrgus, seega $h_a \leqslant b$ ja $h_b \leqslant a$. Oleme saanud, et $a \leqslant h_a \leqslant b \leqslant h_b \leqslant a$. Seega $a = b = h_a = h_b$ ning see kolmnurk on võrdhaarne ja täisnurkne.

6. *Vastus:* 55.

Lahendus 1. Vaatleme juhte sõltuvalt punaste kommide jagamisest.

- Kui jagada punased kommid nii, et esimene laps saab 3 kommi, siis on siniste kommide jagamiseks 3 võimalust: $1, 1, 1$ või $0, 1, 2$ või $0, 2, 1$. Samamoodi on siis, kui teine või kolmas laps saab 3 punast kommi. Kokku on 9 võimalust.
- Kui jagada punased kommid $2, 1, 0$, siis on siniste jagamiseks 6 võimalust: $1, 1, 1$ või $2, 0, 1$ või $0, 2, 1$ või $1, 0, 2$ või $0, 1, 2$ või $0, 0, 3$. Selleks, et jagada punaseid komme samades suhetes, kuid teises järjekorras, on meil 6 võimalust: $2, 0, 1$ või $1, 2, 0$ või $0, 2, 1$ või $1, 0, 2$ või $0, 1, 2$. Kokku on meil $6 \cdot 6 = 36$ võimalust.
- Kui jagada punaseid komme $1, 1, 1$, siis võib siniseid komme jagada suvaliselt, kokku on 10 võimalust: $3, 0, 0$ või $2, 1, 0$ või $2, 0, 1$ või $1, 2, 0$ või $1, 1, 1$ või $1, 0, 2$ või $0, 3, 0$ või $0, 2, 1$ või $0, 1, 2$ või $0, 0, 3$.

Kokku on meil $9 + 36 + 10 = 55$ võimalust.

Lahendus 2. Et 3 kommi jagamiseks 3 lapse vahel on kokku 10 võimalust, siis 3 punase ja 3 sinise kommi jagamiseks on 100 võimalust. Siit tuleb maha lahutada juhud, kus mõni laps ei saanud ühtegi kommi. Kui esimene laps ei saanud ühtegi kommi, siis teiste vahel 3 kommi jagamiseks on 4 võimalust: $1, 2$ või $2, 1$ või $0, 3$ või $3, 0$, mõlemate kommide jagamiseks seega 16 võimalust. Sama kehtib siis, kui teine või kolmas laps ei saanud ühtegi kommi, seega kokku on 48 võimalust. Nüüd oleme aga topelt üle lugenud juhud, kus 2 last ei saanud ühtegi kommi, ehk need juhud, kus üks laps sai endale kõik kommid, kokku 3 võimalust. Seega kokku on $100 - 48 + 3 = 55$ võimalust.

Lahendused

1. *Vastus:* $n\pi$ ja $\frac{\pi}{2} - (-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi$, kus n on suvaline täisarv.

Lahendus 1. Korrutades pooled suurusega $\cos x$, saame seose

$$\tan x - \sin x = \sin x,$$

mis on samaväärne võrrandiga $\tan x - 2\sin x = 0$. Võttes $\sin x$ sulgude ette, saame samaväärse võrrandi

$$\sin x\left(\frac{1}{\cos x} - 2\right) = 0.$$

Juht $\sin x = 0$ annab lahendid $x = n\pi$, kus n on suvaline täisarv. Teine juht annab $\frac{1}{\cos x} = 2$ ehk $\cos x = \frac{1}{2}$, kust saame ülejäänud vastuses toodud lahendid. Kõik leitud lahendid x rahuldavad ka esialgset võrrandit, sest nende puhul $\cos x \neq 0$.

Lahendus 2. Korrutades pooled suurusega $\cos^2 x$, saame seose

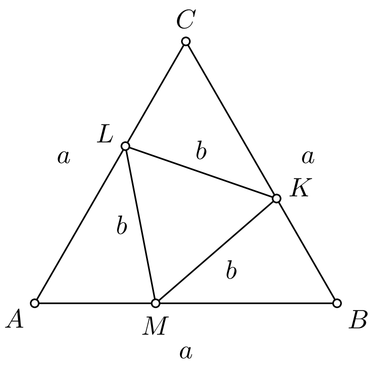
$$\sin x - \sin x \cos x = \sin x \cos x,$$

kust liikmete ühele poole viimisel tekib võrdus $\sin x - 2\sin x \cos x = 0$ ehk $\sin x - \sin 2x = 0$. Siinuste vahe valemist $\sin x - \sin 2x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2}$, seega kas $\sin\frac{x}{2} = 0$ või $\cos\frac{3x}{2} = 0$. Esimesel juhul $\frac{x}{2} = n\pi$ ehk $x = 2n\pi$. Teisel juhul $\frac{3x}{2} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$ ehk $3x = (2n+1)\pi$ ehk $x = \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}n\pi$. Kõik saadud lahendid rahuldavad ka esialgset võrrandit.

2. *Vastus:* $\sqrt[3]{\frac{5}{3}}$.

Lahendus 1. Arvude $\sqrt[7]{3}$ ja $\sqrt[3]{\frac{5}{3}}$ suurusvahekord on sama mis arvudel 3^3 ja $\left(\frac{5}{3}\right)^7$. Viimane arv esitub kujul $\frac{5^7}{3^7}$, mistõttu antud arvude suurusvahekord on sama mis arvudel 3^{10} ja 5^7. Kuna

$$5^7 = 125 \cdot 125 \cdot 5 > 125 \cdot 125 \cdot 4 = 250 \cdot 250 > 243 \cdot 243 = 3^{10},$$



Joonis 7

siis $\sqrt[3]{\frac{5}{3}}$ on suurem kui $\sqrt[7]{3}$.

Lahendus 2. Samuti nagu lahenduses 1 saame, et antud arvude suurusvahekord on sama mis arvudel 3^{10} ja 5^7. Kuna $3^{10} = 59049$ ja $5^7 = 78125$, siis $\sqrt[3]{\frac{5}{3}}$ on suurem kui $\sqrt[7]{3}$.

3. 18 järjestikuse arvu hulgas leidub alati üks, mis jagub 18-ga. Kuna 18-ga jaguva arvu numbrite summa peab jaguma 9-ga ning arv ise on ülimalt 3-kohaline, saab numbrite summa olla kas 9, 18 või 27. Esimesel kahel juhul jagub arv oma numbrite summaga. Numbrite summa 27 ei ole võimalik, sest 999 ei jagu 18-ga.

Märkus. Väide ei kehti 17 järjestikuse arvu korral – näiteks arvudest $973, \ldots, 989$ ükski ei jagu oma numbrite summaga.

4. *Vastus:* $n = 2, 3, \ldots, 2014$.

Juhul $n = 1$ ilmselt sellist x_1 ei leidu.

Liites antud kaks võrdust, saame $x_1 + \frac{1}{x_1} + x_2 + \frac{1}{x_2} + \cdots + x_n + \frac{1}{x_n} = 4028$.

Kuna $x + \frac{1}{x} \geqslant 2$ iga $x > 0$ korral, siis ilmselt $n > 2014$ korral selliseid arve ei leidu. Kui $2 \leqslant n \leqslant 2014$, siis võime valida $x_1 = \ldots = x_{n-2} = 1$ ning $x_{n-1} = y$, $x_n = \frac{1}{y}$, kus $y + \frac{1}{y} = 2014 - (n-2)$. Selline y alati leidub, sest võrrandi $y^2 - (2014 - n + 2)y + 1 = 0$ diskriminant $(2014 - n + 2)^2 - 4$ on $n \leqslant 2014$ tõttu mittenegatiivne. Lisaks on y kindlasti positiivne, sest y ja $\frac{1}{y}$ on samamärgilised ning $2014 - (n-2) > 0$.

5. *Lahendus 1.* Sümmeetria tõttu on ka kolmnurk KLM võrdkülgne. Tähistame kolmnurkade ABC ja KLM küljepikkusi vastavalt a ja b (vt joonis 7). Siis $S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ ja $S_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}b^2$, kust $S_2 = \frac{1}{3}(S - S_1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(a^2 - b^2\right) = \frac{\sqrt{3}}{12}\left(a^2 - b^2\right)$, ning $P = 3a$, $P_1 = 3b$ ja $|LA| + |AM| = a$ tõttu $P_2 = a + b$. Seega

$$\begin{aligned} \frac{S}{P} &= \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}a^2}{3a} = \frac{\sqrt{3}}{12}a, \\ \frac{S_1}{P_1} &= \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}b^2}{3b} = \frac{\sqrt{3}}{12}b, \\ \frac{S_2}{P_2} &= \frac{\frac{\sqrt{3}}{12}(a^2 - b^2)}{a + b} = \frac{\sqrt{3}}{12}(a - b), \end{aligned}$$

kust vajalik võrdus järeldubki.

Lahendus 2 (Joonas Kalda). Et $|BK| = |CL| = |AM|$ ja kolmnurk ABC on võrdkülgne, siis ka $|CK| = |AL| = |BM|$. Niisiis on kolmnurgad ALM, BMK ja CKL tunnuse KNK põhjal võrdsed. Seega on ka kolmnurk KLM võrdkülgne ehk sarnane kolmnurgaga ABC. Olgu sarnasustegur k, nii et $P = kP_1$ ja $S = k^2 S_1$. Paneme veel tähele, et $S - S_1 = 3S_2$ ja $P + P_1 = 3P_2$, mistõttu $\frac{S_2}{P_2} = \frac{S - S_1}{P + P_1}$. Nüüd

$$\begin{aligned} \frac{S_1}{P_1} + \frac{S_2}{P_2} &= \frac{S_1}{P_1} + \frac{S - S_1}{P + P_1} = \frac{S_1}{P_1} + \frac{(k^2 - 1)S_1}{(k + 1)P_1} = \\ &= \frac{S_1}{P_1} + (k - 1)\frac{S_1}{P_1} = k\frac{S_1}{P_1} = \frac{k^2 S_1}{kP_1} = \frac{S}{P}. \end{aligned}$$

Märkus. Ülesandes tõestatav võrdus on tegelikult samaväärne võrdusega $r_1 + r_2 = r$, kus r, r_1 ja r_2 on vastavalt kolmnurkade ABC, KLM ja ALM siseringjoonte raadiused (sest kehtib võrdus $S = pr$, kus $2p = P$).

6. *Vastus:* a) ei, b) ei.

Lahendus 1. Vaatleme kahe esimese hunniku kivide arvu vahet. Algseisus on see -1. Ühel sammul see kas jääb samaks või muutub 3 võrra. Seega kahe esimese hunnniku kivide arvu vahe ei saa kunagi olla 0 või mõni muu 3-ga jaguv arv. Osa a) lõppseisus peaks kivide arvude vahe olema 0, osa b) lõppseisus kas 0 või $\pm 3 \cdot 2013$. Kumbagi lõppseisu ei saa tekkida.

Lahendus 2. Ühel sammul saab kahe hunniku kivide arvude vahe kas 3 võrra muutuda või jääda samaks. Seega iga kahe hunniku kivide arvude vahe jääk 3-ga jagamisel jääb kogu protsessi jooksul samaks. Kuna alguses on kõigi hunnikute kivide arvude jäägid erinevad, siis on nii ka suvalise lõpliku arvu sammude järel. Seega pole võimalik olukord, kus kasvõi kahes hunnikus oleks võrdne arv kive, nagu ülesande mõlema osa oodatav lõppseis eeldab.

Lahendus 3. a) Näitame, et seisu, kus kõigis kuhjades on 2013 kivi, pole võimalik saavutada isegi siis, kui kivide arv võiks vahepeal negatiivseks minna. Oletame väitevastaselt, et mingi lõpliku arvu sammudega on võimalik saada kõigisse kuhjadesse 2013 kivi. Vaatleme lühimat sellist sammude jada.

Nummerdame kuhjad nii, et esimeses kuhjas on algul 2012 kivi, teises 2013 ja kolmandas 2014. Oletame, et mingil sammul võetakse kolmandast kuhjast kaks kivi ära. Lõpptulemust muutmata saame sammude järjekorda muuta nii, et see samm tehakse esimesena. Kuid selle sammu järel on kuhjades kivide arvud samad nagu algul. Kuhjade rolle vahetades saame ülejäänud sammudest koostada jada, mis lahendab algse ülesande ühe võrra väiksema arvu sammudega. Vastuolu sammude jada valikuga näitab, et kolmandast kuhjast ei võeta ühelgi sammul kaht kivi. Samamoodi näeme, et esimesse kuhja ei panda kunagi kaht kivi juurde.

Kuna kolmandast kuhjast on vaja kive vähemaks saada, on vaja ühte ülejäänutest mingil sammul kaks kivi juurde panna. Et see ei saa olla esimene kuhi, siis peab see olema teine. Kuna esimesesse kuhja on vaja kive juurde saada, on vaja ühest ülejäänutest mingil sammul kaks kivi eemaldada. Et see ei saa olla kolmas kuhi, siis peab seegi olema teine. Kuid nüüd on meil kaks sammu, millest üks lisab teise kuhja kaks kivi ja teine eemaldab samast kaks kivi — nende sammude ärajätmine lõpptulemust ei muuda. See on vastuolus vaadeldava sammude jada valikuga.

b) Oletame, et kõik kivid on võimalik ühte kuhja saada. Tõstes seejärel sellest kuhjast 2013 korda kaks kivi ülejäänud kuhjadesse, saame seisu, kus kõigis kuhjades on võrdselt kive. Vastavalt a)-osa tulemusele aga pole see võimalik. Järelikult pole võimalik ka kõiki kive ühte kuhja saada.

Lahendused

1. *Vastus:* 2475.

Tarvis on leida summa

$$\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{5}+\frac{3}{5}+\frac{4}{5}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{100}+\ldots+\frac{99}{100}\right).$$

Murde nimetajaga n on selles summas $n-1$ tükki ning

$$\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\ldots+\frac{n-1}{n}=\frac{1}{n}(1+2+\ldots+(n-1))=\frac{1}{n}\cdot\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n-1}{2}.$$

Otsitav summa on

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{2}+\frac{3}{2}+\frac{4}{2}+\ldots+\frac{99}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{100\cdot 99}{2}=2475.$$

2. *Vastus:* $x=\sqrt[2013]{2014}$.

Lahendus 1. Kuna $x>0$, siis võrdusest $\left(x^{2014}\right)^x=(2014x)^x$ järeldub, et $x^{2014}=2014x$. Jagades mõlemad pooled x-ga läbi, saame $x^{2013}=2014$ ehk $x=\sqrt[2013]{2014}$.

Lahendus 2. Võttes logaritmi, saame, et

$$2014x\ln x = x\ln(2014x).$$

Jagades x-ga läbi, saame

$$2014\ln x=\ln(2014x)$$

ehk

$$2014\ln x=\ln 2014+\ln x,$$

millest järeldub võrdus

$$2013\ln x=\ln 2014.$$

Nüüd aga

$$\ln x=\frac{1}{2013}\ln 2014$$

ehk

$$\ln x=\ln\sqrt[2013]{2014},$$

millest $x=\sqrt[2013]{2014}$.

3. *Lahendus 1.* Tingimusest (3) järeldub, et arvud d_1, d_2, d_3 on paarikaupa erinevad. Sümmeetria tõttu võime eeldada, et $d_1 > d_2 > d_3$, kusjuures tingimus (1) annab $d_1 \leqslant \frac{n}{2}$. Tingimuse (2) põhjal $n \leqslant d_1 + d_2 + d_3 < 3d_1$, millest $d_1 > \frac{n}{3}$, seega $d_1 = \frac{n}{2}$. Asendades saadud väärtuse tingimusse (2), saame $n \leqslant \frac{n}{2} + d_2 + d_3 < \frac{n}{2} + 2d_2$, seega $d_2 > \frac{n}{4}$ ning ainus võimalus on, et $d_2 = \frac{n}{3}$. Teguri d_3 kohta saame tingimuse (2) põhjal võrratuse $n \leqslant \frac{n}{2} + \frac{n}{3} + d_3$, millest $d_3 \geqslant \frac{n}{6}$. Kuid tingimus (3) välistab võimalused $d_3 = \frac{n}{4}$ ja $d_3 = \frac{n}{6}$, sest nende arvudega $\frac{n}{2}$ jagub. Järelikult on ainus võimalus $d_3 = \frac{n}{5}$. Siit aga näeme, et n jagub nii 2-ga, 3-ga kui ka 5-ga, mis tähendab, et n jagub 30-ga.

Lahendus 2. Üldisust kitsendamata eeldame, et $d_1 > d_2 > d_3$ (võrdused ei ole lubatud tingimuse (3) tõttu). Tähistame $a_1 = \frac{n}{d_1}$, $a_2 = \frac{n}{d_2}$, $a_3 = \frac{n}{d_3}$, siis $a_1 < a_2 < a_3$, kusjuures $a_1 \geqslant 2$, $a_2 \geqslant 3$. Kuna $\frac{d_1}{d_2} = \frac{a_2}{a_1}$, siis tingimusest (3) järeldub, et a_1 ei tohi olla a_2 teguriks, samamoodi saame, et a_1 ei tohi olla a_3 teguriks ja a_2 ei tohi olla a_3 teguriks. Vaatlemegi edasi arvukolmikuid, mis rahuldavad a-de jaoks tuletatud tingimusi.

Ütleme, et arvukolmik (x_1, x_2, x_3) on suurem kui (y_1, y_2, y_3), kui $x_1 \geqslant y_1$, $x_2 \geqslant y_2$, $x_3 \geqslant y_3$ ning vähemalt üks neist võrratustest on range võrratus. On selge, et sellisel juhul iga n korral

$$\frac{n}{x_1} + \frac{n}{x_2} + \frac{n}{x_3} < \frac{n}{y_1} + \frac{n}{y_2} + \frac{n}{y_3}.$$

Eelnevalt defineeritud suuruse järgi ei ole kõik arvukolmikud omavahel võrreldavad, kuid mittejaguvuse tingimusi arvestades on kolmik $(2, 3, 5)$ kõige väiksem (st kõik teised on temast suuremad), kuna $(2, 3, 4)$ korral 4 jagub 2-ga. Järgmisena vaatleme kolmikuid $(2, 3, 7)$ ja $(3, 4, 5)$. Kuna

$$\frac{n}{2} + \frac{n}{3} + \frac{n}{7} = \frac{41n}{42} < n, \qquad \frac{n}{3} + \frac{n}{4} + \frac{n}{5} = \frac{47n}{60} < n,$$

siis tingimuse (2) tõttu ei saa need kolmikud ja ka nendest suuremad kolmikud olla arvu n teguritele vastavateks arvudeks a_1, a_2 ja a_3. Veendume, et iga seni vaatlemata eelpool toodud tingimustele vastav kolmik on suurem vähemalt ühest neist kolmikutest. Nimelt, kui esimene arv on vähemalt 3, siis kasvamise tingimusest järeldub, et see kolmik on suurem $(3, 4, 5)$-st. Kui esimene arv on aga 2 ja kolmas arv ei ole 5 (st kolmik ei ole $(2, 3, 5)$), siis peab kolmas arv kahega mittejaguvuse tingimuse tõttu olema vähemalt 7 ning kasvamise tingimuse kohaselt on see kolmik siis suurem

$(2,3,7)$-st. Seega ei saa ükski kolmik peale $(2,3,5)$ vastata ülesande tingimustega kooskõlas olevatele teguritele, st peab kehtima, et $d_1 = \frac{n}{2}$, $d_2 = \frac{n}{3}$ ja $d_3 = \frac{n}{5}$. Et aga tegurid on täisarvud, jagub n arvudega 2, 3 ja 5 ning seega ka nende vähima ühiskorsega, milleks on 30.

4. *Vastus:* $x = \frac{1}{2}$.

Lahendus 1. Poolte ruututõstmisel ja lihtsustamisel saame

$$8x(1-x) = 1 + 2\sqrt{x(1-x)}.$$

Tähistades $z = \sqrt{x(1-x)}$, saame võrrandi esitada kujul $8z^2 = 1+2z$. Ruutvõrrandi $8z^2 - 2z - 1 = 0$ lahendamisel saame $z = \frac{2 \pm \sqrt{4+32}}{16} = \frac{1 \pm 3}{8}$. Kuna $z \geqslant 0$, jääb ainsana võimalus $z = \frac{1+3}{8} = \frac{1}{2}$. Seega tuleb lahendada võrrand $\sqrt{x(1-x)} = \frac{1}{2}$, mis on samaväärne ruutvõrrandiga $x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$ ehk võrrandiga $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$. Selle ainus lahend on $x = \frac{1}{2}$, mis rahuldab ka algset võrrandit.

Lahendus 2. Samuti nagu lahenduses 1 teisendame võrrandi kujule $8x(1-x) = 1 + 2\sqrt{x(1-x)}$. See on samaväärne võrdusega $8x - 8x^2 - 1 = 2\sqrt{x - x^2}$, kust ruututõstmise ja liikmete korrastamise järel tekib neljanda astme võrrand

$$64x^4 - 128x^3 + 84x^2 - 20x + 1 = 0.$$

Vasak pool tegurdub kujule $(2x-1)^2\left(16x^2 - 16x + 1\right)$; esimesest tegurist saame ühe sobiva lahendi $x = \frac{1}{2}$. Teise ruutkolmliikme nullkohad on $\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{4}$; sümmeetria tõttu piisab kontrollida ühte. Algse võrrandi vasak pool tuleb $2\sqrt{2\left(\frac{1}{4} - \frac{3}{16}\right)}$ ehk $\sqrt{\frac{1}{2}}$. Kuna aga $\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}} > 0$ ja $\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}} > \sqrt{\frac{1}{2}}$, tuleb parem pool vasakust suurem, st tegu on võõrlahendiga.

Lahendus 3. Märkame, et $x = \frac{1}{2}$ rahuldab võrrandit. Eeldame seetõttu järgnevas, et $x \neq \frac{1}{2}$, mistõttu $x \neq 1 - x$. Viime võrrandi samaväärsele kujule $\sqrt{2}\sqrt{x(1-x)} = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{1-x}}{2}$; et aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vahelisest võrratusest $\frac{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}}{2} > \sqrt{\sqrt{x}\sqrt{1-x}} = \sqrt[4]{x(1-x)}$, siis $\sqrt{2}\sqrt{x(1-x)} > \sqrt[4]{x(1-x)}$, kust parema poolega läbi jagades saame $\sqrt{2}\sqrt[4]{x(1-x)} > 1$ ning ruutu tõstes $2\sqrt{x(1-x)} > 1$. Teiselt poolt aga annab aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vaheline võrratus $\sqrt{x(1-x)} <$ $< \frac{x+(1-x)}{2} = \frac{1}{2}$, millest $2\sqrt{x(1-x)} < 1$. Vastuolu näitab, et rohkem lahendeid ei ole.

5. Lõikugu nurgapoolitaja AD, kõrgus BE ning mediaan CF punktis L (vt joonis 8). Piisab näidata, et kolmnurk ABC on võrdkülgne. Siis on iga kõrgus ja mediaan ka keskristsirge ning lõikepunkt L on keskristsirgete lõikepunkt. Ilmselgelt iga antud punktist tõmmatud projektsioon poolitab vastava külje.

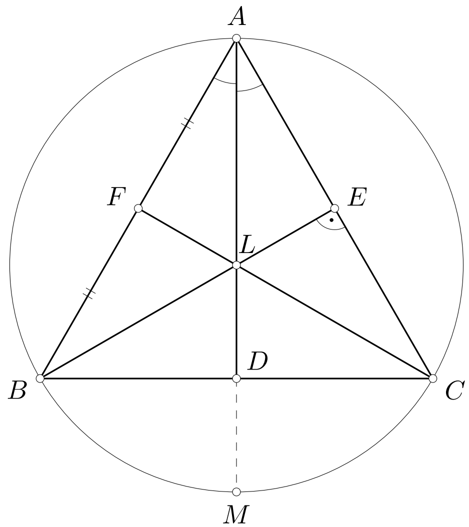
On kolm juhtu.

- Projektsioon tehakse küljele, millele langeb mediaan, st küljele AB. Kuna projektsioonisirgel ja mediaanil on kaks ühist punkti – külje keskpunkt F ja algne lõikepunkt L – on mediaan ka kõrgus ning $|AC| =$ $= |CB|$. Kuna L on kõrguste lõikepunkt, osutub ka nurgapoolitaja AD kõrguseks, mistõttu $|BA| = |AC|$.
- Projektsioon tehakse küljele, millele langeb kõrgus, st küljele AC. Sel juhul on see kõrgus ka mediaan ning $|CB| = |BA|$. Kuna L on mediaanide lõikepunkt, osutub ka nurgapoolitaja AD mediaaniks. Kui ühest tipust tõmmatud nurgapoolitaja ja mediaan ühtivad, on tegemist võrdhaarse kolmnurgaga, seega $|BA| = |AC|$.
- Projektsioon tehakse küljele, millele langeb nurgapoolitaja, st küljele BC. See projektsioonisirge on vastava külje keskristsirge. Näitame, et keskristsirge ja nurgapoolitaja on samad sirged. Selleks piisab tähele panna, et kumbki läbib punkti M, mis asub kolmnurga ABC ümberringjoonel kaare BC keskpunktis. Seega on nurgapoolitaja ka kõrgus ning $|BA| = |AC|$. Kuna L on kõrguste lõikepunkt, osutub ka mediaan CF kõrguseks, mistõttu $|AC| = |CB|$.

6. *Vastus:* 1, 2, 3.

Juhul $n = 1$ on tingimused rahuldatud. Juhul $n = 2$ sobib võtta näiteks $a_1 = 1$, $a_2 = 2$; siis 0-, 1- ja 2-kaupa summad on 0, 1, 2 ja $1+2$ ehk 3, mis on järjestikused täisarvud ja moodustavad aritmeetilise jada vahega 1. Juhul $n = 3$ sobib võtta näiteks $a_1 = -2$, $a_2 = 1$, $a_3 = 4$, mis moodustavad aritmeetilise jada vahega 3. Siis 0-, 1-, 2- ja 3-kaupa summad on 0, -2, 1, 4, $-2+1$ ehk -1, $-2+4$ ehk 2, $1+4$ ehk 5 ning $-2+1+4$ ehk 3. Jällegi on tegu järjestikuste täisarvudega (-2-st 5-ni).

Oletame, et $a_1, \ldots, a_n$ moodustavad aritmeetilise jada, kusjuures $n \geqslant 4$. Siis $a_1 + a_4 = a_2 + a_3$, st leiduvad kaks 2-kaupa summat, mis on võrdsed. Kuna need kaks summat on mingi aritmeetilise jada liikmed erinevatelt kohtadelt, siis selle jada vahe on 0 ehk kõik jada elemendid on võrdsed.



Joonis 8

Muuhulgas peavad ka kõik 1-kaupa summad ehk arvud $a_1, \ldots, a_n$ olema võrdsed. See on vastuolus ülesande tingimustega.

Eesti LXI matemaatikaolümpiaad

25. jaanuar 2014 Piirkonnavoor **Hindamisjuhised**

Lp hindaja!

Käesolevas esitame kõigepealt hindamise üldised põhimõtted ning seejärel järjekorras konkreetsed hindamisjuhised iga ülesande kohta eraldi.

1. Õpilase lahenduseks tuleb esmajoones lugeda see, mida õpilane on ülesande kohta vormistanud puhtandina (sh mustandipaberile selgesti arusaadavalt kirja pandud mõttekäigud, kui need on ametlikult puhtandipaberilt viidatud). Töö mustandi arvestamine või mittearvestamine ülesande lahenduse hulka on hindaja otsustada (või piirkonna hindamiskomisjoni ühine otsus kõigi ülesannete suhtes), kuid see peab toimuma kõigis töödes ühtmoodi.

2. Alljärgnevas on 7.–9. klassi olümpiaadi I osa (testi) ning kõikide ülejäänud ülesannete hindamisjuhised esitatud erinevalt.

   Testi iga küsimuse jaoks on eraldi loetletud või kirjeldatud vastused, mille eest tuleks anda vastavalt kaks punkti või üks punkt (st vastavaid punkte ühe küsimuse piires *ei tule* liita). Testiülesannete lahendusi õpilased ei pea esitama, vaid kirjutavad ülesannete lehel vastavale punktiirile või ülesande tekstis viidatud kohta ainult vastuse.

   Seevastu kõigi teiste ülesannete kohta tuleb esitada täielikud lahendused, ainult vastustest ei piisa. Nende ülesannete lahendused on hindamisjuhistes jaotatud võimalust mööda osadeks (etappideks) ning on näidatud iga osa eest antav punktide arv (st ühe ülesande eest antava punktisumma saamiseks *tuleb* lahenduse erinevate osade eest antud punktid liita).

   Mõnes skeemis on mõne etapi kirjelduse all („*Sealhulgas:*“ järel) alapunktidena välja toodud konkreetse etapi väiksemate osade eest antavad punktid – need lähevad käiku juhul, kui lahenduse see etapp on ebatäielik või vigane ja selle osa täispunkte seetõttu ei saa anda. Alamosade punktid tuleb omavahel samuti liita.

3. Žürii lahendustes ja käesolevates hindamisjuhistes on ülesannete vastused esitatud enamasti ainult ühel, lihtsaimal või kõige tõenäolisemalt esineval kujul. Hindamisel (sh testid!) tuleb võrdselt õigeks lugeda ka sama vastuse teised mõistlikud esitusviisid – sh taandatud hariliku murruna, segaarvuna, kümnendmurruna, sõnadega välja kirjutatuna –, seejuures ka osana pikemalt (nt täislausega, koos sobiva liigisõnaga või koos selgitustega) antud

vastusest. Juhud, kus ülesande sisu tingib erandeid sellest üldreeglist, on eraldi mainitud vastava ülesande hindamisjuhises.

Ühik arvu järel on vastuses vajalik juhul, kui ülesandes on küsitud suurust, mis teatud ühikutes avaldub. Näiteks küsimusele „Kui suur pindala …?“ saab õige vastus olla „120 cm^2“, kuid mitte „120“ (kui ülesande tekstis pole kasutatud ühikuta pikkusi/pindalasid). Teistes ühikutes väljendatud sama suurus tuleb lugeda õigeks, näiteks vastused „120 cm^2“ ja „1,2 dm^2“ on samaväärsed. Ühik vastuses ei ole nõutav, kui ülesandes on küsitud kindlate ühikute arvu. Näiteks küsimusele „Mitu ruutsentimeetrit …?“ antud vastused „120“ ja „120 cm^2“ tuleb võrdväärseks lugeda samal alusel nagu küsimusele „Mitu karu …?“ antud vastused „3“ ja „3 karu“ (vastus koos liigisõnaga). Teistes ühikutes antud vastus tuleb aga lugeda valeks, vastused „120 cm^2“ ja „1,2 dm^2“ ei ole siin samaväärsed.

4. Mõnede ülesannete kohta, mida saab lahendada mitmel oluliselt erineval viisil, anname eraldi hindamisskeemid erinevate lahendusviiside jaoks. Rõhutame, et iga konkreetset mittetäielikku lahendust tuleb hinnata ainult *ühe* sellise skeemi järgi (selle järgi, mille kohaselt ta saaks kõige rohkem punkte).

5. Enamiku ülesannete korral (v.a testid ja tõestusülesanded) on hindamisjuhiste lõpus eraldi näidatud, mitu punkti anda ainult õige vastuse eest. See hinne on mõeldud juhuks, kui töös on ülesande kohta toodud ainult õige vastus või õige vastus koos mõttekäiguga, mis ei annaks skeemi järgi rohkem punkte kui on ette nähtud õige vastuse eest.

6. Kahtlemata esineb õpilaste töödes ka mõttekäike, mis ei mahu meie poolt pakutud skeemidesse. Selliste lahenduste hindamisel tuleb lähtuda sellest, *kui suur osa* antud ülesandest on õpilasel lahendatud, kasutades lahenduse üksikute osade kaalu määramisel võimaluse korral võrdluseks punktide jaotust meie pakutud hindamisskeemides.

7. *Millise tahes* täieliku ja matemaatiliselt korrektse lahenduse eest tuleb igal juhul anda maksimumpunktid, sõltumata selle lahenduse pikkusest või otstarbekusest võrreldes teiste lahendusviisidega.

I osa hindamisjuhised

1.	◦ Antud õige vastus 7227:	2 p
2.	◦ Antud õiged arvud 4 ja 11 õiges järjestuses:	2 p
	◦ Antud õiged arvud vales järjestuses:	0 p
3.	◦ Antud õige vastus 200:	2 p
	◦ Antud vastuseks 200 koos pikkusühiku või muu vale ühikuga:	1 p
4.	◦ Antud õige vastus 4:	2 p
5.	◦ Antud õige vastus 61:	2 p
6.	◦ Antud õiged arvud 3 ja 9 õiges järjestuses:	2 p
7.	◦ Antud õige vastus 48 cm:	2 p
	◦ Antud vastuseks 48 ilma ühikuta või vale ühikuga:	1 p
8.	◦ Antud õige vastus 65°:	2 p
	◦ Antud vastuseks 65 ilma ühikuta või vale ühikuga:	1 p
9.	◦ Antud õige vastus 15 cm^2:	2 p
	◦ Antud vastuseks 15 ilma ühikuta või vale ühikuga:	1 p
10.	◦ Antud õige vastus 12:	2 p

I osa hindamisjuhised

1.	∘ Antud õige vastus 3:	2 p
2.	∘ Antud õige vastus 3992:	2 p
3.	∘ Antud õige vastus 40:	2 p
4.	∘ Antud õige järjestus $x < -y < y < -x$:	2 p
5.	∘ Antud õige vastus 24:	2 p
6.	∘ Antud õige vastus 1:	2 p
7.	∘ Antud õige vastus 30 cm:	2 p
	∘ Antud vastuseks 30 ilma ühikuta või vale ühikuga:	1 p
8.	∘ Antud õige vastus 31°:	2 p
	∘ Antud vastuseks 31 ilma ühikuta või vale ühikuga:	1 p
9.	∘ Antud õige vastus 26,4 cm^2:	2 p
	∘ Antud vastuseks 26,4 ilma ühikuta või vale ühikuga:	1 p
10.	∘ Antud õige vastus 12:	2 p

Eesti LXI matemaatikaolümpiaad

25. jaanuar 2014 Piirkonnavoor **9. klass**

I osa hindamisjuhised

1.
- Antud õige vastus 2012999: 2 p

2.
- Antud õige vastus 6: 2 p

3.
- Antud õige vastus 30: 2 p

4.
- Antud õige vastus 2015: 2 p

5.
- Antud õige vastus 17: 2 p

6.
- Antud õige vastus -1: 2 p

7.
- Antud õige vastus 14 cm: 2 p
- Antud vastuseks 14 ilma ühikuta või vale ühikuga: 1 p

8.
- Antud õige vastus 54°: 2 p
- Antud vastuseks 54 ilma ühikuta või vale ühikuga: 1 p

9.
- Antud õige vastus $(9+\pi)\ \mathrm{cm}^2$: 2 p
- Antud vastuseks $9+\pi$ ilma ühikuta või vale ühikuga: 1 p
- Antud vastuseks 12,14 või täpsem ligikaudne väärtus õige ühikuga või ilma ühikuta: 1 p

Sulgude puudumise eest avaldises $(9+\pi)\ \mathrm{cm}^2$ punkte mitte alandada.

10.
- Antud õige vastus 12: 2 p

Eesti LXI matemaatikaolümpiaad

25. jaanuar 2014 Piirkonnavoor **7. klass**

II osa hindamisjuhised

1.
- Põhjendatud, et $D = 1$: 2 p
- Põhjendatud, et $A = 6$: 1 p
- Põhjendatud, et $E = 8$ või $B = 7$: 2 p
- Koos põhjendusega leitud viimane puuduv number: 2 p

Täieliku õige vastuse eest (A, B, D, E väärtused õigesti muutujatega seotud või õiged numbrid sisse asendatud korrutamistehtesse) ilma selgitusteta anda 2 punkti.

2.
- Põhjendatud, et kumbki nurk suurusega 60° ei saa olla tipu D juures: 2 p
- Märgatud, et nurgad suurusega 60° ei saa olla mõlemad tipu A juures: 1 p
- Põhjendatud, et üks nurk suurusega 60° peab olema tipu A juures: 2 p
- Õigesti paigutatud nurk suurusega 40°: 1 p
- Leitud $\angle BAC = 80^\circ$: 1 p

Õige vastuse 80° eest ilma selgitusteta anda 2 punkti, ühiku puudumisel või vale ühiku korral 1 punkt.

3.
- Leitud ühikruutude koguarv 36: 1 p
- Põhjendatud, et $n \leqslant 6$: 1 p
- Sobiv konstruktsioon $n = 6$ jaoks esitatud: 2 p
- Põhjendatud, et $n = 5$ pole võimalik: 1 p
- Põhjendatud, et $n = 4$ pole võimalik: 1 p
- Põhjendatud, et $n = 3$ pole võimalik: 1 p

Õige vastuse (ainult 6) eest ilma selgitusteta anda 2 punkti.

Eesti LXI matemaatikaolümpiaad

25. jaanuar 2014 — Piirkonnavoor — **8. klass**

II osa hindamisjuhised

1.
- a-osa (toodud näide positiivsetest täisarvudest m ja n, mille korral $m(m+n)(m+3n)$ on paaritu): 2 p
- b-osa: 5 p

  Sealhulgas:
  - Põhjendatud, et n on Pille vanus: *2 p*
  - Näidatud, et $m = 2$ sobib: *1 p*
  - Põhjendatud, et $m > 2$ ei sobi: *1 p*
  - Põhjendatud, et $m < 2$ ei sobi: *1 p*

a-osa õige vastuse ei eest ilma selgitusteta anda 0 punkti, b-osa õige vastuse 2 eest ilma selgitusteta anda 2 punkti.

2.
- Märgatud, et $\angle ABC = 60^\circ$: 1 p
- Leitud, et $\angle CAB = 80^\circ$: 1 p
- Märgitud, et ABD on täisnurkne võrdhaarne kolmnurk: 2 p

  Sealhulgas:
  - Esitatud võrdus $|AB| = |AD|$: *1 p*
  - Esitatud võrdus $\angle BAD = 90^\circ$: *1 p*
- Leitud, et $\angle DBA = 45^\circ$: 1 p
- Leitud, et $x = 55^\circ$: 2 p

Õige vastuse 55° eest ilma selgitusteta anda 2 punkti, ühiku puudumisel või vale ühiku korral 1 punkt.

3.
- Põhjendatud, et $|AB| \geqslant 5$ km või et $|JK| \geqslant 5$ km: 1 p
- Põhjendatud, et $|AB| \leqslant 5$ km või et $|JK| \leqslant 5$ km: 1 p
- Järeldatud üks võrdustest $|AB| = 5$ km ja $|JK| = 5$ km: 1 p
- Järeldatud teine võrdustest $|AB| = 5$ km ja $|JK| = 5$ km: 1 p
- Põhjendatud, et $|BG| \leqslant 29$ km: 1 p
- Põhjendatud, et $|BG| \geqslant 29$ km: 1 p
- Järeldatud, et $|BG| = 29$ km: 1 p

Skeemi kolmanda ja neljanda rea alusel anda punkt ainult siis, kui ülemine ja alumine tõke on leitud ühe ja sama jupi (kas $|AB|$ või $|JK|$) jaoks.

Õige vastuse 29 km eest ilma selgitusteta anda 2 punkti, ühiku puudumisel või vale ühiku korral 1 punkt.

II osa hindamisjuhised

1.
- a-osa: 3 p

  Sealhulgas:
  - Arv 360 esitatud algarvude astmete korrutisena või täisruudu ja üksikute algarvude korrutisena sarnaselt žürii lahendusele: *1 p*
  - Põhjendatud, et vähim x on 10: *1 p*
  - Põhjendatud, et vähim y on 75: *1 p*
- b-osa: 4 p

  Sealhulgas:
  - Leitud $x = 10c^2$ ja $y = 75d^3$ (žürii materjalis on see a-osa lahenduse koosseisus): *1 p*
  - Esitatud arv xy kujul $6c^2 \cdot 5^3 \cdot d^3$ või sarnasel kujul, kus täiskuubid on eraldatud: *1 p*
  - Põhjendatud, et vähim c on 6 ja vähim d on 1: *1 p*
  - Leitud $x + y$: *1 p*

Kummagi osa täieliku õige vastuse eest ilma selgitusteta anda 1 punkt.

2.
- Ammendavalt vaadeldud juht, kus mingid kaks poissi ostsid mingit šokolaadi ühepalju: 4 p
- Ammendavalt vaadeldud juht, kus ükski kaks poissi ei ostnud ühtki šokolaadi ühepalju: 3 p

3.
- Avaldatud $\angle ADE$ või $\angle CDF$ rombi nurga kaudu: 1 p
- Mainitud, et $\angle EDF = 60^\circ$: 1 p
- Avaldatud rombi teise nurga suurus kui täiend 180°-ni: 1 p
- Avaldatud rombi teise nurga suurus ülesande andmetest: 1 p
- Koostatud lineaarvõrrand rombi nurga leidmiseks: 1 p
- Saadud võrrand lahendatud: 1 p
- Leitud rombi nurgad: 1 p

Õige vastuse 80° ja 100° eest (piisab kummagi suuruse ühekordsest esitamisest) ilma selgitusteta anda 1 punkt.

4.
- Põhjendatud, et algse arvu teisendus on ülimalt 5-kohaline: 1 p

- Märgitud, et teisendus on vähemalt 3-kohaline: 1 p
- Vaadatud ammendavalt läbi juht, kus algse arvu teisendus on 5-kohaline: 1 p
- Vaadatud ammendavalt läbi juht, kus algse arvu teisendus on 3-kohaline: 1 p
- Vaadatud ammendavalt läbi juht, kus algse arvu teisendus on 4-kohaline: 3 p

Hindamisjuhised

1.
- Korrektsete teisendustega jõutud võrrandini $-2x^3(x + x^2) = 0$ või võrrandini $\dfrac{-2x^3(x + x^2)}{\left(1 - (x + x^2) + x^3\right)\left(1 - (x + x^2)\right)} = 0$ vms: 3 p
- Leitud lahend $x = 0$: 1 p
- Leitud lahend $x = -1$: 1 p
- Veendutud, et $x = 0$ on algse võrrandi lahend (piisab väitest): 1 p
- Märgitud, et $x = -1$ on võõrlahend: 1 p

Neljanda rea eest anda punkt ka juhul, kui õpilane paneb $x = 0$ mitte algsesse, vaid tuletatud võrrandisse, ja selgitab, miks sellest järeldub ka sobivus algsesse võrrandisse. Selle selgituse puudumisel punkti mitte anda.

Õige vastuse 0 eest ilma selgitusteta anda 1 punkt; kui lisaks on vastuses toodud võõrlahend, siis anda 0 punkti.

2.
- Leitud tehasest tuleva plaadi ümbermõõt ja pindala: 1 p
- Õigesti arvutatud sepa valmistatud plaadi ümbermõõt: 1 p
- Õigesti arvutatud sepa valmistatud plaadi pindala: 1 p
- Koostatud õige võrrandisüsteem sepa valmistatud plaadi mõõtmete leidmiseks: 1 p
- Jõutud õige ruutvõrrandini ühe mõõtme suhtes: 1 p
- Leitud ruutvõrrandi mõlemad lahendid: 1 p
- Jõutud õige lõppvastuseni: 1 p

Kuuenda rea (ruutvõrrandi lahendid) eest anda punkt ka juhul, kui on leitud vaid üks lahend ja selgitatud, et sümmeetria tõttu võib teise kõrvale jätta.

Täieliku õige vastuse 1,12 dm × 2 dm (või vastupidises järjestuses mõõtmed) eest ilma selgitusteta anda 1 punkt. Punkt anda ka siis, kui vastus on muidu õige, aga esimese mõõtme juurest on ühik puudu. Ainult ühe õige mõõtme korral või ühikute täielikul puudumisel või valede ühikute korral anda 0 punkti.

3.
- Põhjendatud, et n jagub 10-ga: 2 p
- Põhjendatud, et n jagub 7-ga: 2 p
- Järeldatud, et n jagub 70-ga: 1 p

- Koos põhjendusega leitud sobivad arvud: 2 p

Täieliku õige vastuse (kõik kolm arvu) eest ilma selgitusteta anda 1 punkt. Kui kasvõi üks arv on puudu või vale, siis anda 0 punkti.

4. *Lahendus arvu* 1 *liitmise kaudu (žürii lahendus 1).*

- Viidud võrdused kujule $\frac{x+y+z}{x} = \frac{x+y+z}{y} = \frac{x+y+z}{z}$: 3 p
- Tuvastatud, et need võrdused saavad kehtida parajasti juhtudel $x + y + z = 0$ ja $x = y = z$: 2 p
- Põhjendatud, et juhul $x + y + z = 0$ võrdub nõutud korrutis arvuga -1: 1 p
- Põhjendatud, et juhul $x = y = z$ võrdub nõutud korrutis arvuga 8: 1 p

Kui juht $x + y + z = 0$ on kahe silma vahele jäetud, siis anda teise rea eest 1 punkt (seega kokku tuleb maksimaalselt 5 punkti, sest ka kolmanda rea eest läheb punkt kaduma).

Lahendus võrduste ükshaaval analüüsimisega (žürii lahendus 2).

- Ühe võrduse analüüsiga tuvastatud, et kehtib kas $x + y + z = 0$ või kahe muutuja võrdus: 2 p
- Teisest võrdusest tuletatud analoogiline järeldus: 1 p
- Kokkuvõttes järeldatud, et $x + y + z = 0$ või $x = y = z$: 2 p
- Põhjendatud, et juhul $x + y + z = 0$ võrdub nõutud korrutis arvuga -1: 1 p
- Põhjendatud, et juhul $x = y = z$ võrdub nõutud korrutis arvuga 8: 1 p

Kui võrduste analüüsil on variandid $x = z$, $x = y$, $y = z$ kahe silma vahele jäetud (nt vahega taandades), siis anda esimese rea eest 1 punkt ning kolmanda ja viienda rea eest 0 punkti (seega kui muu on olemas, siis kokku 3 punkti).

Täieliku õige vastuse (mõlemad arvud) eest ilma selgitusteta anda 1 punkt. Kui kasvõi üks arv on puudu või vale, siis anda 0 punkti.

5.

- Põhjendatud üks võrratustest $h_a \leqslant b$ ja $h_b \leqslant a$ (žürii lahenduse terminites): 2 p
- Põhjendatud ka teine: 1 p
- Järeldatud, et $a = h_a = b = h_b = a$: 2 p
- Järeldatud, et kolmnurk on võrdhaarne täisnurkne: 1 p
- Antud õige lõppvastus: 1 p

Täieliku õige vastuse (kolm nurka) eest ilma selgitusteta anda 1 punkt. Punkt anda ka siis, kui vastuseks on antud ainult kaks õiget nurka. Kui kasvõi üks nurk on vale, siis anda 0 punkti.

6. *Lahendus punaste kommide jagamisviiside läbivaatusega (žürii lahendus 1).*

- Ammendavalt analüüsitud juht, kus üks laps saab 3 punast kommi: 2 p
- Ammendavalt analüüsitud juht, kus üks laps saab 2 punast kommi: 2 p
- Ammendavalt analüüsitud juht, kus punased kommid on jagatud võrdselt: 2 p
- Leitud võimaluste koguarv: 1 p

Lahendus elimineerimisega (žürii lahendus 2).

- Leitud kolme punase ja kolme sinise kommi kõigi jagamisviiside arv: 2 p
- Leitud nende jagamisviiside arv, kus üks konkreetne (nt esimene) laps jääb ilma: 2 p
- Leitud nende jagamisviiside arv, kus kaks last jäävad ilma: 1 p
- Leitud võimaluste koguarv: 2 p

Kui võimaluste arvu on arvutatud tehtega $100 - 3 \cdot 16$ ja jäetud tähele panemata, et juhud, kus kaks last jäävad ilma, on elimineeritud topelt, siis anda viimase rea eest 1 punkt (seega kokku ilmselt 5 punkti, sest selline õpilane tõenäoliselt ei saa punkti ka eelviimase rea eest).

Õige vastuse 55 eest ilma selgitusteta anda 1 punkt.

Eesti LXI matemaatikaolümpiaad

25. jaanuar 2014 Piirkonnavoor **11. klass**

Hindamisjuhised

1.
- Saadud võrrand $\tan x - 2\sin x = 0$ või võrrand $\tan x = 2\sin x$: 1 p
- Teisendatud võrrand edasi kujule $\sin x\left(\dfrac{1}{\cos x} - 2\right) = 0$ või kujule $\tan x\,(1 - 2\cos x) = 0$: 1 p
- Esimese teguri võrdumisest nulliga saadud lahendite pere $n\pi$: 1 p
- Teise teguri võrdumisest nulliga saadud seos $\cos x = \dfrac{1}{2}$: 1 p
- Leitud lahendid kujul $\dfrac{\pi}{3} + 2n\pi$: 1 p
- Leitud lahendid kujul $-\dfrac{\pi}{3} + 2n\pi$: 1 p
- Kontrollitud kõigi lahendite sobivus (piisab põhjendamisest asjaoluga, et $\cos x \neq 0$): 1 p

Skeemi viimase rea eest anda punkt ainult siis, kui kõik kolm lahendiperet on leitud. Seega kui üks lahendipere on puudu, siis saab kokku tulla maksimaalselt 5 punkti; kui kaks puudu, siis maksimaalselt 4 punkti.

Täieliku õige vastuse (kõik variandid kas žürii lahenduse juures toodud kahel kujul või kolme kujuna $n\pi$, $\dfrac{\pi}{3} + 2n\pi$ ja $-\dfrac{\pi}{3} + 2n\pi$) eest ilma selgitusteta anda 1 punkt.

2.
- Märgitud, et antud arvude suurusvahekord on sama mis arvudel 3^3 ja $\left(\dfrac{5}{3}\right)^7$: 3 p
- Märgitud, et antud arvude suurusvahekord on sama mis arvudel 3^{10} ja 5^7: 1 p
- Võrreldud õigesti arvud 3^{10} ja 5^7: 2 p
- Tehtud õige lõppjäreldus: 1 p

Õige vastuse $\sqrt[3]{\dfrac{5}{3}}$ eest ilma selgitusteta anda 1 punkt.

3.
- Mainitud, et 18 järjestikuse arvu seas leidub 18-ga jaguv arv (või 9-ga jaguv paarisarv): 2 p
- Märgitud, et selle arvu numbrite summa jagub 9-ga: 1 p
- Kasutades suuruspiirangut, leitud võimalikud numbrite summad 9, 18 ja 27: 1 p

- Põhjendatud, et 27 ei realiseeru: 1 p
- Leitud, et ülejäänud kahel juhul arv jagub numbrite summaga: 2 p

4.
- Põhjendatud, et $n > 2014$ korral nõutud arve ei leidu: 3 p

  Sealhulgas:
  - Antud võrdused omavahel õigesti liidetud: *1 p*
  - Liidetud omavahel võrratused $x_i + \dfrac{1}{x_i} \geqslant 2,\ i = 1, \ldots, n$: *1 p*
- Toodud õige konstruktsioon iga $n = 2, 3, \ldots, 2014$ jaoks koos põhjendusega: 4 p

Žürii lahendusega sarnase konstruktsiooni korral võtta skeemi viimase rea eest 1 punkt maha, kui puudub arvu y leidumise põhjendus.

Kui on toodud õige konstruktsioon ainult $n = 2$ jaoks, siis anda skeemi viimase rea eest 2 punkti (ebapiisavate põhjenduste korral 1 punkt). Kui on toodud õige konstruktsioon ainult $n = 2014$ jaoks, siis anda skeemi viimase rea eest 1 punkt. Mitme n, kuid mitte kõigi n-de jaoks sobivate konstruktsioonide eest kokku anda maksimaalselt 2 punkti.

Juhu $n = 1$ läbi vaatamata jätmise eest punkte mitte maha võtta.

Täieliku õige vastuse (kõik arvud 2-st 2014-ni) eest ilma selgitusteta anda 1 punkt.

5.
- Avaldatud ühe võrdkülgse kolmnurga pindala ja ümbermõõt: 1 p
- Avaldatud teise võrdkülgse kolmnurga pindala ja ümbermõõt: 1 p
- Avaldatud kolmnurga ALM pindala kahe suuruse kaudu (žürii lahenduses a ja b): 1 p
- Avaldatud kolmnurga ALM ümbermõõt samade suuruste kaudu: 1 p
- Tuletatud vajalik võrdus: 3 p

  Sealhulgas:
  - Avaldatud mõlema võrdkülgse kolmnurga pindala ja ümbermõõdu suhe lihtsal kujul: *1 p*
  - Avaldatud kolmnurga ALM pindala ja ümbermõõdu suhe lihtsal kujul: *1 p*

Skeemis nõutud kujude lihtsuse üle otsustada selle järgi, kui vahetu on lõpus nendest vajalikku võrdust tuletada. Kui see nõuab mahukat arvutust, siis viimase rea alamskeemi mitte arvestada, vaid jagada 3 punkti selle järgi, kui suur osa vajalikust tööst nõutud võrduseni jõudmisel on tehtud.

6.
- Sõnastatud mõte vaadata kahe hunniku kivide arvude vahet või seda ideed kasutatud: 1 p
- Ammendavalt analüüsitud, kuidas valitud kahe hunniku kivide arvu vahe muutub lubatud sammude käigus: 1 p

- Järeldatud, et vaadeldav vahe ei saa kunagi jaguda 3-ga: 2 p
- Antud a-osale eitav vastus: 1 p
- Märgitud, et b-osas küsitud olukorras on vaadeldav vahe kas 0 või $\pm 3 \cdot 2013$: 1 p
- Antud b-osale eitav vastus: 1 p

Kummagi osa õige vastuse eest ilma selgitusteta anda 0 punkti.

Hindamisjuhised

1.
- Rühmitatud liidetavad murrud ühesuguse nimetaja järgi: 1 p
- Rühmasiseselt murrud õigesti liidetud: 3 p
- Arvutatud kogusumma: 3 p

Skeemi teise rea alusel anda 3 punkti ainult juhul, kui on liidetud suvalise rühma liikmed. Kui on liidetud vaid mõnede väikeste rühmade liikmed, siis anda 0 punkti, mõne suure konkreetse rühma liikmete (nt $\frac{1}{100}$ kuni $\frac{99}{100}$) korrektse liitmise eest anda 1 punkt.

Õige vastuse 2475 eest ilma selgitusteta anda 1 punkt.

2.
- Võetud mõlemast poolest x-s juur: 3 p
- Saadud võrduse pooled jagatud x-ga: 2 p
- Jõutud lõppvastuseni: 2 p

Kui on lahendatud logaritmimisega (vt žürii lahendus 2), siis hinnata lahenduse algusosa, milles figureerivad logaritmid, 1 punkti võrra madalamalt võrreldes sellega, kui palju annaks vastava osa eest siin toodud skeem. Näiteks kui jõutud on võrduseni $2014 \ln x = \ln(2014x)$, siis anda 2 punkti, sest sellele vastab ilma logaritmimiseta lahenduses seos $x^{2014} = 2014x$, mille eest on ette nähtud 3 punkti. Korrektse logaritmidest vabanemise eest anda puuduv 1 punkt ning lahenduse lõpuosa hinnata siin toodud skeemi alusel. Pelgalt logaritmi võtmise eest lahenduse algul anda 0 punkti.

Õige vastuse $\sqrt[2013]{2014}$ eest ilma selgitusteta anda 1 punkt.

3.
- Põhjendatud võrdus $d_1 = \frac{n}{2}$, kus $d_1 > d_2 > d_3$: 2 p
- Põhjendatud võrdus $d_2 = \frac{n}{3}$: 2 p
- Põhjendatud võrdus $d_3 = \frac{n}{5}$: 2 p
- Järeldatud, et n jagub 30-ga: 1 p

Kui võrduste põhjendamisel on vaid proovitud suuruselt järgmist võimalikku murdu (nt $d_1 = \frac{n}{2}$ põhjendamisel murdu $\frac{n}{3}$) ja pole midagi öeldud selle kohta, mis juhtuks veelgi väiksemate murdude korral, siis anda kogu lahenduse eest kokku maksimaalselt 5 punkti. Poolikutes lahendustes arvestada üks karistuspunkt skeemi esimese ja teine teise rea koosseisu (nt kui esimese võrduse põhjendamisel on see puudus ja teist võrdust polegi, siis võtta maha 1 punkt, mitte 2 punkti).

4. *Lahendus muutujavahetusega (žürii lahendus 1).*

- Jõutud võrduseni $8x(1-x) = 1 + 2\sqrt{x(1-x)}$: 1 p
- Tehtud muutujavahetus $z = \sqrt{x(1-x)}$ või vaadeldud saadud võrdust ruutvõrrandina $\sqrt{x(1-x)}$ suhtes: 2 p
- Leitud ruutvõrrandi lahendid: 1 p
- Mainitud, et negatiivne lahend ei sobi: 1 p
- Leitud lahend $x = \frac{1}{2}$: 1 p
- Kontrollitud, et $x = \frac{1}{2}$ rahuldab algset võrrandit (piisab mainimisest): 1 p

Lahendus tegurdamisega (žürii lahendus 2).

- Jõutud võrduseni $8x(1-x) = 1 + 2\sqrt{x(1-x)}$: 1 p
- Jõutud võrduseni $64x^4 - 128x^3 + 84x^2 - 20x + 1 = 0$: 1 p
- Vasakus pooles eraldatud tegur $(2x-1)^2$: 2 p
- Kontrollitud, et $x = \frac{1}{2}$ rahuldab algset võrrandit (piisab mainimisest): 1 p
- Leitud võrrandi $16x^2 - 16x + 1 = 0$ lahendid: 1 p
- Tuvastatud, et need algset võrrandit ei rahulda: 1 p

Kui polünoomile $64x^4 - 128x^3 + 84x^2 - 20x + 1$ on leitud vaid üks tegur $2x - 1$, siis anda kolmanda rea eest 1 punkt.

Lahendus keskmiste vahelise võrratusega (žürii lahendus 3).

- Kontrollitud, et $x = \frac{1}{2}$ rahuldab võrrandit (piisab mainimisest): 1 p
- Kasutatud aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vahelist võrratust $\sqrt{x}$ ja $\sqrt{1-x}$ jaoks: 1 p
- Põhjendatud, et $2\sqrt{x(1-x)} > 1$ või et $\sqrt{2}\sqrt[4]{x(1-x)} > 1$: 2 p
- Kasutatud aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vahelist võrratust x ja $1-x$ jaoks: 1 p
- Järeldatud, et $2\sqrt{x(1-x)} < 1$: 1 p
- Vastupidistest võrratustest lähtuvalt põhjendatud, et rohkem lahendeid ei ole: 1 p

Õige vastuse $\frac{1}{2}$ eest ilma selgitusteta anda 1 punkt.

5.
- Näidatud, et kui projektsioon tehakse küljele AB, siis on kolmnurk võrdkülgne: 2 p
- Näidatud, et kui projektsioon tehakse küljele AC, siis on kolmnurk võrdkülgne: 2 p

- Näidatud, et kui projektsioon tehakse küljele BC, siis on kolmnurk võrdkülgne: 2 p
- Tehtud lõppjäreldus: 1 p

Skeemi viimase rea alusel anda punkt ka siis, kui ülesande väide on taandatud kolmnurga võrdkülgsusele (nagu žürii lahenduse alguses), kuid võrdkülgsust pole ühelgi juhul tõestatud.

6.

- Mainitud, et $n = 1$ sobib: 1 p
- Toodud sobiv näide $n = 2$ korral: 1 p
- Toodud sobiv näide $n = 3$ korral: 2 p
- Tõestatud, et $n \geqslant 4$ korral nõutud arve ei leidu: 3 p

Skeemi neljanda rea järgi anda maksimaalselt 2 punkti, kui $n \geqslant 4$ asemel on käsitletud vaid juhtu $n = 4$.

Täieliku õige vastuse eest (kõik kolm arvu) ilma selgitusteta anda 1 punkt. Punkt anda ka siis, kui vastuseks on antud vaid 2 ja 3. Muudel juhtudel anda 0 punkti.

Kokkuvõtteks

Piirkonnavoor osutus sel aastal tervikuna tavatult raskeks. Kõigis klassides kujunes lõppvooru pääsemise lävi madalamaks kui eelmisel aastal. Tuleb märkida, et žüriile oli see üsnagi üllatav. Ühe põhjuse, mis meie süül võistluse raskeks muutis, oskame siinkohal välja tuua: nii mõnedki ülesanded osutusid halvasti sõnastatuks või eeldasid koolis läbimata teemasid. Sellised ülesanded olid järgmised.

- 11. klassi 1. ülesanne eeldas materjali, mida uue õppekava järgi õpitakse paljudes koolides alles 11. klassi lõpus.
- 12. klassi 1. ülesanne kasutas mõistet "lihtmurd", mis tekitas paraja segaduse. See mõiste on eestikeelses koolimatemaatikakirjanduses mitmeti defineeritud. Õpikutes nõutakse lihtmurru lugeja ja nimetaja kohta naturaalarvulisust ja nii oli mõeldud ka ülesandes. Kuid osutus, et leksikonides lubatakse ka negatiivset lugejat ja nimetajat, kusjuures lihtmurru lugeja peab olema nimetajast väiksem absoluutväärtuselt. Rida õpilasi oligi vaadelnud ka negatiivseid murde, mis muudab ülesande matemaatiliselt ebakorrektseks. Nende mõttekäikudega midagi mõistlikku saada polnud võimalik. Tegu on väga kahetsusväärse juhtumiga.
- 10. klassi 6. ülesandest saadi massiliselt valesti aru, sest tekstis puudus täpsustus, milliseid kommide jaotusviise loetakse samaks ja milliseid erinevateks. See, mis elukogenud matemaatikule on kõige loomulikum, tihti ei olnud seda kooliõpilasele.
- Ka 12. klassi 6. ülesande mõttest ei saanud paljud õpilased aru. Sõnastasime seda materjale koostades küll korduvalt ümber (eriti vene keeles), kuid paistab, et selline püstitus on tavalisele piirkonnavooru osavõtjale juba iseenesest kõrgem pilotaaž.

Eriti rasketeks ülesanneteks, mille eest vaid üksikud said üleparandamisel maksimumilähedasi punkte, osutusid 8. klassi 3., 11. klassi 4. ning 12. klassi 3., 5. ja 6. ülesanne. Tavatult raskeks osutus ka 9. klassi test. Paistab, et ega me ei hakkagi oskama piirkonnavoorus raskust täpselt doseerida. Seeeest olid selle aasta piirkonnavooru ülesanded tavalisest huvitavamad. Nooremad õpilased, kes ihkavad eelseisvatel raskematel võistlustel esimesteks tulla, võivad treenida selle aasta piirkonnavooru 12. klassi ülesannete peal — see võib olla väga kasulik!

Sel aastal vaatasid üleriigilise žürii 8. ja 10.–12. klassi parandajad läbi kõigis töödes kõik ülesanded. 7. ja 9. klassi parandajad vaatasid läbi kõik ülesanded nende õpilaste töödes, kes kutsutakse huvipäevale/lõppvooru; mitte keegi, kelle töös mõni ülesanne on jäänud läbi vaatamata, ei pääseks huvipäevale/lõppvooru ka siis, kui ta kõigi läbi vaatamata jäänud ülesannete eest saaks maksimumpunktid. Läbi vaatamata jäänud ülesanded on eristatud oranži taustavärviga.

Kontrollijate kommentaarid (Reimo Palm, Mart Abel)

Test

Testi oli seekord väga hästi hinnatud. Vaid ühes töös tuli punkte muuta. Tüüpiliseks veaks oli testi 6. ülesandes see, et lahendajad ei teinud vahet numbritel ja arvudel, lugedes näiteks -4 numbriks ja saades nii korrektse tehte 2 asendamisel arvuga -4.

Ülesanne 1

Ülesande tekstist ei olnud kusagilt võimalik välja lugeda eeldust, et otsitavate tähtede seas ei ole numbreid 3 ja 5, ometi olid mitmed lahendajad selle lisaeelduse teinud. Antud lisaeelduse sissetoomise eest tuli 1 punkt maha võtta.

Ülesanne 2

Selle ülesande hindamisjuhistes oli väike vastuolu: ühelt poolt oli hindamisskeemis ette nähtud 60° suurusega nurkade ärapaigutamise eest anda 5 punkti ning ülejäänud osa, sh lõppvastuse leidmise eest siis 2 punkti, teiselt poolt aga palja vastuse andmise eest samuti 2 punkti. Seetõttu ühtlustati lahendused, kus lisaks õigele vastusele sooritati veel ka mõni tipu D juures asuvat nurka puudutav arvutus, 3 punkti peale. Tüüpiliselt oli sellistes lahendustes 60° ja 40° suurusega nurkade asukoht eeldatud, mitte ülesande andmetest tuletatud.

Ülesanne 3

See ülesanne oli üldiselt hästi parandatud, muudatused olid enamikus ühtlustamised 1 punkti piirides.

Kontrollijate kommentaarid (Laur Tooming, Ivo Adermann)

Test

Testis olid kõige paremini lahendatud ülesanded 1-3, 7, 9 ja 10. Ülesandes 8 eksis mitu õpilast 1 kraadiga, ilmselt arvutusvea tõttu. Piirkondades antud punkte tuli muuta vaid kahel korral, kus õpilase viga oli parandajale jäänud märkamata.

Ülesanne 1

Ülesande b-osas oli küllaltki vähe täislahendusi. Enamasti poldud üldse põhjendatud, miks just n peab Pille vanust tähistama ning mõnedes piirkondades anti 2 punkti lihtsalt selle mainimise eest. Veel levinum eksimus oli lahenduse lõpetamine, kui avastati, et $m = 2$ ja $n = 17$ korral tuleb avaldise väärtuseks 2014. Tuli aga lisaks näidata, et võrrandil rohkem ühtegi täisarvulist lahendit ei ole.

Ülesanne 2

See osutus üpris lihtsaks ülesandeks, ühtegi levinud viga ei olnud ja keskmine punktide arv oli kõrge. Kes nägi ära, et lõigud AB ja AD on võrdse pikkusega, jõudis reeglina ka korrektse lõppvastuseni.

Ülesanne 3

Üleparandatud tööde hulgas oli vaid kaks, millele andsime üle 3 punkti, sealhulgas vaid üks täislahendus. Enamik õpilasi oli leidnud proovimise teel ühe võimaluse kauguste jaoks peatuste vahel ja leidnud sellest õige vastuse. Sellised tööd said meilt 2 punkti, kuigi mõnes üksikus piirkonnas oli juba selle eest antud 5-7 punkti. 3 punkti said tööd, kus lisaks õigele vastusele oli leitud, et kahe kõrvutise peatuse vahe on vähemalt 5 km. Tavaline eksiarvamus oli, et peatuste vahekaugused peavad olema täisarvud.

Kontrollijate kommentaarid (Oleg Košik, Mark Gimbutas)

Test

Test oli raske. Ainult 28 õpilast 81-st said vähemalt pooled punktid, maksimumi sai üks võistleja. Enamasti näisid võistlejatele probleeme valmistavat ülesanded 1 kuni 6, nendele ülesannetele jäeti ülejäänutest sagedamini lihtsalt vastamata. Suhteliselt sage vale vastus 1. ülesandele oli 2013000, arvatavasti loendamisviga.

Ülesanne 1

Kuna ülesanne oli vähemalt osaliselt tehtav ka proovimise teel (mis oli vist õpilastele lihtne ja arusaadav), siis punkte sai valdav enamus võistlejaid. Siiski, täielikke lahendusi oli ainult paar. Mitmed õpilased, kes küll jõudsid ka b-osa õige vastuseni, leidsid vähima väärtuse hoopis korrutisele xy ja seejärel üritasid tema tegureid kuidagi nõnda jagada, et $x+y$ tuleks võimalikult väike. Taoline põhjendus ei ole hea, sest pole selge, miks mingisuguse suurema xy väärtuse korral ei õnnestuks moodustada tegurid x ja y nii, et $x+y$ tuleks veel väiksem. Kuna ülesande a-osa oli nendes töödes tavaliselt täielikult tehtud ja need enamasti sisaldasid ka b-osa lahenduse jaoks kasulikke tähelepanekuid, siis said sellised lahendused tavaliselt 5 punkti. Sobiva x leidmine ja lahenduse põhjendamine proovimise teel oli tehtav paljudele (tõsi, nõudis omajagu rehkendamist). Sama meetodiga jätkamiseks oli aga tarvis kavalust: nimelt, täisarvu kuup ja ruut jaguvad kümnega parajasti siis, kui täisarv ise jagub kümnega (see tähelepanek andis ühe punkti ja oli alternatiiviks arvu 360 algteguriteks lahutamise ideele). Mainitud tähelepaneku abil oli võimalik leida ja põhjendada ka vähim y ning $x+y$, mida üks õpilane ka edukalt tegi.

Ligi 30 õpilast jõudsid a-osas vastuseni $y = 600$, milleni näis tihti ahvatlevat asjaolu, et $36 = 6^2$ ja $360 \cdot 600 = 60^3$. Samuti arvas ligi 10 õpilast, et esitatud tingimused x ja y jaoks küll kehtivad a-osas, aga ei kehti b-osas.

Hindamise osas oli mõnikord veidi vabalt tõlgendatud selgitusteta õige vastuse eest punkti andmist, nii et punkte oli saadud ka a-osa pooliku õige vastuse eest (näiteks $x = 10$, $y = 600$).

Ülesanne 2

Ülesanne oli 9. klassi õpilastele üsna raske, mis parandajale suurt üllatust siiski ei valmistanud. Tuli tegeleda abstraktsete, mitte aga konkreetsete suurustega, samuti mitme juhu läbivaatamisega, mis pole kõik algselt läbinähtavad. Ilmselt paljude õpilaste jaoks pole sellise ülesande puhul üldse selge, mida selles tegema peab ja kuidas sellele läheneda.

Tihti õpilased üritasid anda šokolaadidele konkreetseid hindu, samuti piirduti vaid mõne üksiku konkreetse šokolaadide jaotamise võimalusega. Sellise lähenemise puhul polnud lootust saada kuigi palju punkte.

Paljud õpilased kirjutasid välja 6 võimalust, kui mitu šokolaadi võis saada üks poiss. Selline samm on lahenduse alustuseks kasulik ning andsime selle eest 1 punkti. Edasiseks analüüsiks on mitu võimalust. Lisaks žürii lahendusele toimis hästi näiteks ka selline lähenemine, kus üldisust kitsendamata eeldati, et šokolaad A on kõige kallim ja C kõige odavam ning siis kolmikuid võrreldes näidati, et pole võimalik, et kolm poissi maksid kokku ühepalju.

Ülesanne 3

Ülesande lahendasid õpilased enamasti edukalt, kusjuures 68 õpilast 81-st said 1, 6 või 7 punkti. Peaaegu kõik said punkti tõsiasja eest, et võrdkülgse kolmnurga nurgad on 60°. Üsna levinud õiget lahendust välistav viga oli arvamus, et punkt F peab kokku langema rombi tipuga B ja punkt E peab kokku langema rombi tipuga A. Sellised lahendused said enamasti ühe punkti. Mitmed õige vastuseni jõudnud võistlejad kasutasid oma lahenduses vist sümmeetriatunnetusel tuginevaid ja põhjendamata jäetud tähelepanekuid, tüüpiliselt, et kolmnurk EBF on võrdhaarne. Kuna see tõsiasi on ilusalt jooniselt siiski näha, siis hea jooniseta ja seda tähelepanekut möödapääsmatult kasutavad lahendused said 6 punkti. Mõnel õpilasel tuli ette ebaselget nurkade tähistamist. Näiteks räägiti nurgast E, kuigi selle punkti juures on tegelikult päris palju nurkasid.

Ülesanne 4

Suurimaks probleemiks oli siin ülesande teksti mittemõistmine. Väga paljud mõistsid väljendit “alustades ülimalt 18-kohalisest arvust” nii, et alustataksegi 18-kohalisest arvust, kuigi algne arv võib sama hästi olla ka 1- kuni 17-kohaline. Kui vaadeldi vaid 18-kohalisi arve, saadi üldjuhul mitte üle 2 punkti.

Teiseks probleemiks oli see, et põhjendati küll ära, et teisenduste käigus tekib lõpuks arv 312, kuid jäeti korralikult selgitamata, miks see arv tekib hiljemalt just kolmanda teisenduse tulemusena. Selles oli aga ülesande põhiraskus. Enamus punktimuutustest olid tingitud just neist kahest probleemist.

Kontrollijate kommentaarid (Urve Kangro, Kairi Kangro)

Ülesanne 1

Selles ülesandes oli žürii hindamisskeem puudulik, nähes ette kaks punkti võõrlahendi leidmise ja välistamise eest, kuigi seda lahendit ei tekkinudki, kui võrrandi vasakul pool olev murd $(1+x)$-ga taandada. See põhjustas ulatuslikke punktimuudatusi üleparandamises. Ülesanne oli üldiselt hästi lahendatud, levinumateks vigadeks olid lõpus kontrolli puudumine ja arvutusvead.

Ülesanne 2

Tegu oli komplekti lihtsaima ülesandega, ja ka punktiparandusi oli vähe. Punkte kaotati peamiselt arvutusvigade eest.

Ülesanne 3

Ülesanne oli üldiselt hästi lahendatud. Lisaks žürii lahendusele esines sageli ka lahendus, kus vaadeldi kõiki arvu 280 tegureid ja prooviti nende sobivust ülesande tingimustega. Sellise lahenduse korral oli sageli esinevaks veaks mõne teguri puudumine. Žürii lahendusele vastavates lahendustes kaotati punkte kõige sagedamini selle eest, et pärast kindlakstegemist, et n peab jaguma 70-ga, unustati kontrollida, et 280 ka vastavate väärtustega jaguks, ja seetõttu pakuti vastusevariandiks ka arvu 210.

Ülesanne 4

Paljud õpilased olid tähele pannud, et kui $x = y = z$, on tingimused täidetud ning saanud ühe õige vastuse kätte. Sellise lahenduse eest oli piirkondades reeglina üsna palju punkte pandud. Kui ei olnud püütudki kõiki seoseid rahuldavaid muutujate väärtusi leida, siis sai sellise lahenduse eest meilt reeglina 1 punkti. Palju oli vigu võrde lahendamisel, näiteks leiti, et antud seoste suvalise murru lugeja ja suvalise teise murru nimetaja korrutised peavad kõik omavahel võrdsed olema (kokku saadi seega 2 võrdusest 5).

Ülesanne 5

Siin esines palju lahendusi, kus oli olemas õige vastus, ning edasi oli lihtsalt joonistele viidates väidetud, et teisi võimalusi pole. Mitmetes piirkondades oli selliseid lahendusi hinnatud 7 punktiga, aga tihti polnud seal üldse midagi tõestatud. Sellisel juhul sai selle lahenduse eest 1 punkti (õige vastuse eest). Õige vastus oli olemas praktiliselt kõikides töödes. Osades töödes oli olemas tõestus näiteks võrdhaarsete kolmnurkade jaoks või siis täisnurksete kolmnurkade jaoks, sellised tööd said reeglina 2 punkti. Mõnedes töödes esines väide, et kõrgused ei saa olla suuremad kui neile vastavad alused, kuid edasi oli lahendatud vaid konkreetsel juhul $h_a = a$, $h_b = b$. Kuna edasine arutluskäik ei erine palju õigest lahendusest, siis sellised lahendused said 3 punkti. Mõned õpilased olid saanud ka vajalikud võrratused $h_a \leqslant b$ ja $h_b \leqslant a$, arvutades kolmnurga pindala kahel viisil ning kasutades seejärel ülesande eeldusi. Nii jõuti ka täislahenduseni.

Ülesanne 6

Ülesandes põhjustas õpilaste hulgast segadust, kas lapsed tuleks lugeda erinevateks või võrdseteks. Piirkondades oli enamasti lapsi võrdseteks lugevad lahendused hinnatud 0 punktiga, ent kuna selle lahendus on lihtsa vaevaga täiendatav tegeliku ülesande lahenduseks, otsustas žürii selliste lahenduste eest anda 5 punkti. Sageli esinevateks vigadeks olid kas mõne variandi puudumine või mõne variandi topelt lugemine.

Kontrollijate kommentaarid (Härmel Nestra, Janno Veeorg)

Ülesanne 1

See ülesanne ei osutunud nii lihtsaks kui kavandatud. Žürii ei pannud tähele, et seoses uue õppekavaga võivad 11. klassis trigonomeetriavõrrandid veel käsitlemata olla, ja valis sellise kooliülesande paari aasta taguse komplekti eeskujul.

Kuigi valdavas osas meile saadetud töödest olid õpilased selle ülesandega vapralt maadelnud, jõudsid täisvastuseni vähesed ja täispunktideni mõned üksikud. Küll ei arvestatud trigonomeetriliste funktsioonide perioodilisust ja pakuti vastuseks mõnda üksikut arvu, küll jagati võrrandit muutujat sisaldava avaldisega ja jäeti kontrollimata jagaja nulliga võrdumise võimalus. Reas töödes jõuti võrrandini $\sin x = 2\sin x\cos x$, anti järele ahvatlusele kasutada kahekordse nurga siinuse valemit ja ei osatud saadud seosega enam midagi peale hakata. Üsna vähestes töödes kontrolliti saadud lahendeid, kuid see on siin vajalik, kuna standardsammudega lahendades võiks juhtuda, et mõne saadud lahendi x puhul $\cos x = 0$, mis tekitab algses võrrandis nulliga jagamise.

Oli tunda, et žürii pakutud hindamisskeemist oli töödes esinenud paljude ootamatute teisenduste hindamisel vähe kasu. Üks murekoht oli ilmselt ilma liikmeid ühele poole viimata muutujat sisaldava avaldisega läbijagamine: kui vaadelda kõrval ka juhtu, kus see avaldis võrdub nulliga, siis võib siit ka täislahenduseni jõuda, kuid skeemi alla see ei mahtunud. Arvestasime sellisel juhul tegurdust varjatud kujul tehtud olevaks ja andsime mõnedes töödes sel põhimõttel 1 punkti juurde. Samuti ei puudutanud skeem olukorda, kus lõpmatute lahendiperede asemel pakutakse vastuseks üksiklahendeid. Hindasime kõik tööd põhimõttel, et vähemalt kahe õige erilahendi korral saab lahendite leidmise eest 1 punkti (v.a kui lahendid leiti proovimise teel). Ka selle otsusega kerkisid mõnede õpilaste tulemused punkti võrra.

Ülesanne 2

Ülesanne oli oodatult hästi lahendatud. Peamised põhjused, miks punkte kaotati, olid erinevad arvutus- või teisendusvead.

Peamised punktimuutused olidki tingitud sellest, kui parandaja polnud pannud tähele mõnda teisendusviga või oli selle eest liiga vähe punkte maha võtnud. Samuti esines mõningast segadust hindamisjuhiste viimase punktiga, mille alusel oli mõnedes töödes võetud punkt maha, kui vastuses polnud selgelt öeldud, et $\sqrt[3]{\frac{5}{3}}$ on suurem, vaid oli lihtsalt märgitud, et $\sqrt[7]{3} < \sqrt[3]{\frac{5}{3}}$. Iseenesest on ka teine variant täiesti õige.

Ülesanne 3

Ülesannet oli üritatud lahendada erinevalt, samas tulemuseni viis üldiselt ainult žürii lahendusega sarnane lahendus.

Mõnes töös oli üritatud lihtsalt kõiki variante läbi vaadata, kirjutades välja sobivad arvud nii, et nende vahe ei ole suurem kui 18. Kirjutades arve välja mõistlikult, piisas umbes 60 arvu läbivaatamisest, mis on täiesti mõeldav. Kuigi see ei olnud lahendus, mida ülesandele oodati, on see siiski täielik ja kui see oli korrektselt kirja pandud, siis sai selle eest 7 punkti.

Selles ülesandes alandasime punkte küllaltki paljudes töödes, kuna põhjendused olid tihti väga puudulikud. Tihti oli lihtsalt väidetud, et igas 18-arvulises vahemikus peab leiduma arv, mille ristsumma on 9 või 18, kuid põhjendused kas puudusid või olid valed.

Üldse oli paljudes töödes raske hindamisjuhiste järgi hinnata, kuna enamuses töödest puudus juba esimene väide, et 18 järjestikuse arvu seas leidub arv, mis jagub 18-ga, ja seega ei oldud ka edasipidi vaadatud just seda arvu. Seega võis punkte saada mitte päris selliste tähelepanekute eest nagu hindamisjuhistes, aga nendega sarnaste lahendusele lähemale viivate tähelepanekute eest.

Ülesanne 4

Ülesanne oli raske. Peaaegu täislahendusi esines ainult kaks.

Tõestamaks, et $n \leq 2014$, kasutati enamustes töödes, kus see tõestatud oli, Cauchy–Schwarzi võrratust. Kuna seda võrratust kooliprogrammis pole, siis andis see ülesanne kahjuks mõninga eelise õpilastele, kellel see teadmine oli. Piirkonnavooru ülesande puhul on see natuke halb.

Teise osa (tõestamaks, et arvud 2 kuni 2014 sobivad) eest saadi maksimumpunktid ainult ühes töös. Paljudes töödes saadi aga 1 või 2 punkti, kui oli olemas konstruktsioon ühe või mitme juhu jaoks.

Peamiseks punktimuutuste põhjuseks olidki olukorrad, kus oli antud punkt mittetäieliku vastuse eest, aga konstruktsioon puudus ehk töö oli tegelikult väärt 0 punkti.

Hästi paljudes töödes oli tehtud vale eeldus, et iga x_i jaoks leidub x_j nii, et $x_i = \frac{1}{x_j}$. Sellistes töödes oli üldiselt jõutud olukorrani, et $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1$ ja $n = 2014$. Need tööd said enamjaolt 1 punkti.

Ülesanne 5

Seda ülesannet oli valdavas osas töödes vapralt lahendatud. Oli meeldiv tõdeda, et õpilased said enamasti aru, mida peab tegema, ja nõutud tulemuseni jõuti mitmel eri viisil. Paljud õpilased olid teinud õigesti suurema osa lahendusest ja siis äkki töö katki jätnud. Nähtavasti ehmusid nad tekkinud keerulistest avaldistest, kuid täiesti tarbetult — paari sammuga oleks kõik kole välja taandunud. Paaris väiksemas piirkonnas esines siiski lati alt läbijooksu punktide K, L ja M fikseerimisega külgede keskpunktidesse. Need tööd said meilt 0–1 punkti sõltuvalt sellest, kas midagi oli ka üldjuhu jaoks tehtud.

Ametlik skeem jäi jälle pisut "lühikeseks" õpilaste töödes esinevate mõttekäikude hindamiseks. Leidus näiteks töid, kus oli õigesti arvutatud kõik ümbermõõdud, kuid mitte ühtki pindala. Skeemi kaks esimest rida justkui ei rakenduks. Andsime sel juhul siiski nende kahe rea eest kokku 1 punkti. Kui pindalade arvutamisel oli unustatud 2-ga jagada, siis võtsime üldse ainult 1 punkti maha, sest see ei muuda kuidagi lahenduskäiku.

Ülesanne 6

See kombinatoorikaülesanne torkas esmajoones silma Kohtla-Järve ja veel mõne piirkonna räigelt ülehinnatud töödega. Valdav osa meile saadetud töid olid siiski hinnatud mõõdukalt õiglaselt. Üle poole töödest olid Tallinnast ja Tartust ning paistab, et neis piirkondades on õpilased sedasorti ülesannete jaoks palju paremini ette valmistatud kui mujal, sest enamus sai päris õiglaselt maksimumilähedase tulemuse.

Hindamisskeemi tuli täiendada, sest paljudes töödes oli ülesande b-osa taandatud a-osale ning lahendatud siis ainult a-osa. Arvestasime b-osa taandamise eest a-osale 2 punkti. Samuti oli paljudes töödes lahendatud mõlemad osad korraga, kasutades ametliku lahendusega sarnast mõttekäiku: žürii lahendus räägib konkreetselt kahest esimesest kuhjast, kuid samamoodi võib näha, et üheski kahes kuhjas ei saa kunagi võrdsel arvul kive olla, samas kui nii a- kui ka b-osa oodatavas lõppseisus on vähemalt kaks kuhja ühesuurused.

Kontrollijate kommentaarid (Heiki Niglas, Raul Kangro)

Ülesanne 1

Ülesanne tundus olevat õpilaste jaoks mõistliku raskusastmega. Küllalt palju oli probleeme lihtmurru mõistega — paljud õpilased arvasid, et murrud kujul $\frac{n}{n}$ on lihtmurrud. Kuna selle vea kohta polnud hindamisskeemis midagi öeldud, karistasid parandajad selle eksimuse eest küllaltki erinevalt (1-4 punkti ulatuses). Kuna see eksimus aga ei mõjutanud kuidagi ülesande lahendamise raskust, siis ühtlustamise käigus loeti see viga ühe punkti vääriliseks. Samuti oli küllalt massiliseks eksimuseks see, et sama nimetajatega murdude liitmisel vaadeldi ainult teatud arvu konkreetseid nimetajaid (kas ainult algusest või siis lisaks ka üks-kaks lõpust) ning tehti nende arvutuste põhjal järeldus, et tegemist on aritmeetilise jadaga. Oluline on aru saada, et sellest ei piisa; korrektseks põhjendamiseks tuleb kas tõepoolest kõik summad välja arvutada (mis on hirmus aeganõudev) või siis näidata üldkujul, et nimetajaga n murdude summa on $\frac{n-1}{2}$ või et iga kahe järjestikuse nimetaja korral summa erineb $\frac{1}{2}$ võrra. Kahjuks ei arvestanud mitmed parandajad hindamisskeemi ja andsid ka ainult konkreetsete nimetajatega arvutusi teinud õpilastele täispunktid, mistõttu tuli tööde ülevaatamisel küllalt palju punktiskoore vastavalt hindamisskeemile alandada.

Huvitav oli see, et küllalt paljud õpilased leidsid olümpiaadil aritmeetiliste jadade summasid rühmitamise teel (esimene – viimane, teine – eelviimane jne) ning konkreetsete liikmete arvu korral oskasid seda teha nii paaris- kui paarituarvuliste pikkustega jadaosade korral, kuid ei olnud suutelised selle abil tuletama üldkujul valemit paaritu arvu liidetavate puhul.

Ülesanne 2

Ülesanne oli päris kenasti lahendatud. Punkte kaotati näiteks selle eest, et võeti logaritm alusel x ilma märkimata, et $x \neq 1$.

Ülesanne 3

Tegemist oli õpilaste jaoks raske ülesandega. Palju oli lahendusi, kus võeti tõestatav väide hoopis eelduseks ning näidati, et sel juhul vastab teguriteks jaotus $\frac{n}{2}, \frac{n}{3}, \frac{n}{5}$. Selliste lahenduskatsete eest sai ühtlustamise käigus antud maksimaalselt 1 punkt ja seda ainult juhul, kui kuskil oli selgelt kirjas, et 2-, 3- ja 5-ga jagumine on samaväärne 30-ga jagumisega. Eelpool mainitud tegurite sobivuse näitamise eest punkte ei saanud, kuna seda ei ole ülesande lahendamiseks vaja. Tähtis on näidata, et ükski teistsugune tegurite kolmik ei sobi.

Küllalt palju oli lahenduskatseid, mis põhinesid teatud tegurite komplektide läbivaatamisel ja väidetel, et ükski muu ei sobi. Sageli öeldi, et ülejäänud tegurite kolmikud on vaadeldutest väiksemad (või et n jagamisel teguritega saadavad arvud on muudel juhtudel suuremad), ilma oma vastavaid väiteid põhjendamata ja selgitamata, mida ühe arvukolmiku teisest suurem olemine tähendab. Selliste lähenemiste eest anti ühtlustamise tulemusel punkte järgmiselt.

- Põhjendatud, et ülesande tingimust (3) rahuldavate tegurite korral ka n jagamisel nendega saadavad arvud ei tohi üksteisega jaguda: 1 p
- Näidatud, et arvud $\frac{n}{2}, \frac{n}{3}, \frac{n}{7}$ ei rahulda ülesande tingimust (2): 1 p
- Näidatud, et $\frac{n}{3}, \frac{n}{4}, \frac{n}{5}$ ei rahulda tingimust (2): 2 p
- Tõestatud, et iga muu tingimusi (1) ja (3) rahuldav tegurite kolmik peale eelnevate ja $\frac{n}{2}, \frac{n}{3}, \frac{n}{5}$ on komponentviisiliselt väiksem vähemalt ühest eelnevalt vaadeldud kolmikutest ja et seetõttu on nende summa väiksem n-st: 2 p
- Põhjendatud, et 2-, 3- ja 5-ga jagumine tagab 30-ga jagumise: 1 p

Ülesanne 4

Mitmel lahendajal tuli võõrlahend sisse ja selle tõttu kaotati punkte. Tihti oli võõrlahendi tulemise põhjuseks see, et ruutjuur loeti negatiivseks. Üldiselt oli ülesanne hästi lahendatud.

Ülesanne 5

Paljud lahendajad olid kohe ilma tõestamata eeldanud, et tegemist on võrdkülgse kolmnurgaga. Ka parimatel lahendajatel olid mõned sammud põhjendamata jäänud. Näiteks mõni, kes tegi kaks juhtu kenasti läbi, ütles lihtsalt, et kolmas on analoogiline, aga tegelikult see pole päris nii, sest kui projektsioon on tõmmatud nurgapoolitaja küljele, siis on tõestusmeetod teine. Täispunkte keegi ei saanud, kuigi mõni oli sellele väga lähedal.

Ülesanne 6

Ülesanne osutus üllatavalt raskeks. Päris paljud ei saanud üldse aru, mida esialgse jada liikmete kõikvõimalike summade all mõeldi. Küllalt palju oli ka lahendusi, mis vaikimisi tõid sisse lisaeeldusi. Näiteks eeldati, et esialgne jada on positiivsete liikmetega. Kui ülemtõkke $n < 4$ põhjendus töötas ainult sellistel lisaeeldustel, siis selle eest punkte ei antud.