Piirkonnavoor 2012

Eesti LIX matemaatikaolümpiaad

28. jaanuar 2012 Piirkonnavoor **7. klass**

I osa. *Lahendamisaega on 40 minutit.*
Sellele lehele kirjuta ainult vastused, lahendamiseks võid kasutada lisapaberit.
Iga ülesande õige vastus annab 2 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Kauba eest tasumisel annab ostja kassiirile 19 sajaeurost ja 16 kümneeurost rahatähte ning saab tagasi 48 üheeurost münti. Mitu üheeurost münti peaks ostjal vähemalt olema, et tasuda selle ostu eest ainult nendega?

. . . .

2. Kui arvust 2012 lahutada neljakohaline arv, mis saadakse arvu 2012 numbrite kirjutamisel vastupidises järjekorras, siis saadav vahe on negatiivne. Leia vähim arvule 2012 järgnev naturaalarv, mille korral niiviisi saadav kahe neljakohalise arvu vahe on positiivne. (Arv ei alga numbriga 0.)

. . . .

3. Olgu a, b ja c järjestikused paaritud naturaalarvud, nii et $a > b > c$. Leia avaldise $(a-b)(b-c)(c-a)$ väärtus.

. . . .

4. Summas $2012 + 2012 + \ldots + 2012$ on kõik liidetavad võrdsed. Leia vähim võimalik liidetavate arv, mille korral see summa jagub arvuga 20.

. . . .

5. Ruudustiku ülemisele reale kirjutatakse korduvalt järjest sõna KLASS, alumisele reale aga kirjutatakse korduvalt järjest sõna KASS. Igas ruudus on üks täht ja tühje ruute ei ole. Selles ruudustikus on 100 veergu. Mitmes veerus on kohakuti tähed K?

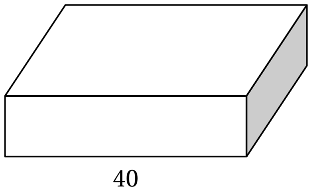
K	L	A	S	S	K	L	A	...
K	A	S	S	K	A	S	S	...

. . . .

6. Mari liidab kokku ristküliku mingi kolme külje pikkused ja saab tulemuseks 20 cm. Jüri liidab kokku sellesama ristküliku mingi kolme külje pikkused ja saab tulemuseks 22 cm. Leia ristküliku ümbermõõt.

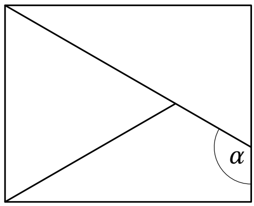
....

7. Leia risttahuka tumedaks värvitud tahu pindala, kui risttahuka ruumala on 8 dm^3 ja serva pikkus joonisel on antud sentimeetrites.



....

8. Ristküliku ühele küljele joonestatakse võrdkülgne kolmnurk. Selle kolmnurga ühte külge pikendatakse, nagu joonisel näidatud. Leia kolmnurga külje pikenduse ja ristküliku külje vahelise nürinurga α suurus.

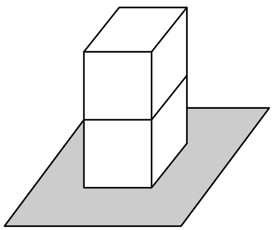


....

9. Nürinurkse kolmnurga kõik nurgad on erineva suurusega ja iga nurga suurus on mingi täisarv kraade. Mitu erinevat võimalikku suurust on selle kolmnurga nürinurgal?

....

10. Pöörlevale lauale asetatakse üksteise otsa kaks täringut, nagu joonisel näidatud. Kummagi täringu tahkudele on kirjutatud naturaalarvud 1 kuni 6 nii, et vastastahkudel olevate arvude summa on 7. Leia täringute üheksal nähtaval tahul olevate arvude suurim võimalik summa.



....

Eesti LIX matemaatikaolümpiaad

28. jaanuar 2012 Piirkonnavoor **8. klass**

I osa. *Lahendamisaega on 40 minutit.*
Sellele lehele kirjuta ainult vastused, lahendamiseks võid kasutada lisapaberit.
Iga ülesande õige vastus annab 2 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Arvul 2012 on järgmine omadus: tema mis tahes kolm kõrvutiolevat numbrit on erinevad järjestikused täisarvud mingis järjekorras. Leia vähim sellise omadusega viiekohaline naturaalarv.

. . . .

2. Kahe täisarvu summa on 1 ja nende korrutis on -6. Leia nende arvude suurim võimalik jagatis.

. . . .

3. Kauba hinda tõsteti detsembris 25% ja langetati jaanuaris tagasi endisele tasemele. Mitu protsenti langes kauba hind jaanuaris võrreldes detsembri hinnaga?

. . . .

4. Tahvlile on kirjutatud kõik naturaalarvud 1 kuni n. Neist arvudest kustutatakse kõik sellised, mis jaguvad vähemalt ühega arvudest 2 ja 3. Tahvlile jääb alles 5 arvu. Leia arvu n suurim võimalik väärtus.

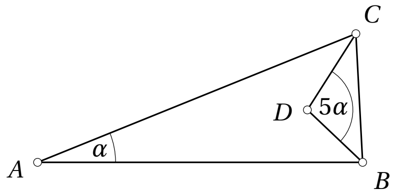
. . . .

5. Ruudustiku ülemisele reale kirjutatakse korduvalt järjest sõna RUUT, alumisele reale aga kirjutatakse korduvalt järjest sõna RISTKÜLIK. Igas ruudus on üks täht ja tühje ruute ei ole. Esimeses veerus on tähed R kohakuti. Mitmendas veerus on tähed R järgmist korda kohakuti?

R	U	U	T	R	U	U	T	R	U	...
R	I	S	T	K	Ü	L	I	K	R	...

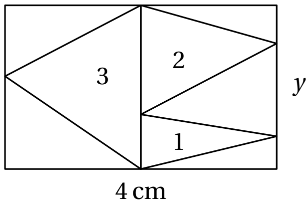
. . . .

6. Leia kolmnurga ABC nurga BAC suurus α, kui lõigud BD ja CD poolitavad selle kolmnurga nurgad ja nurga BDC suurus on 5α.



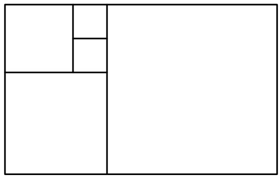
. . . .

7. Ristkülik on jaotatud kaheks ristkülikuks ja need omakorda kolmnurkadeks. Joonisel on kolmnurkade sisse kirjutatud nende pindalad ruutsentimeetrites. Ristküliku ühe külje pikkus on 4 cm. Leia ristküliku teise külje pikkus y.



. . . .

8. Ristkülik on jaotatud ruutudeks, nagu näidatud joonisel. Vähima ruudu pindala on 1 ruutühik. Leia ristküliku pindala.

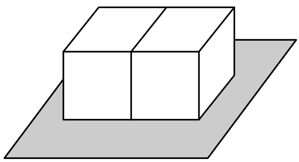


. . . .

9. Teravnurkse kolmnurga kõik nurgad on erineva suurusega ja iga nurga suurus on mingi täisarv kraade. Mitu erinevat võimalikku suurust on selle kolmnurga suurimal nurgal?

. . . .

10. Pöörlevale lauale asetatakse üksteise kõrvale kaks täringut, nagu joonisel näidatud. Kummagi täringu tahkudele on kirjutatud naturaalarvud 1 kuni 6 nii, et vastastahkudel olevate arvude summa on 7. Leia täringute kaheksal nähtaval tahul olevate arvude suurim võimalik summa.



. . . .

Eesti LIX matemaatikaolümpiaad

28. jaanuar 2012 Piirkonnavoor **9. klass**

I osa. *Lahendamisaega on 40 minutit.*
Sellele lehele kirjuta ainult vastused, lahendamiseks võid kasutada lisapaberit.
Iga ülesande õige vastus annab 2 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Arvul 2012 on järgmine omadus: kui kirjutada välja tema iga kahe kõrvutioleva numbri summa, siis need summad 2, 1 ja 3 on kolm järjestikust täisarvu mingis järjekorras. Leia vähim selline viiekohaline naturaalarv, millel on sarnane omadus, st tema kahe kõrvutioleva numbri summad on neli järjestikust täisarvu mingis järjekorras.

. . . .

2. *Palindroomiks* nimetatakse arvu, mis tagant ettepoole lugedes annab sama arvu. Näiteks arvud 353 ja 5445 on palindroomid. Leia vähim selline naturaalarv k, mille korral arv $k + 2573$ on palindroom.

. . . .

3. Kolme erineva täisarvu korrutis on 12 ja summa 3. Leia neist kolmest vähima arvu vähim võimalik väärtus.

. . . .

4. Olgu a ja b positiivsed arvud. On teada, et arv a moodustab b protsenti arvust b ning arv b moodustab a protsenti arvust a. Leia arvude a ja b summa.

. . . .

5. Ruudustiku ülemisele reale kirjutatakse korduvalt järjest sõna MATEMAATIKA, alumisele reale aga kirjutatakse korduvalt järjest sõna FÜÜSIKA. Igas ruudus on üks täht ja tühje ruute ei ole. Mitmendas veerus on tähed K esimest korda kohakuti?

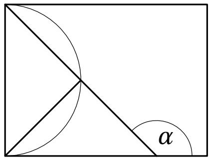
M	A	T	E	M	A	A	T	I	K	A	M	A	T	...
F	Ü	Ü	S	I	K	A	F	Ü	Ü	S	I	K	A	...

. . . .

6. Arvus 324 on kõik numbrid erinevad ning ta jagub iga oma numbriga. Leia vähim sellise omadusega kolmekohaline arv.

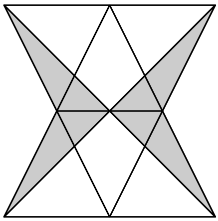
. . . .

7. Ristküliku lühem külg on poolringjoone diameetriks ning võrdhaarse kolmnurga aluseks. Võrdhaarse kolmnurga aluse vastastipp asub sellel poolringjoonel. Leia kolmnurga ühe haara pikenduse ja ristküliku pikema külje vahelise nürinurga α suurus.



. . . .

8. Joonisel näidatud kujund koosneb kuuest võrdsest võrdhaarsest kolmnurgast. Mitu korda on kujundi valge osa pindala suurem tumedaks värvitud osa pindalast?

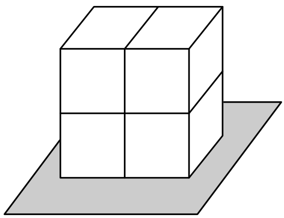


. . . .

9. Kolmnurga kõik nurgad on erineva suurusega ja iga nurga suurus on mingi täisarv kraade. Kolmnurga suurim ja vähim nurk erinevad suuruselt keskmisest nurgast täpselt sama arvu kraadide võrra. Mitu erinevat võimalikku suurust on selle kolmnurga vähimal nurgal?

. . . .

10. Pöörlevale lauale asetatakse neli täringut, nagu joonisel näidatud. Iga täringu tahkudele on kirjutatud naturaalarvud 1 kuni 6 nii, et vastastahkudel olevate arvude summa on 7. Leia täringute 14 nähtaval tahul olevate arvude suurim võimalik summa.



. . . .

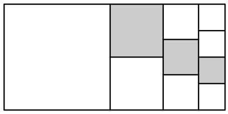
Eesti LIX matemaatikaolümpiaad

28. jaanuar 2012 Piirkonnavoor **7. klass**

II osa. *Lahendamisaega on 2 tundi.*
Ülesannete lahendused kirjuta eraldi lehele.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti. Ainult vastusest ei piisa!
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Neli peret otsustas osta ühiselt lumesaha ja jagada maksumuse perede vahel võrdselt. Viimasel hetkel üks peredest loobus ja ülejäänud kolmel oleks tulnud esialgsele summale lisada igaühel 105 eurot. Õnneks leiti kaks uut peret, kes tahtsid lumesaha ostus osaleda. Saha maksumus jagati viie pere peale võrdselt. Kui suure summa maksis iga pere?

2. Ristkülik on jaotatud ruutudeks. Suurima ruudu ümbermõõt on 4 pikkusühikut. Leia tumedaks värvitud kujundi ümbermõõt ja pindala.



3. Arvutustehtes

$$\text{KAKS} + \text{KOLM} = \text{VIIS}$$

vastavad erinevatele tähtedele erinevad numbrid ja samadele tähtedele samad numbrid. Leia suurim neljakohaline arv, mis saab vastata sõnale VIIS.

Eesti LIX matemaatikaolümpiaad

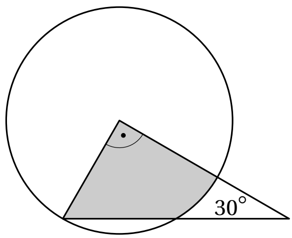
28. jaanuar 2012 Piirkonnavoor **8. klass**

II osa. *Lahendamisaega on 2 tundi.*
Ülesannete lahendused kirjuta eraldi lehele.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti. Ainult vastusest ei piisa!
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Aastal 2010 oli Atsi kasvatatud kartulite arv kaks korda suurem Petsi kasvatatud kartulite arvust. Aastal 2011 aga oli Petsi kasvatatud kartulite arv kaks korda suurem Atsi kasvatatud kartulite arvust. Kahe aasta peale kokku kasvatas Ats 520 kartulit, mis oli 46 kartuli võrra vähem kui Petsi kasvatatud kartulite arv kahel aastal kokku. Mitu kartulit kasvatas Ats aastal 2010?

2. Leia kõik kolmekohalised naturaalarvud, mis jaguvad arvudega 4, 5 ja 6, kuid ei jagu arvudega 7, 8 ega 9.

3. Täisnurkse kolmnurga hüpotenuusi pikkus on 10 cm ja ühe teravnurga suurus 30°. Täisnurga tipp on keskpunktiks ringjoonele, mis läbib lühema kaateti otspunkti. Leia tumedaks värvitud kujundi täpne ümbermõõt.



Eesti LIX matemaatikaolümpiaad

28. jaanuar 2012 Piirkonnavoor **9. klass**

II osa. *Lahendamisaega on 4 tundi.*
Ülesannete lahendused kirjuta eraldi lehele.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti. Ainult vastusest ei piisa!
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Õpetaja kirjutab tahvlile ühest suuremad naturaalarvud a ja b ning annab Mihklile järgmise ülesande.

> Kirjuta arvude järele nende korrutis. Siis kirjuta kahe viimase tahvlil oleva arvu järele nende summa. Seejärel kirjuta kahe viimase tahvlil oleva arvu järele nende korrutis. Siis kirjuta kahe viimase arvu järele nende summa jne.

Mihkel hakkab seda ülesannet täitma. Kas on võimalik, et mingil hetkel kirjutab Mihkel tahvlile algarvu?

2. Leia ruutvõrrandi $x^2 + px + 12 = 0$ kordaja p kõik väärtused, mille korral selle ruutvõrrandi lahendite vahe on 1.

3. Rööpküliku $ABCD$ külgede BC ja AD keskpunktid on vastavalt K ja L. On teada, et $AK \perp BL$ ja $AC \perp CD$. Leia rööpküliku $ABCD$ nurkade suurused.

4. Juku kirjutas paberile teatava hulga arve, mille summa oli 0, kusjuures iga arv oli kas 2, 1, -1 või -2. Seejuures osutus, et arve 2 oli sama palju kui arve -1 ning arve 1 oli sama palju kui arve -2. Seejärel sattus paber Juku väikevenna Miku kätte, kes asendas kõik arvud 1 arvudega -1 ja kõik arvud -1 arvudega 1. Tõesta, et paberil olevate arvude summa on ikka 0.

Eesti LIX matemaatikaolümpiaad

28. jaanuar 2012 Piirkonnavoor **10. klass**

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Reaalarvud a, b, c, d rahuldavad võrdusi $ac+bd+ad+bc = 28$ ja $c+d = 4$. Leia $a+b+c+d$.

2. Lahenda võrrand $\Big|\big||x| - 2x\big| + 3x\Big| = 2012$.

3. Kaupluses on müügil kaks telerit. Ühel neist on ekraani laiuse ja kõrguse suhe $4 : 3$, teisel $16 : 9$, kuid ekraani diagonaalid on mõlemal võrdse pikkusega. Soovides otsustada, kumba telerit osta, väidab isa, et teise teleri ekraani laius ületab esimese teleri ekraani laiust vähem kui 10% võrra. Kas isal on õigus?

4. Kui palju leidub selliseid täisarvukomplekte (a, b, c), mis rahuldavad võrrandit $(a+b)(b+c)(c+a) = 123456789$?

5. Täisnurkse kolmnurga ABC siseringjoon puutub kolmnurga külgi punktides D, E ja F.

a) Tõesta, et kolmnurk DEF ei ole võrdkülgne.

b) Kui kolmnurk DEF on võrdhaarne, siis millised on kolmnurga DEF nurkade suurused?

c) Kui kolmnurk DEF on võrdhaarne, siis milline on kolmnurkade DEF ja ABC pindalade suhe?

6. Pagarifirma valmistab kooke, mille peal võib kaunistuseks olla kreemi, šokolaadi ja vahvlit. Lõpumüügi puhuks tegi firma kaks pakkumist.

A. Annan sulle kõik koogid, mille peal on korraga kreemi ja šokolaadi, ning lisan veel juurde kõik koogid, mille peal kreemi ei ole, aga on vahvlit.

B. Annan sulle kõik koogid, mille peal on šokolaadi, ning lisan veel juurde kõik koogid, mille peal šokolaadi ei ole, aga on vahvlit.

Mõlema pakkumise hind on sama. Kumb pakkumine oleks soodsam vastu võtta, kui eesmärgiks on saada sama raha eest võimalikult palju kooke?

Eesti LIX matemaatikaolümpiaad

28. jaanuar 2012 Piirkonnavoor **11. klass**

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Basseini täidetakse kahe toru kaudu. Kui avatud on ainult esimene toru, siis kulub basseini täitmiseks s tundi kauem aega, võrreldes sellega, kui avatud on mõlemad torud. Analoogiliselt, kui avatud on ainult teine toru, siis kulub basseini täitmiseks t tundi kauem aega, võrreldes sellega, kui avatud on mõlemad torud. Kui kaua aega kulub basseini täitmiseks siis, kui mõlemad torud on avatud?

2. Leia kõik sellised positiivsed reaalarvud a, mille korral sirgel võrrandiga $2a^2x + ay + 1 = 0$ ja paraboolil võrrandiga $y = 2a^2x^2 + ax + 1$ leidub täpselt üks ühine punkt.

3. Kas iga reaalarvu x korral kehtib $\sin(\sin x + \cos x) < 1$? (Trigonomeetriliste funktsioonide argumendid on radiaanides.)

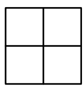
4. Leia kõik positiivsete täisarvude kolmikud (a, b, c), mille korral $a \leqslant b \leqslant c$ ning $a + b + c$ jagub nii a-ga, b-ga kui ka c-ga.

5. Nimetame nelinurka *mitmekesiseks*, kui tema nurkade seas leiduvad nii teravnurk, täisnurk kui ka nürinurk.

a) Leia kõik võimalused, kui suur saab olla mitmekesise nelinurga neljas nurk.

b) Kas iga nelinurk, mis sisaldab täisnurka, kuid pole mitmekesine, on ruut?

6. Ruudustikule mõõtmetega $m \times n$ paigutatakse joonisel näidatud kujundeid mõõtmetega 2×2. Kujundid võivad üksteisega kattuda ning iga kujund peab katma täpselt neli ruudustiku ruutu. Milliste mõõtmete m ja n korral saab ruudustiku katta nii, et iga ruut on kaetud ühe ja sama nullist suurema arvu kujunditega?



Eesti LIX matemaatikaolümpiaad

28. jaanuar 2012 Piirkonnavoor **12. klass**

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Kumb on suurem, kas $\ln 2011 + \ln 2013$ või $2 \ln 2012$?

2. Kaks ruutparabooli, mille võrrandite ruutliikmete kordajad on võrdsed, lõikuvad koordinaatide alguspunktis. Esimese parabooli puutuja tõus selles punktis on 12 ning teise parabooli puutuja tõus 13. Leia teise parabooli puutuja tõusu absoluutväärtus punktis, mille y-koordinaat võrdub esimese parabooli haripunkti y-koordinaadiga.

3. Karu hakkab liikuma metsalagendiku keskpunktist ühtlase kiirusega. Ta liigub ühe meetri ida suunas, siis pool meetrit põhja suunas, siis veerand meetrit lääne suunas, siis üks kaheksandik meetrit lõuna suunas, siis üks kuueteistkümnendik meetrit ida suunas jne. Millisesse punkti karu lõpuks jõuab?

4. Antud on võrdhaarne kolmnurk ABC tipunurgaga $\angle A$. Tipust C tõmmatakse kolmnurga ABC ümberringjoonele puutuja, mis lõikab sirget AB punktis D. Olgu E nurga DAC poolitaja lõikepunkt sirgega CD. Leia kõik tipunurgad $\angle A$, mille korral kehtib võrdus $\angle CEA = \angle CAB$.

5. Antud arvude d ja a korral defineerime jada (b_n), kus $b_0 = a$ ja iga $n \geqslant 1$ korral

$$b_n = \begin{cases} \dfrac{b_{n-1}}{2}, & \text{kui } b_{n-1} \text{ on paaris,} \\ 4b_{n-1} + d, & \text{kui } b_{n-1} \text{ on paaritu.} \end{cases}$$

Leia kõik mittenegatiivsed täisarvud d, mille korral leidub positiivne täisarv a nii, et jada (b_n) on alates mingist kohast perioodiline.

6. Seina peal on üksteise kõrval reas teatav arv nuppe. Alati, kui mõni nupp alla vajutada, jääb see nupp alla ning kõik temast paremal asuvad nupud liiguvad üles. Pipi ja Kange Adolf vajutavad kordamööda nuppe, mis pole parajasti all. Alustab Pipi ja see, kes ei saa enam käiku teha, kaotab. Alguses on kõik nupud üleval. Kas kellelgi nendest mängijatest leidub võitev strateegia ja kui leidub, siis kellel?

LIX Олимпиада Эстонии по математике

28 января 2012 г. Региональный тур **7 класс**

I часть. *Время, отводимое для решения: 40 минут.*
На этом листке написать только ответы, для решения можно использовать дополнительную бумагу.
Верный ответ каждой задачи даёт 2 балла.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. При расчёте за товар покупатель отдаёт кассиру 19 стоевровых и 16 десятиевровых банкнот и получает сдачу в виде 48 одноевровых монет. По крайней мере сколько одноевровых монет должен был бы иметь покупатель, чтобы произвести оплату за товар только ими?

. . . .

2. Если из числа 2012 вычесть четырёхзначное число, полученное записью цифр числа 2012 в обратном порядке, то полученная разность будет отрицательной. Найти наименьшее натуральное число, большее числа 2012, при котором полученная описанным выше способом разность двух четырёхзначных чисел будет положительной. (Число не начинается с цифры 0.)

. . . .

3. Пусть a, b и c такие последовательные нечётные натуральные числа, что $a > b > c$. Найти значение выражения $(a - b)(b - c)(c - a)$.

. . . .

4. Все слагаемые суммы $2012 + 2012 + \ldots + 2012$ равны между собой. Найти наименьшее возможное количество слагаемых, при котором эта сумма делится на число 20.

. . . .

5. В клетки верхнего ряда клетчатой доски записали несколько раз подряд слово KLASS, а в клетки нижнего ряда записали несколько раз подряд слово KASS. В каждую клетку записали по одной букве и не оставили пустых клеток. Всего на клетчатой доске было 100 столбцов. Сколько всего оказалось столбцов, в обеих клетках которых записаны буквы K?

K	L	A	S	S	K	L	A	…
K	A	S	S	K	A	S	S	…

. . . .

6. Маша складывает длины каких-то трёх сторон прямоугольника и в результате получает 20 см. Юра складывает длины каких-то трёх сторон этого же прямоугольника и в результате получает 22 см. Найти периметр этого прямоугольника.

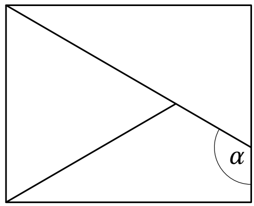
. . . .

7. Найти площадь покрашенной тёмным цветом грани прямоугольного параллелепипеда, если объём этого параллелепипеда равен 8 дм^3, а длина ребра указана на рисунке в сантиметрах.

40

. . . .

8. На одной из сторон прямоугольника нарисовали равносторонний треугольник. Одну из сторон этого треугольника продлили так, как показано на рисунке. Найти величину тупого угла α, который образовался между продолжением стороны треугольника и стороной прямоугольника.

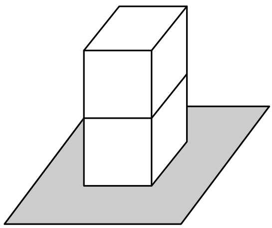


. . . .

9. Все углы тупоугольного треугольника имеют различные величины, причём величина каждого из них равна некоторому целому числу градусов. Сколько различных значений может иметь величина тупого угла этого треугольника?

. . . .

10. На поворачивающийся стол друг на друга поставили два игральных кубика так, как показано на рисунке. На гранях каждого кубика записаны натуральные числа от 1 до 6 так, что сумма чисел на противолежащих гранях кубика равна 7. Найти наибольшее возможное значение суммы чисел, записанных на девяти видимых гранях.



. . . .

LIX Олимпиада Эстонии по математике

28 января 2012 г. Региональный тур **8 класс**

I часть. *Время, отводимое для решения: 40 минут.*
На этом листке написать только ответы, для решения можно использовать дополнительную бумагу.
Верный ответ каждой задачи даёт 2 балла.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Число 2012 имеет следующее свойство: его любые три рядом стоящие цифры являются различными последовательными целыми числами в каком-то порядке. Найти наименьшее пятизначное натуральное число, обладающее таким же свойством.

. . . .

2. Сумма двух целых чисел равна 1, а их произведение равно -6. Найти наибольшее возможное частное этих чисел.

. . . .

3. В декабре цену товара подняли на 25%, а в январе опустили обратно до прежнего уровня. На сколько процентов уменьшилась цена товара в январе по сравнению с декабрём?

. . . .

4. На доске записали все натуральные числа от 1 до n. Затем с доски стёрли все числа, которые делятся хотя бы на одно из чисел 2 и 3. На доске осталось 5 чисел. Найти наибольшее возможное значение числа n.

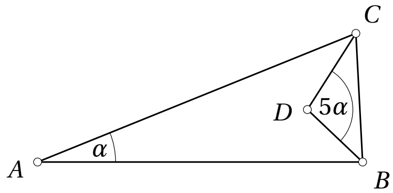
. . . .

5. В клетки верхнего ряда клетчатой доски записали несколько раз подряд слово RUUT, а в клетки нижнего ряда записали несколько раз подряд слово RISTKÜLIK. В каждую клетку записали по одной букве и не оставили пустых клеток. В обеих клетках первого столбца записаны буквы R. Найти порядковый номер следующего столбца, в обеих клетках которого записаны буквы R.

R	U	U	T	R	U	U	T	R	U	…
R	I	S	T	K	Ü	L	I	K	R	…

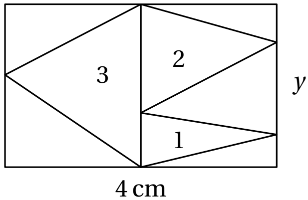
. . . .

6. Найти величину α угла BAC треугольника ABC, если отрезки BD и CD делят углы этого треугольника пополам, а величина угла BDC равна 5α.



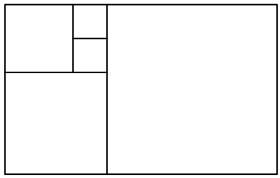
. . . .

7. Прямоугольник поделён на два прямоугольника, которые в свою очередь поделены на треугольники. На рисунке внутри треугольников записаны их площади в квадратных сантиметрах. Длина одной стороны прямоугольника равна 4 см. Найти длину y другой стороны прямоугольника.



. . . .

8. Прямоугольник поделён на квадраты так, как показано на рисунке. Площадь наименьшего квадрата равна 1 квадратной единице. Найти площадь прямоугольника.

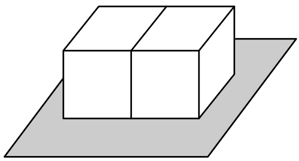


. . . .

9. Все углы остроугольного треугольника имеют различные величины, причём величина каждого из них равна некоторому целому числу градусов. Сколько различных значений может иметь величина наибольшего угла этого треугольника?

. . . .

10. На поворачивающийся стол рядом друг с другом поставили два игральных кубика так, как показано на рисунке. На гранях каждого кубика записаны натуральные числа от 1 до 6 так, что сумма чисел на противолежащих гранях кубика равна 7. Найти наибольшее возможное значение суммы чисел, записанных на восьми видимых гранях.



. . . .

LIX Олимпиада Эстонии по математике

28 января 2012 г. Региональный тур **9 класс**

I часть. *Время, отводимое для решения: 40 минут.*
На этом листке написать только ответы, для решения можно использовать дополнительную бумагу.
Верный ответ каждой задачи даёт 2 балла.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Число 2012 имеет следующее свойство: если выписать суммы каждых двух рядом стоящих цифр, то получатся суммы 2, 1 и 3, которые являются тремя последовательными целыми числами в каком-то порядке. Найти наименьшее пятизначное натуральное число, обладающее похожим свойством, то есть суммы каждых двух рядом стоящих цифр являются четырьмя последовательными целыми числами в каком-то порядке.

. . . .

2. *Палиндромом* называется число, которое при прочтении справа налево даёт то же самое число. Например, числа 353 и 5445 являются палиндромами. Найти наименьшее натуральное число k, при котором число $k + 2573$ является палиндромом.

. . . .

3. Произведение трёх различных целых чисел равно 12, а их сумма равна 3. Найти наименьшее возможное значение наименьшего из этих трёх чисел.

. . . .

4. Пусть a и b – положительные числа. Известно, что число a составляет b процентов от числа b, а число b составляет a процентов от числа a. Найти сумму чисел a и b.

. . . .

5. В клетки верхнего ряда клетчатой доски записали несколько раз подряд слово MATEMAATIKA, а в клетки нижнего ряда записали несколько раз подряд слово FÜÜSIKA. В каждую клетку записали по одной букве и не оставили пустых клеток. Найти порядковый номер столбца, в котором впервые записаны буквы K в обеих клетках.

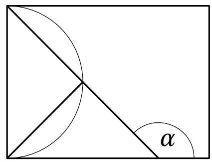
M	A	T	E	M	A	A	T	I	K	A	M	A	T	…
F	Ü	Ü	S	I	K	A	F	Ü	Ü	S	I	K	A	…

. . . .

6. Все цифры числа 324 различны, а само число делится на каждую свою цифру. Найти наименьшее трёхзначное число, обладающее таким свойством.

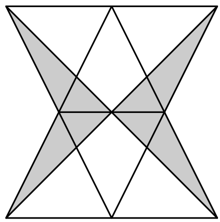
. . . .

7. Более короткая сторона прямоугольника является диаметром полуокружности и основанием равнобедренного треугольника. Вершина равнобедренного треугольника, лежащая напротив его основания, лежит на этой полуокружности. Найти величину тупого угла α, образованного продолжением одного ребра треугольника и стороной прямоугольника.



. . . .

8. Показанная на рисунке фигура состоит из шести равных равнобедренных треугольников. Во сколько раз площадь белой части фигуры больше площади окрашенной тёмным цветом части фигуры?

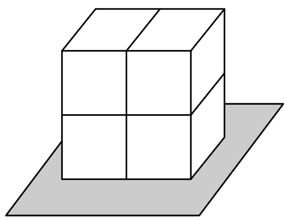


. . . .

9. Все углы треугольника имеют различные величины, причём величина каждого из них равна некоторому целому числу градусов. Величины наибольшего и наименьшего углов этого треугольника отличаются от величины среднего угла ровно на одно и то же число градусов. Сколько различных значений может иметь величина наименьшего угла этого треугольника?

. . . .

10. На поворачивающийся стол поставили четыре игральных кубика так, как показано на рисунке. На гранях каждого кубика записаны натуральные числа от 1 до 6 так, что сумма чисел на противолежащих гранях кубика равна 7. Найти наибольшее возможное значение суммы чисел, записанных на 14-ти видимых гранях.



. . . .

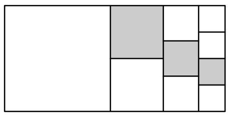
LIX Олимпиада Эстонии по математике

28 января 2012 г. Региональный тур **7 класс**

II часть. *Время, отводимое для решения: 2 часа.*
Решения задач написать на отдельном листе.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов. Написать только ответ недостаточно!
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Четыре семьи решили совместно купить ковш для уборки снега и поделить его стоимость между семьями в равных долях. В последний момент одна из семей отказалась от покупки, из-за чего каждой из оставшихся трёх семей нужно было бы добавить к изначальной сумме по 105 евро. К счастью удалось найти две новые семьи, которые согласились участвовать в покупке ковша. Стоимость ковша поделили между пятью семьями в равных долях. Какую сумму заплатила каждая из семей?

2. Прямоугольник поделён на квадраты. Периметр наибольшего квадрата равен 4 единицам длины. Найти периметр и площадь окрашенной тёмным цветом фигуры.



3. В примере

$$\text{KAKS} + \text{KOLM} = \text{VIIS}$$

различным буквам соответствуют различные цифры, а одинаковым буквам — одинаковые цифры. Найти наибольшее четырёхзначное число, которое может соответствовать слову VIIS.

LIX Олимпиада Эстонии по математике

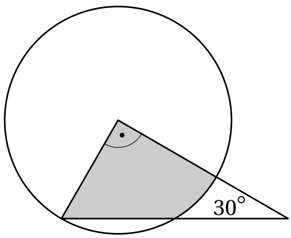
28 января 2012 г. Региональный тур **8 класс**

II часть. *Время, отводимое для решения: 2 часа.*
Решения задач написать на отдельном листе.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов. Написать только ответ недостаточно!
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. В 2010-м году количество картофелин, выкопанных Антошкой, было в два раза больше количества картофелин, выкопанных Петрушкой. Зато в 2011-м году количество выкопанных Петрушкой картофелин оказалось в два раза больше количества картофелин, выкопанных Антошкой. За два этих года Антошке удалось выкопать всего 520 картофелин, что оказалось на 46 картофелин меньше количества картофелин, выкопанных Петрушкой за эти же два года. Сколько картофелин выкопал Антошка в 2010-м году?

2. Найти все трёхзначные натуральные числа, которые делятся на числа 4, 5 и 6, но не делятся на числа 7, 8 и 9.

3. Длина гипотенузы прямоугольного треугольника равна 10 см, а величина одного из его острых углов равна 30°. Вершина прямого угла является центром окружности, которая проходит через крайнюю точку меньшего катета. Найти точный периметр окрашенной тёмным цветом фигуры.



LIX Олимпиада Эстонии по математике

28 января 2012 г. Региональный тур **9 класс**

II часть. *Время, отводимое для решения: 4 часа.*
Решения задач написать на отдельном листе.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов. Написать только ответ недостаточно!
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Учитель записывает на доске натуральные числа a и b, которые оба больше единицы, и даёт Мише следующее задание.

> Запиши после чисел их произведение. Затем после двух последних чисел на доске запиши их сумму. Потом после двух последних чисел запиши их произведение. Затем после двух последних чисел запиши их сумму, и так далее.

Миша начал выполнять это задание. Возможно ли, что в какой-то момент Миша запишет на доске простое число?

2. Найти все значения коэффициента p, при которых разность корней уравнения $x^2 + px + 12 = 0$ равна 1.

3. Пусть K и L — соответственно середины сторон BC и AD параллелограмма $ABCD$. Известно, что $AK \perp BL$ и $AC \perp CD$. Найти величины углов параллелограмма $ABCD$.

4. Ксюша записала на листке бумаги несколько чисел, сумма которых была 0, причём каждое число равнялось 2, 1, -1 или -2. При этом оказалось, что чисел 2 ровно столько же, сколько и чисел -1, а чисел 1 ровно столько же, сколько и чисел -2. Затем этот листок попал к младшей сестричке Ксюши Олесе, которая заменила все числа 1 числами -1, а все числа -1 числами 1. Доказать, что сумма чисел на листке бумаги по-прежнему 0.

LIX Олимпиада Эстонии по математике

28 января 2012 г. Региональный тур **10 класс**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Действительные числа a, b, c, d удовлетворяют равенствам $ac+bd+ad+bc=28$ и $c+d=4$. Найти значение выражения $a+b+c+d$.

2. Решить уравнение $\Big|\big||x|-2x\big|+3x\Big|=2012$.

3. В магазине продаются два телевизора. У одного из них отношение ширины и высоты экрана $4:3$, а у другого $16:9$, но диагонали экрана у обоих одинаковой длины. Пытаясь определиться, какой телевизор купить, папа утверждает, что ширина экрана второго телевизора превышает ширину экрана первого телевизора меньше, чем на 10%. Прав ли папа?

4. Сколько существует комплектов целых чисел (a,b,c), которые удовлетворяют уравнению $(a+b)(b+c)(c+a)=123456789$?

5. Вписанная окружность прямоугольного треугольника ABC касается сторон треугольника в точках D, E и F.

а) Доказать, что треугольник DEF не является равносторонним.

б) Если треугольник DEF равнобедренный, то каковы величины углов треугольника DEF?

в) Если треугольник DEF равнобедренный, то каково отношение площадей треугольников DEF и ABC?

6. Кондитерская фирма изготовляет пирожные, которые могут быть с кремом, шоколадом и вафлями. Для распродажи фирма сделала два предложения.

A. Отдадим все пирожные, которые одновременно с кремом и шоколадом, и добавим к ним все пирожные, которые без крема, но с вафлями.

B. Отдадим все пирожные, которые с шоколадом, и добавим к ним все пирожные, которые без шоколада, но с вафлями.

Цена обоих предложений одинакова. Какое предложение выгоднее принять, если целью является получить за одни и те же деньги как можно больше пирожных?

LIX Олимпиада Эстонии по математике

28 января 2012 г. Региональный тур **11 класс**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Бассейн наполняется из двух труб. Если открыта только первая труба, то на заполнение бассейна уходит на a часов больше, чем если бы были открыты обе трубы. Аналогично, если открыта только вторая труба, то на заполнение бассейна уходит на b часов больше, чем если бы были открыты обе трубы. За какое время заполняется бассейн, если открыты обе трубы?

2. Найти все положительные действительные числа a, при которых у прямой $2a^2x + ay + 1 = 0$ и параболы $y = 2a^2x^2 + ax + 1$ найдётся ровно одна общая точка.

3. Верно ли, что для каждого действительного числа x выполняется $\sin(\sin x + \cos x) < 1$? (Аргументы тригонометрических функций в радианах.)

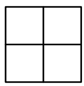
4. Найти все тройки положительных целых чисел (a, b, c), при которых $a \leqslant b \leqslant c$, и $a + b + c$ делится на a, на b и на c.

5. Назовём четырёхугольник *многоликим*, если среди его углов есть и острый, и прямой, и тупой углы.

а) Найти все возможные значения четвёртого угла многоликого четырёхугольника.

б) Верно ли, что если четырёхугольник не многоликий и имеет прямой угол, то он является квадратом?

6. На клетчатое поле размером $m \times n$ выкладывают фигуры размером 2×2, показанные на рисунке. Фигуры могут перекрывать одна другую, но каждая фигура должна закрывать ровно четыре клетки поля. При каких m и n есть возможность покрыть поле так, чтобы каждая клетка была покрыта одинаковым отличным от нуля количеством фигур?



LIX Олимпиада Эстонии по математике

28 января 2012 г. Региональный тур **12 класс**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Что больше, $\ln 2011 + \ln 2013$ или $2\ln 2012$?

2. Две квадратичных параболы, множители квадратичных членов которых равны, пересекаются в начале координат. В этой точке коэффициент наклона касательной к графику первой параболы равен 12, а к графику второй параболы равен 13. Найти модуль коэффициента наклона касательной к графику второй параболы в точке, y-координата которой равна y-координате вершины первой параболы.

3. Медведь начинает двигаться из центра лесной поляны с равномерной скоростью. Он движется один метр на восток, затем пол метра на север, затем четверть метра на запад, затем одну восьмую метра на юг, затем одну шестнадцатую метра на восток и так далее. В какую точку в конце концов попадёт медведь?

4. Пусть ABC — равнобедренный треугольник, где $\angle A$ лежит между равными сторонами. Касательная к описанной вокруг ABC окружности, проведённая из точки C, пересекает прямую AB в точке D. Биссектриса угла $\angle DAC$ пересекает прямую CD в точке E. Найти все значения угла $\angle A$, при которых выполняется равенство $\angle CEA = \angle CAB$.

5. При заданных числах d и a определим последовательность (b_n), где $b_0 = a$ и для всех $n \geqslant 1$

$$b_n = \begin{cases} \dfrac{b_{n-1}}{2}, & \text{если } b_{n-1} \text{ чётное,} \\ 4b_{n-1} + d, & \text{если } b_{n-1} \text{ нечётное.} \end{cases}$$

Найти все неотрицательные целые числа d, при которых найдётся положительное целое число a такое, что последовательность (b_n), начиная с какого-то места, окажется периодической.

6. На стене рядом друг с другом находится определённое число кнопок. Если нажать на какую-либо потухшую кнопку, то эта кнопка загорается, а все кнопки справа от неё потухают. Пеппи и Силач Адольф по очереди нажимают на потухшие кнопки. Начинает Пеппи, а тот, кто больше не может сделать хода, проигрывает. В начале все кнопки потухшие. Найдётся ли у кого-либо из игроков выигрышная стратегия, и если найдётся, то у кого?

Eesti LIX matemaatikaolümpiaad

28. jaanuar 2012 Piirkonnavoor **7. klass**

I osa vastused

1. 2012.

2. 2021.

3. −16.

4. 5.

5. 5.

6. 28 cm.

7. 2 dm^2.

8. 120°.

9. 87.

10. 34.

Lahendused

1. Ostja maksab kauba eest $19 \cdot 100 + 16 \cdot 10 - 48 = 2012$ eurot. Seega peaks ostjal olema vähemalt 2012 üheeurost münti, et maksta ainult nendega.

2. Vaadeldav vahe on positiivne, kui algne arv on suurem kui sellest numbrite järjekorra ümberpööramisel saadav arv. Selleks ei tohi algse arvu üheliste number olla suurem kui tema tuhandeliste number, ning lisaks ei tohi üheliste number olla 0, sest siis algaks numbrite järjekorra ümberpööramisel saadav arv numbriga 0. Seega peab algse arvu üheliste number olema 1 või 2. Esimene selline 2012-st suurem arv on 2021, mis ka sobib: $2021 - 1202 = 819 > 0$.

3. Et järjestikused paaritud arvud erinevad teineteisest 2 võrra ning $a > b > c$, siis $a - b = 2$, $b - c = 2$ ja $c - a = -(a - c) = -4$. Nende korrutis on niisiis $2 \cdot 2 \cdot (-4) = -16$.

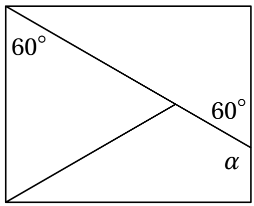
4. Olgu vaadeldavas summas n liidetavat, siis summa väärtus on $2012 \cdot n$. Paneme tähele, et $20 = 4 \cdot 5$, kus 5 on algarv. Et arv 2012 ei jagu 5-ga, siis selleks, et $2012 \cdot n$ jaguks 5-ga, peab n jaguma 5-ga. Kuna arv 2012 jagub 4-ga, siis tagab see tingimus ka summa $2012 \cdot n$ jagumise 20-ga. Vähim sobiv liidetavate arv on seega 5.

5. Ülemises reas kordub täht K iga 5 veeru järel ja alumises reas iga 4 veeru järel. Ruudustiku esimeses veerus on mõlemas reas K ning sama olukord kordub iga m veeru järel, kus $m = \text{VÜK}(4, 5)$. Et arvud 4 ja 5 on ühistegurita, siis nende vähim ühiskordne on $4 \cdot 5 = 20$, st tähed K on kohakuti veergudes 1, 21, 41, 61 ja 81, ehk 5 veerus.

6. Ristkülikul on 2 pikemat ja 2 lühemat külge. Et Jüri sai tulemuseks suurema arvu, pidi tema valitud külgede hulgas olema 2 pikemat ja 1 lühem külg, Mari valitud külgede hulgas aga 2 lühemat ja 1 pikem külg. Nende leitud pikkuste summa 20 cm + 22 cm = 42 cm on seega pikema ja lühema külje pikkuste summa kolmekordne, ristküliku ümbermõõt on aga pikema ja lühema külje pikkuste summa kahekordne. Ristküliku ümbermõõt on niisiis $\frac{2}{3} \cdot 42\ \text{cm} = 28\ \text{cm}$.

7. Joonisel märgitud serva pikkus on 40 cm = 4 dm. Et see serv on risttahuka tumedaks värvitud tahule tõmmatud kõrguseks, siis tumedaks värvitud tahu pindala on $\frac{8\ \text{dm}^3}{4\ \text{dm}} = 2\ \text{dm}^2$.

8. Võrdkülgse kolmnurga sisenurga suurus on 60°. Et ristküliku vastasküljed on paralleelsed, siis on otsitava nurga α kõrvunurga suurus samuti 60°, nagu joonisel 1 näidatud. Seega $\alpha = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.



Joonis 1

9. Täiskraadides esituv nürinurga suurus peab olema vähemalt 91 kraadi. Et kolmnurga kaks ülejäänud nurka on erineva suurusega ja neist kummagi suurus on samuti mingi täisarv kraade, siis nende suuruste summa on vähemalt $1 + 2 = 3$ kraadi. Nürinurga suurus saab seega olla 91 kraadi kuni 177 kraadi. Selles vahemikus on $177 - 91 + 1 = 87$ erinevat täisarvu. Need kõik on ka sobivad, sest kui nürinurga suurus on n kraadi, siis ülejäänud kahe nurga suurused võivad olla 1 kraad ja $180 - n - 1$ kraadi, kus $1 < 180 - n - 1 < n$.

10. Ühe täringu tahkudel olevate arvude summa on $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$, kahel täringul kokku 42. Nähtavad ei ole alumise täringu üks paar vastastahke, millel olevate arvude summa on 7, ning ülemise täringu üks tahk, millel olev arv on vähemalt 1. Seega on täringute nähtavatel tahkudel olevate arvude summa ülimalt $42 - 7 - 1 = 34$.

Eesti LIX matemaatikaolümpiaad

28. jaanuar 2012 Piirkonnavoor **8. klass**

I osa vastused

1. 10210.

2. $-\dfrac{2}{3}$.

3. 20%.

4. 16.

5. 37. veerus.

6. 20°.

7. 3 cm.

8. 40 ruutühikut.

9. 29.

10. 36.

Lahendused

1. Leiame ühekaupa selle viiekohalise arvu numbrid vasakult paremale, valides igal sammul vähima võimaliku numbri. Et arv ei alga 0-ga, on vähim võimalik esimene number 1; teine number saab olla 0 ja kolmas number peab siis olema 2, et nõutav tingimus oleks täidetud. Neljas number saab seejärel olla ainult 1; viies number võiks olla 0 või 3, millest valime 0.

2. Arvu -6 esitamiseks kahe täisarvulise teguri korrutisena on neli võimalust: $-6 = 1 \cdot (-6) = (-1) \cdot 6 = 2 \cdot (-3) = (-2) \cdot 3$. Tegurite summa 1 saame ainult siis, kui teguriteks võtta -2 ja 3. Võimalikud jagatised on niisiis $\dfrac{-2}{3} = -\dfrac{2}{3}$ ja $\dfrac{3}{-2} = -\dfrac{3}{2}$, millest suurem on $-\dfrac{2}{3}$.

3. Olgu a kauba esialgne hind. Siis pärast tõstmist on hind $1{,}25a$. Et hind pärast uut langetamist võrdub esialgse hinnaga a, siis hinnalangus on

$$\frac{1{,}25a - a}{1{,}25a} \cdot 100\% = \frac{0{,}25}{1{,}25} \cdot 100\% = 20\%.$$

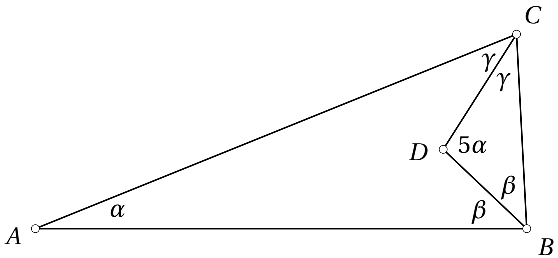
4. Tahvlile jäävad alles arvud, mis ei jagu 2-ga ega 3-ga. Kuus vähimat sellist naturaalarvu on 1, 5, 7, 11, 13 ja 17. Et tahvlile jääb alles 5 arvu, peab olema $n < 17$, st n suurim võimalik väärtus on 16.

5. Ülemises reas kordub täht R iga 4 veeru järel ja alumises reas iga 9 veeru järel. Ruudustiku esimeses veerus on mõlemas reas R ning sama olukord kordub iga m veeru järel, kus $m = \text{VÜK}(4, 9)$. Et arvud 4 ja 9 on ühistegurita, siis nende vähim ühiskordne on $4 \cdot 9 = 36$, st tähed R on järgmist korda kohakuti 37. veerus.

6. Olgu $\beta = \angle DBA = \angle DBC$ ning $\gamma = \angle DCA = \angle DCB$ (vt joonist 2). Kolmnurgast BDC leiame, et $5\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, kust $\beta + \gamma = 180^\circ - 5\alpha$. Kolmnurgast ABC saame nüüd, et $\alpha + 2\beta + 2\gamma = 180^\circ$, kust

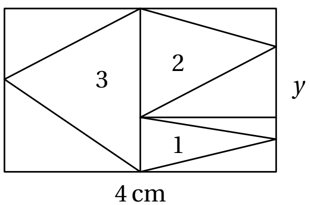
$$\alpha = 180^\circ - 2(\beta + \gamma) = 180^\circ - 2 \cdot (180^\circ - 5\alpha) = 10\alpha - 180^\circ,$$

st $9\alpha = 180^\circ$ ehk $\alpha = 20^\circ$.

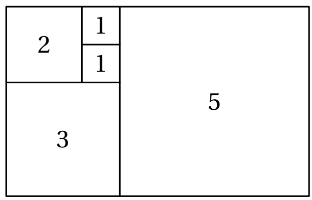


Joonis 2

7. Jaotame parempoolse ristküliku omakorda kaheks ristkülikuks, nagu näidatud joonisel 3. Suur ristkülik koosneb nüüd kolmest väiksemast ristkülikust, millest igaühe pindala on võrdne selle sees asuva kolmnurga kahekordse pindalaga. Suure ristküliku pindala on niisiis $6+4+2 = 12$ ruutsentimeetrit ning selle ristküliku teise külje pikkus on $\dfrac{12\ \text{cm}^2}{4\ \text{cm}} = 3$ cm.



Joonis 3



Joonis 4

8. Jooniselt 4 on näha, et ruutude küljepikkused on 1, 1, 2, 3 ja 5 ruutühikut. Ristküliku pindala on niisiis $1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 = 1 + 1 + 4 + 9 + 25 = 40$ ruutühikut.

9. Täiskraadides esituv teravnurga suurus saab olla ülimalt 89 kraadi. Teisalt peab kolmnurga suurim nurk olema suurem kui $\dfrac{180}{3} = 60$ kraadi. Suurima teravnurga suurus saab seega olla 61 kraadi kuni 89 kraadi. Selles vahemikus on $89 - 61 + 1 = 29$ erinevat täisarvu. Need kõik on ka sobivad, sest kui suurima teravnurga suurus on n kraadi, siis ülejäänud kahe nurga suurused võivad olla 60 kraadi ja $120 - n$ kraadi, kus $120 - n < 60 < n$.

10. Ühe täringu tahkudel olevate arvude summa on $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$, kahel täringul kokku 42. Kummalgi täringul on kaks mittenähtavat tahku, mis ei ole teineteise vastastahud – neil olevate arvude summa on vähemalt $1 + 2 = 3$. Seega on täringute nähtavatel tahkudel olevate arvude summa ülimalt $42 - 2 \cdot 3 = 36$.

I osa vastused

1. 10021.
2. 89.
3. -2.
4. 200.
5. 76. veerus.
6. 124.
7. 135°.
8. 2.
9. 59.
10. 62.

Lahendused

1. Leiame ühekaupa selle viiekohalise arvu numbrid vasakult paremale, valides igal sammul vähima võimaliku numbri. Et arv ei alga 0-ga, on vähim võimalik esimene number 1. Teine ja kolmas number saavad olla 0 – arvu esimese kahe numbri summa on siis 1 ning teise ja kolmanda numbri summa 0. Arvu neljas number ei saa olla 0 ega 1, sest siis summad korduksid, kuid saab olla 2, siis kolmanda ja neljanda numbri summa on 2. Kahe viimase numbri summa peab seega olema 3, st arvu viimaseks numbriks tuleb valida 1.

2. Vähim palindroom, mis on suurem arvust 2573, on 2662. Siit leiame, et $k = 2662 - 2573 = 89$.

3. Arvu 12 esitamisel kolme täisarvulise teguri korrutisena on tegurite absoluutväärtuste jaoks neli võimalust: $(1, 1, 12)$, $(1, 2, 6)$, $(1, 3, 4)$ ja $(2, 2, 3)$. Et tegurite summa 3 on paaritu, peab tegurite seas olema kas 1 või 3 paaritut arvu – nii jäävad järele absoluutväärtuste kolmikud $(1, 2, 6)$ ja $(2, 2, 3)$. Esimesest kolmikust saame summa 3 ainult siis, kui need tegurid on -1, -2 ja 6. Teisest kolmikust saame summa 3 ainult siis, kui tegurid on 2, -2 ja 3, ent nende korrutis on siis -12. Seega ongi ainus sobiv võimalus $12 = (-1) \cdot (-2) \cdot 6$ ning vähim tegur on siis -2.

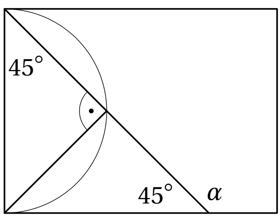
4. Oletame, et $b > a$, siis b protsenti arvust b on suurem kui a protsenti arvust a, st $a > b$ – vastuolu. Samamoodi saame vastuolu oletusest, et $b < a$. Järelikult $b = a$ ning arv a moodustab a protsenti iseendast, st $a = b = 100$ ja $a + b = 200$.

5. *Lahendus 1.* Ülemises reas esineb täht K esimest korda 10. veerus ja edasi iga 11 veeru järel, st veergudes numbritega $10+11k$, kus $k = 0, 1, \ldots$. Alumises reas esineb täht K esimest korda 6. veerus ja edasi iga 7 veeru järel, st veergudes numbritega $6 + 7m$, kus $m = 0, 1, \ldots$. Tähed K on mõlemas reas kohakuti, kui $10+11k = 6+7m$, ehk $11k+4 = 7m$. Vaadates järjest läbi arve kujul $11k + 4$ leiame, et esimesena jagub neist 7-ga arv $70 = 11 \cdot 6 + 4$, st $k = 6$. Otsitava veeru number on niisiis $10 + 11 \cdot 6 = 76$.

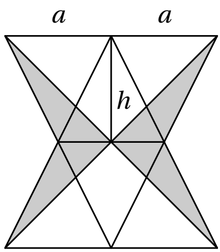
Lahendus 2. Ülemises reas kordub täht K iga 11 veeru järel ja alumises reas iga 7 veeru järel. Täiendame ruudustikku vasakule kahe veeru võrra, olgu need numbritega 0 ja -1. Siis veerus numbriga -1 on mõlemas reas K ning sama olukord kordub iga m veeru järel, kus $m = \text{VÜK}(11, 7)$. Et arvud 11 ja 7 on ühistegurita, siis nende vähim ühiskordne on $11 \cdot 7 = 77$, st järgmist korda on tähed K kohakuti veerus numbriga $-1 + 77 = 76$.

6. Leiame ühekaupa selle kolmekohalise arvu numbrid vasakult paremale, valides igal sammul vähima võimaliku numbri. Et 0-ga ei saa jagada, on vähim võimalik sajaliste number 1; vähim võimalik kümneliste number on siis 2 ning üheliste number peab olema paaris, et saadav arv jaguks 2-ga. Seega on vähim võimalik üheliste number 4 ning saadav arv 124 on ka nõutava omadusega.

7. Et võrdhaarse kolmnurga aluseks on poolringjoone diameeter ja vastastipp asub poolringjoonel, siis tipunurga suurus on 90° (diameetrile toetuv piirdenurk). Võrdhaarse kolmnurga alusnurk on seega 45° ning nurga α kõrvunurk on $180^\circ - 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$ (vt joonist 5), kust $\alpha = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$.



Joonis 5



Joonis 6

8. Olgu iga võrdhaarse kolmnurga aluse pikkus a ja kõrgus h (vt joonist 6). Kogu kujundi pindala on siis $6 \cdot \frac{ah}{2} = 3ah$. Valge osa koosneb kahest kolmnurgast alusega $2a$ ja kõrgusega h, st selle pindala on $2 \cdot \frac{2ah}{2} = 2ah$, mis moodustab kaks kolmandikku kogu kujundi pindalast. Tumedaks värvitud osa moodustab niisiis ühe kolmandiku kogu kujundi pindalast, ehk valge osa on tumedaks värvitud osast 2 korda suurem.

9. Olgu suuruselt keskmine nurk n kraadi, siis vähim ja suurim nurk on vastavalt $n-k$ ja $n+k$ kraadi, kus k on mingi positiivne täisarv. Niisiis $180 = n + (n-k) + n + k = 3n$, kust $n = 60$. Vähima nurga suurus saab seega olla 1 kuni 59 kraadi, ning need kõik on ka ilmselt võimalikud.

10. Ühe täringu tahkudel olevate arvude summa on $1+2+3+4+5+6 = 21$, neljal täringul kokku 84. Kahel alumisel täringul ei ole kummalgi nähtavad üks paar vastastahke, millel olevate arvude summa on 7, ning lisaks üks tahk, millel olev arv on vähemalt 1. Kahel ülemisel täringul on kummalgi kaks mittenähtavat tahku, mis ei ole teineteise vastastahud, neil olevate arvude summa on vähemalt $1+2 = 3$. Seega on täringute nähtavatel tahkudel olevate arvude summa ülimalt $84 - 2 \cdot (7+1) - 2 \cdot (1+2) = 84 - 16 - 6 = 62$.

Eesti LIX matemaatikaolümpiaad

28. jaanuar 2012 Piirkonnavoor **7. klass**

II osa lahendused

1. *Vastus:* 252 eurot.

Lahendus 1. Neljanda pere osamaks oli $3 \cdot 105 = 315$ eurot. Et lumesaha maksumus oli jaotatud nelja pere peale võrdselt, siis lumesahk maksis $4 \cdot 315 = 1260$ eurot. Viie pere peale ostes pidi üks pere maksma $1260 : 5 = 252$ eurot.

Lahendus 2. Olgu x lumesaha hind eurodes. Siis esialgse plaani kohaselt pidi iga pere maksma $\frac{x}{4}$ eurot. Pärast ühe pere loobumist pidi iga ülejäänud pere maksma $\frac{x}{3}$ eurot. Vastavalt ülesande tingimustele

$$\frac{x}{3} = \frac{x}{4} + 105.$$

Korrutades võrduse pooli 12-ga, saame $4x = 3x + 1260$ ehk $x = 1260$. Seega maksis lumesahk 1260 eurot. Viie pere peale ostes maksaks üks pere $1260 : 5 = 252$ eurot.

2. *Vastus:* ümbermõõt $\frac{11}{3}$ pikkusühikut, pindala $\frac{61}{144}$ ruutühikut.

Lahendus 1. Suurima ruudu küljepikkus on 1. Seega väiksemate ruutude küljepikkused on $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ ja $\frac{1}{4}$. Tumedaks värvitud kujund koosneb neist kolmest ruudust, seega kujundi pindala on $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{61}{144}$.

Tumedaks värvitud kujundit piiravate horisontaalsete lõikude pikkuste summa on $2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) = \frac{13}{6}$, vertikaalsete lõikude pikkuste summa aga $2 \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{2}$. Kujundi ümbermõõt on seega $\frac{13}{6} + \frac{3}{2} = \frac{11}{3}$.

Lahendus 2. Tumedaks värvitud ruutude ümbermõõdud eraldi võetuna on 2, $\frac{4}{3}$ ja 1, mis summaks annavad $\frac{13}{3}$. Sellest tuleb lahutada ühiste piirilõikude kogupikkus. Et neljandas veerus tumedaks värvitud ruudu ülemine serv on kohakuti teises veerus tumedaks värvitud veeru alumise servaga, siis kahe piirilõigu pikkuste summa võrdub kolmanda veeru ruudu küljepikkusega $\frac{1}{3}$. Et aga igas ühises piirilõigus kohtuvad kaks ruutu, on tühistuvate piirilõikude kogupikkus $2 \cdot \frac{1}{3}$. Tumedaks värvitud kujundi ümbermõõt on seega $\frac{13}{3} - \frac{2}{3}$ ehk $\frac{11}{3}$. Kujundi pindala arvutatakse nagu lahenduses 1.

3. *Vastus:* 9556.

Et $S + M$ lõpeb numbriga S, siis $M = 0$. Suurim neljakohaline arv tekib siis, kui $V = 9$, sel juhul $K = 4$ ning eelmisest järgust peab tekkima ülekanne. Et A ja O on erinevad numbrid ning $V = 9$, siis A ja O suurimad võimalikud väärtused on 8 ja 7 (mingis järjekorras) ning seetõttu kas $I = 6$, kui eelmisest järgust tekib ülekanne, või $I = 5$, kui ülekannet ei teki. Kui oleks $I = 6$, siis peaks olema $K + L = 16$ ehk $4 + L = 16$, mis on võimatu. Järelikult $I = 5$. Siis $L = 1$. Tähe S jaoks on suurim vaba number 6. Kokkuvõttes oleme saanud, et suurim neljakohaline arv, mis vastab sõnale VIIS, on 9556.

II osa lahendused

1. *Vastus:* 316.

   Lahendus 1. Olgu x Petsi kasvatatud kartulite arv aastal 2010. Siis Atsi kasvatatud kartulite arv aastal 2010 oli $2x$ ning aastal 2011 $520-2x$. Petsi kasvatatud kartulite arv aastal 2011 oli $2\cdot(520-2x) = 1040-4x$ ning aastatel 2010 ja 2011 kokku $x+1040-4x = 1040-3x$. Seega saame võrrandi $1040-3x = 520+46$, millest $x = 158$. Aastal 2010 kasvatas Ats $2x = 316$ kartulit.

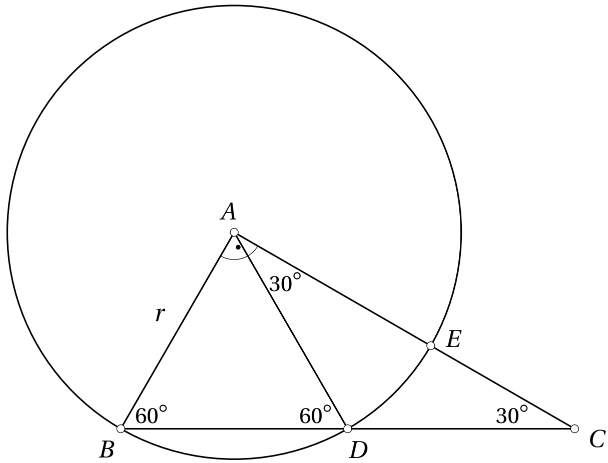
   Lahendus 2. Olgu x_1 ja x_2 Atsi kasvatatud kartulite arv aastatel 2010 ja 2011 ning y_1 ja y_2 Petsi kasvatatud kartulite arv vastavatel aastatel. Ülesande tingimustest saame võrrandisüsteemi

$$\begin{aligned} x_1 &= 2y_1 \\ y_2 &= 2x_2 \\ x_1 + x_2 &= 520 \\ y_1 + y_2 &= 520 + 46. \end{aligned}$$

   Lahutades teisest võrrandist esimese, saame $y_2 - x_1 = 2(x_2 - y_1)$. Lahutades neljandast võrrandist kolmanda, saame $y_1 + y_2 - x_1 - x_2 = 46$, millest $y_2 - x_1 = x_2 - y_1 + 46$. Seega $2(x_2 - y_1) = x_2 - y_1 + 46$, kust $x_2 - y_1 = 46$ ning $y_2 - x_1 = 46 + 46 = 92$. Nüüd saame $(x_2 + y_2) - (x_1 + y_1) = 46 + 92 = 138$. Esialgse võrrandisüsteemi kolmanda ja neljanda võrrandi liitmisel aga tekib $(x_2 + y_2) + (x_1 + y_1) = 1086$. Lahutades sellest seosest eelmise, saame $2(x_1 + y_1) = 1086 - 138 = 948$. Asendades $2y_1$ siia algse süsteemi esimesest võrrandist, saame omakorda $2x_1 + x_1 = 948$ ehk $3x_1 = 948$, kust $x_1 = 316$.

2. *Vastus:* 300, 660 ja 780.

   Vähim positiivne täisarv, mis jagub arvudega 4, 5 ja 6, on nende arvude vähim ühiskordne 60. Sobivad kolmekohalised arvud avalduvad seetõttu kujul $60k$, kus k on selline täisarv, et $2 \leqslant k \leqslant 16$. Jätame neist arvudest välja sellised, mis jaguvad vähemalt ühega arvudest 7, 8 ja 9. Arv $60k$ jagub 8-ga parajasti siis, kui k on paarisarv. Seega jäävad alles vaid paaritud arvud k. Arvu $60k$ jagub arvuga 7 parajasti siis, kui k jagub 7-ga, seega jääb paaritutest arvudest välja k väärtus 7. Arv $60k$ jagub arvuga 9 parajasti siis, kui k jagub 3-ga. Seega langevad ära k väärtused 3, 9 ja 15. Järelikult sobivad k väärtused 5, 11 ja 13, millest saame otsitavad arvud 300, 660 ja 780.



Joonis 7

3. *Vastus:* $15 + \dfrac{5\pi}{6}$ cm.

Tähistame punktid nii, nagu näidatud joonisel 7. Tumedaks värvitud kujund on piiratud kahe raadiusega, lõiguga BD ja ringjoone kaarega DE. Leiame nende osade pikkused. Olgu r ringjoone raadius. Antud täisnurkse kolmnurga teine teravnurk $\angle ABC$ on suurusega $90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$. Et see nurk on ühtlasi võrdhaarse kolmnurga ABD alusnurk, siis ka $\angle ADB = 60^\circ$. Seega on ABD võrdkülgne kolmnurk ning $|BD| = r$. Nurga EAD suurus on $90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$. Seetõttu on kolmnurk ADC võrdhaarne. Järelikult $|DC| = |AD| = r$. Seega $|BC| = |BD| + |DC| = 2r$, millest $r = 5$ cm. Lõigud EA, AB ja BD on seega kõik pikkusega 5 cm. Et kaarele DE vastab kesknurk suurusega 30°, siis kaare DE pikkus on $\dfrac{30}{360} \cdot 2\pi r = \dfrac{5\pi}{6}$ cm. Kujundi ümbermõõt on seega $3 \cdot 5 + \dfrac{5\pi}{6} = 15 + \dfrac{5\pi}{6}$ cm.

II osa lahendused

1. *Vastus:* ei.

Lahendus 1. Pärast esimest operatsiooni on kaks viimast tahvlil olevat arvu b ja ab. Seega sõltumata sellest, kas järgmised operatsioonid on korrutamised või liitmised, jaguvad kõik saadavad arvud b-ga. Et iga Mihkli kirjutatud arv on eelmisest suurem, on kõik Mihkli kirjutatud arvud b-st suuremad. Järelikult ei ole ükski neist algarv.

Lahendus 2. Et a ja b on ühest suuremad, on ka kõigi korrutamiste ja liitmiste tulemused ühest suuremad. Seega korrutamistel on teguriteks alati ühest suuremad arvud, mistõttu korrutamised tulemuseks algarvu ei anna. Vaatame suvalist liitmise sammu. Et vahetult enne seda sooritati korrutamine, on liidetavateks mingid ühest suuremad arvud kujul y ja xy (x on arv, mis oli tahvlil enne y-t). Nende summa on $y + xy$ ehk $y(1 + x)$, kus mõlemad tegurid on 1-st suuremad. Järelikult ei teki ka liitmisel algarvu.

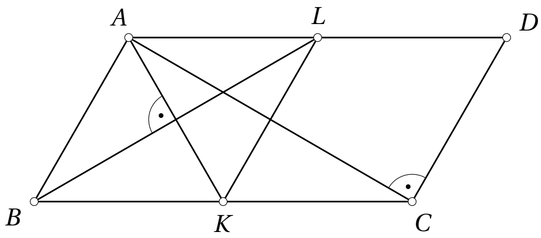
2. *Vastus:* 7 ja −7.

Lahendus 1. Antud ruutvõrrandi lahendid on $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - 12}$. Suurema ja väiksema lahendi vahe on 1 parajasti siis, kui $\sqrt{\frac{p^2}{4} - 12} = \frac{1}{2}$ ehk $\sqrt{p^2 - 48} = 1$. Siit $p^2 - 48 = 1$ ehk $p^2 = 49$, millest $p = 7$ või $p = -7$.

Lahendus 2. Olgu x_1 ja x_2 ruutvõrrandi lahendid, kusjuures $x_1 \geqslant x_2$. Viète'i valemitest ja ülesande tingimustest saame võrrandisüsteemi

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -p \\ x_1 \cdot x_2 &= 12 \\ x_1 - x_2 &= 1. \end{aligned}$$

Liites esimese ja kolmanda võrrandi, saame $2x_1 = -p+1$, kust $x_1 = \frac{-p+1}{2}$. Lahutades esimesest kolmanda võrrandi, saame analoogselt $x_2 = \frac{-p-1}{2}$. Asendades saadud seosed teise võrrandisse, saame $\frac{-p+1}{2} \cdot \frac{-p-1}{2} = 12$, kust $p^2 - 1 = 48$. Seega $p^2 = 49$, kust $p = 7$ või $p = -7$.



Joonis 8

3. *Vastus:* 60° ja 120°.

Eeldusest järeldub, et $\angle BAC = 90^\circ$ (joonis 8). Et $|BK| = |KC|$, siis on K täisnurkse kolmnurga ABC ümberringjoone keskpunkt, kust $|BK| = |AK|$. Et K ja L on rööpküliku $ABCD$ külgede keskpunktid, siis nelinurk $ABKL$ on samuti rööpkülik ning tema diagonaalid on risti, st see rööpkülik on romb. Järelikult $|AB| = |BK|$. Seega on kolmnurk ABK võrdkülgne, millest $\angle ABK = 60^\circ$. Siit omakorda $\angle BCD = 120^\circ$.

4. Olgu a arvude 2 arv ja b arvude 1 arv. Siis arvude -1 arv on a ja arvude -2 arv b. Esialgu oli kõigi arvude summa $2a + b - a - 2b = 0$, siit $a - b = 0$. Pärast oli kõigi arvude summa $2a - b + a - 2b = 3a - 3b = 0$.

Lahendused

1. *Vastus:* 11.

Et $28 = ac + bd + ad + bc = (ac + ad) + (bc + bd) = (a + b)(c + d)$ ning $c + d = 4$, siis $a + b = \frac{28}{4} = 7$ ja $a + b + c + d = 7 + 4 = 11$.

2. *Vastus:* $x = 503$.

Lahendus 1. Kui $x \geqslant 0$, siis $|x| = x$, $\big||x| - 2x\big| = |-x| = x$ ning $\Big|\big||x| - 2x\big| + 3x\Big| = |x + 3x| = = |4x| = 4x$. Seega omandab võrrand kuju $4x = 2012$, millest $x = 503$.

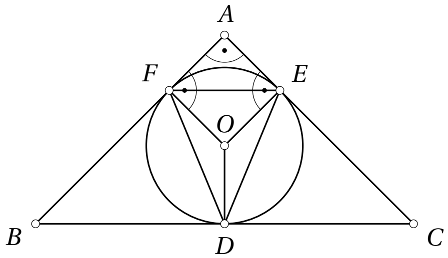
Kui $x < 0$, siis $|x| = -x$, $\big||x| - 2x\big| = |-3x| = -3x$ ning $\Big|\big||x| - 2x\big| + 3x\Big| = = |-3x+3x| = 0$. Võrrand omandab kuju $0 = 2012$, seega sel juhul lahendid puuduvad.

Lahendus 2. Võrrandi kehtimiseks on kaks võimalust: kas $\big||x| - 2x\big| + 3x = = 2012$ või $\big||x| - 2x\big| + 3x = -2012$.

Kui $\big||x| - 2x\big| + 3x = 2012$, siis $\big||x| - 2x\big| = 2012 - 3x$, kust omakorda tekib kaks võimalust: $|x| - 2x = 2012 - 3x$ ja $|x| - 2x = 3x - 2012$. Neist esimene on samaväärne võrrandiga $|x| = 2012 - x$, teine aga võrrandiga $|x| = 5x - 2012$. Esimesel juhul saame võimalused $x = 2012 - x$, mis viib tulemusele $x = 1006$, ja $x = x - 2012$, mis lahendeid ei anna. Teisel juhul saame võimalused $x = 5x - 2012$ ja $x = 2012 - 5x$, millest saame vastavalt lahendid $x = 503$ ja $x = \frac{1006}{3}$.

Kui $\big||x| - 2x\big| + 3x = -2012$, siis $\big||x| - 2x\big| = -2012 - 3x$, kust omakorda tekib kaks võimalust: $|x| - 2x = -2012 - 3x$ ja $|x| - 2x = 2012 + 3x$. Neist esimene on samaväärne võrrandiga $|x| = -2012 - x$, teine aga võrrandiga $|x| = 2012 + 5x$. Esimesel juhul saame võimalused $x = -2012 - x$, mis annab $x = -1006$, ja $x = 2012 + x$, mis lahendeid ei anna. Teisel juhul saame võimalused $x = 2012 + 5x$ ja $x = -2012 - 5x$, mis annavad vastavalt $x = -503$ ja $x = -\frac{1006}{3}$.

Kontroll näitab, et leitud lahenditest rahuldab esialgset võrrandit ainult $x = 503$.



Joonis 9

3. *Vastus:* jah.

Olgu a ja b vastavalt esimese ja teise teleri ekraani laius. Siis esimese ja teise teleri ekraani kõrgused on vastavalt $\frac{3}{4}a$ ja $\frac{9}{16}b$. Et ekraanide diagonaalid on võrdse pikkusega, siis kehtib seos

$$a^2 + \left(\frac{3}{4}a\right)^2 = b^2 + \left(\frac{9}{16}b\right)^2,$$

millest lihtsustades saame

$$\frac{25}{16}a^2 = \frac{337}{256}b^2.$$

Seega ekraanide laiuste suhte ruut on

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{b^2}{a^2} = \frac{25}{16} : \frac{337}{256} = \frac{400}{337}.$$

Et $400 < 407{,}77 = 1{,}21 \cdot 337$, siis $\frac{400}{337} < 1{,}21 = 1{,}1^2$. Järelikult $\frac{b}{a} < 1{,}1$ ehk teine teler on esimesest vähem kui 10% laiem.

4. *Vastus:* 0.

Selline täisarvukolmik (a, b, c) peaks rahuldama tingimusi $a + b = p_1$, $b + c = p_2$, $c + a = p_3$, kus p_1, p_2, p_3 on mingid täisarvud, mille korrutis on 123456789. Liites need kolm võrdust kokku, saame $2(a+b+c) = p_1+p_2+p_3$. Siin on võrduse vasakul poolel paarisarv, paremal poolel aga paaritu arv, sest arvud p_1, p_2, p_3 kui paaritu arvu tegurid on kõik paaritud. Järelikult niisugust täisarvukolmikut (a, b, c) ei leidu.

5. *Vastus:* b) 45°, $67{,}5^\circ$, $67{,}5^\circ$; c) $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$.

Eeldame, et punktid A, B, C, D, E ja F paiknevad nii, nagu näidatud joonisel 9. Olgu O kolmnurga ABC siseringjoone keskpunkt.

a) Nelinurk $AEOF$ on ruut, sest kolm nurka on täisnurgad (seega ka neljas nurk) ja kaks lähisküge on võrdse pikkusega. Kesknurga ja samale kaarele toetuva piirdenurga seosest saame $\angle EDF = \frac{1}{2}\angle EOF = \frac{1}{2} \cdot 90^\circ = 45^\circ$. Järelikult ei saa kolmnurk DEF olla võrdkülgne.

b) Võrdhaarse kolmnurga DEF aluseks saab olla ainult külg EF, sest nurgad $\angle DEF$ ja $\angle DFE$ on suuremad kui 45°. Tõepoolest, $\angle DEF = \frac{1}{2}\angle DOF$, kuid $\angle DOF > 90^\circ$, sest vastasel korral oleks nelinurgas $DOFB$, kus $\angle ODB = \angle OFB = 90^\circ$, sisenurkade summa väiksem kui 360°. Seega on DEF võrdhaarne kolmnurk tipunurgaga 45° ning tema kummagi alusnurga suurus on $\frac{1}{2} \cdot (180^\circ - 45^\circ) = 67{,}5^\circ$.

c) Kolmnurgad BDF ja CDE on võrdhaarsed, sest ühest punktist ringjoonele tõmmatud puutujalõigud on võrdsed. Kolmnurga DEF võrdhaarsuse tõttu järeldub eelnevast, et $|DF| = |DE|$ ning $\angle BFD = \angle CED$. Seega on kolmnurgad BDF ja CDE võrdsed, mis tähendab, et ABC on võrdhaarne täisnurkne kolmnurk. Olgu r kolmnurga ABC siseringjoone raadius. Siis kolmnurga DEF alus on $|EF| = \sqrt{2}r$ ja kõrgus $r + \frac{\sqrt{2}}{2}r$. Kolmnurga ABC kõrgus on $|AD| = r + \sqrt{2}r$ ning alus $|BC| = 2|AD|$. Siit saame arvutada pindalad:

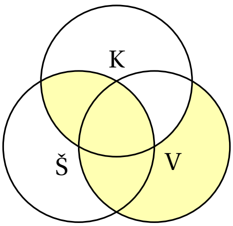
$$S_{DEF} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}r \cdot (r + \frac{\sqrt{2}}{2}r) = \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{2} + 1)r^2, \qquad S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (r + \sqrt{2}r)^2.$$

Pindalade suhe on $S_{DEF} : S_{ABC} = \dfrac{1}{2(1 + \sqrt{2})} = \dfrac{\sqrt{2} - 1}{2}$.

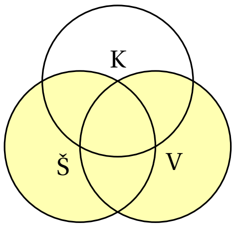
6. *Vastus:* teine pakkumine.

Tõestame, et esimese pakkumise kookide hulk kuulub tervenisti teise pakkumise kookide hulka. Koogid, mille peal on nii kreemi kui ka šokolaadi, kuuluvad teises pakkumises nende kookide hulka, mille peal on šokolaadi. Vaatleme kooki, mille peal ei ole kreemi, aga on vahvlit. Kui sellise koogi peal on šokolaadi, siis kuulub ta teises pakkumises samuti nende kookide hulka, mille peal on šokolaadi. Kui aga sellise koogi peal šokolaadi ei ole, siis kuulub ta teises pakkumises kookide hulka, mille peal ei ole šokolaadi, aga on vahvlit.

Samas võib teine pakkumine sisaldada kooke, mida esimeses pakkumises ei ole, nt koogid, millel on ainult šokolaadi. Kokkuvõttes on teine pakkumine igal juhul soodsam (vt joonised 10 ja 11).



Joonis 10



Joonis 11

Lahendused

1. *Vastus:* $\sqrt{st}$ tundi.

Olgu x tundide arv, mis kulub basseini täitmiseks siis, kui mõlemad torud on avatud. Siis ühe tunniga täitub basseinist osa $\frac{1}{x}$. Ülesande tingimustest saame, et kui avatud on ainult esimene toru, siis täitub ühe tunniga basseinist osa $\frac{1}{x+s}$, ning kui avatud on ainult teine toru, siis täitub ühe tunniga basseinist osa $\frac{1}{x+t}$. Järelikult $\frac{1}{x} = \frac{1}{x+s} + \frac{1}{x+t}$. Siit $\frac{1}{x} = \frac{x+s+x+t}{(x+s)(x+t)}$ ehk $x(2x+s+t) = (x+s)(x+t)$ ehk $2x^2+sx+tx = x^2+sx+tx+st$, millest $x^2 = st$ ja $x = \sqrt{st}$.

2. *Vastus:* 8.

Sirge ja parabooli lõikepunktide leidmiseks asetame y-i parabooli võrrandist sirge võrrandissse. Saame $2a^2x + a(2a^2x^2 + ax + 1) + 1 = 0$ ehk $2a^3x^2+3a^2x+a+1 = 0$. Sellel ruutvõrrandil on täpselt üks lahend parajasti siis, kui tema diskriminant võrdub nulliga, st kui $9a^4 - 8a^3(a+1) = 0$. Et a peab olema positiivne, saame siit pärast arvuga a^3 jagamist seose $9a - 8(a+1) = 0$ ehk $a = 8$.

3. *Vastus:* jah.

Teame, et iga reaalarvu a korral $\sin a \leqslant 1$ ning $\sin a = 1$ parajasti siis, kui $a = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, kus k on suvaline täisarv. Arvestades, et $(\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x = 1 + \sin 2x$ ning $\sin 2x \in [-1;1]$, saame $(\sin x + \cos x)^2 \in [0;2]$, millest $\sin x + \cos x \in \left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$. Et $\frac{\pi}{2} > \sqrt{2}$ ja $\frac{\pi}{2} - 2\pi < -\sqrt{2}$, siis viimasesse lõiku ei kuulu ühtegi arvu a, mille korral $\sin a = 1$.

4. *Vastus:* (n,n,n), $(n,n,2n)$ ja $(n,2n,3n)$, kus n on suvaline positiivne täisarv.

Et $a \leqslant b \leqslant c$, siis $a+b \leqslant 2c$. Et $a+b+c$ jagub c-ga, siis $a+b$ jagub c-ga. Järelikult kas $a+b = 2c$ või $a+b = c$.

Võrdus $a+b = 2c$ saab kehtida ainult juhul $a = b = c$. See annab kolmikud (n,n,n), kus n on suvaline positiivne täisarv.

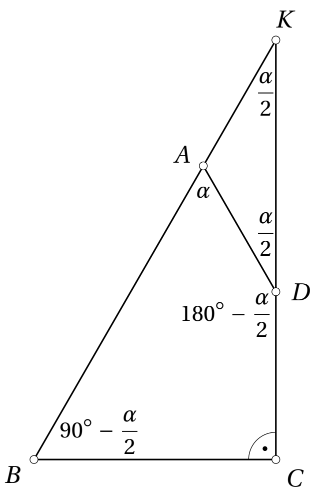
Võrdus $a+b=c$ annab ülesande tingimuste põhjal, et $a+b+(a+b)$ jagub a-ga ja b-ga ehk $2a+2b$ jagub a-ga ja b-ga. Järelikult $2a$ jagub b-ga. Et $a \leqslant b$, siis võimalused on $b=a$ ja $b=2a$. Esimesel juhul $c=a+a=2a$, millest saame kolmikud $(n,n,2n)$, teisel juhul $c=a+2a=3a$, kust saame kolmikud $(n,2n,3n)$.

Kontroll näitab, et kõik saadud arvukolmikud rahuldavad ülesande tingimusi.

5. Vastus: a) suvaline nurk vahemikus $(0^\circ; 180^\circ)$; b) ei.

a) Nelinurga sisenurkade summa on 360°. Kui neljanda nurga suurus oleks 180° või rohkem, oleks täisnurga, nürinurga ja neljanda nurga summa suurem kui $90^\circ + 90^\circ + 180^\circ = 360^\circ$. Järelikult on neljanda nurga suurus väiksem kui 180°. Tõestame, et kõik sellised suurused on võimalikud. Olgu α suvaline nurk vahemikust $(0^\circ; 180^\circ)$. Vaatleme kolmnurka KBC, mille tipu C juures on täisnurk ja tipu K juures nurk $\frac{\alpha}{2}$ (joonis 12). Selline kolmnurk leidub, sest $0^\circ < \frac{\alpha}{2} < 90^\circ$. Valime hüpotenuusil KB punkti A ja kaatetil KC punkti D nii, et $\angle KDA = \angle DKA = \frac{\alpha}{2}$. Siis nelinurk $ABCD$ rahuldab ülesande tingimust, sest $\angle DAB = \angle KDA + \angle DKA = \alpha$, $\angle ABC = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$ on teravnurk, $\angle BCD$ on täisnurk ja $\angle CDA = 180^\circ - \frac{\alpha}{2}$ on nürinurk.

b) Ristkülik, mille küljed on erineva pikkusega, ei ole ruut, kuid tema kõik nurgad on täisnurgad.



Joonis 12

6. *Vastus:* kõigi paarisarvuliste m ja n korral.

Kui m ja n on paarisarvud, siis on lihtne katta kogu ruudustik ühes kihis 2×2 kujunditega.

Eeldame nüüd, et nõutaval viisil saab katta ka ruudustiku, kus vähemalt üks neist arvudest, näiteks veergude arv n on paaritu. Nummerdame read ja veerud järjest arvudega $1, 2, \ldots$ ning ütleme, et kujund asub asendis (i, j), kui tema vasak ülemine nurk asub reas i ja veerus j. Ruutu $(1, 1)$ katavad ainult asendis $(1, 1)$ olevad kujundid, ruutu $(1, 2)$ aga asendites $(1, 1)$ ja $(1, 2)$ olevad kujundid. Et neid peab katma võrdne arv kujundeid, siis asendis $(1, 2)$ ei saa olla ühtegi kujundit. Nii jätkates saame, et asendis $(1, 4)$, $(1, 6)$ jne ei saa olla ühtegi kujundit. Et n on paaritu, ei ole asendis $(1, n-1)$ ühtegi kujundit, seega on ruut $(1, n)$ katmata, vastuolu.

Lahendused

1. *Vastus:* $2\ln 2012$.

   Lahendus 1. Logaritmi omaduste abil saame need arvud teisendada kujule $\ln(2011 \cdot 2013)$ ja $\ln(2012^2)$. Et funktsioon $y = \ln x$ on kasvav, siis on küsimus samaväärne küsimusega, kumb argumentidest on suurem. Et $2011 \cdot 2013 = (2012 - 1)(2012 + 1) = 2012^2 - 1$, siis on teine arv suurem.

   Lahendus 2. Et logaritmfunktsioon on kumer, siis Jenseni võrratuse põhjal $\dfrac{\ln 2011 + \ln 2013}{2} < \ln \dfrac{2011 + 2013}{2} = \ln 2012$. Seega on $2\ln 2012$ suurem kui $\ln 2011 + \ln 2013$.

2. *Vastus:* 5.

   Et paraboolid läbivad koordinaatide alguspunkti, on kummagi parabooli võrrandi vabaliige 0. Eeldame, et paraboolide võrrandid on $y = ax^2 + px$ ja $y = ax^2 + qx$, kus a, p, q on mingid arvud. Puutuja tõus mingis punktis on tuletise väärtus selles punktis. Võrrandite tuletised on $y' = 2ax + p$ ja $y' = 2ax + q$. Et kohal $x = 0$ on nende tuletiste väärtused vastavalt 12 ja 13, siis $p = 12$ ja $q = 13$.

   Esimese parabooli haripunkt asub kohal $x = -\dfrac{12}{2a} = -\dfrac{6}{a}$. Esimese parabooli haripunkti y-koordinaat on $y = a(-\dfrac{6}{a})^2 + 12 \cdot \left(-\dfrac{6}{a}\right) = -\dfrac{36}{a}$. Punktid, milles teine parabool saavutab sama y-koordinaadi, saame leida võrrandist $ax^2 + 13x = -\dfrac{36}{a}$ ehk $ax^2 + 13x + \dfrac{36}{a} = 0$. Selle võrrandi lahendid on $x_{1,2} = \dfrac{-13 \pm \sqrt{13^2 - 4 \cdot a \cdot \frac{36}{a}}}{2a} = \dfrac{-13 \pm 5}{2a}$, kust $x_1 = -\dfrac{9}{a}$, $x_2 = -\dfrac{4}{a}$. Teise parabooli võrrandi tuletise $y' = 2ax + 13$ abil leiame, et punktis x_1 on parabooli puutuja tõus $2a \cdot (-\dfrac{9}{a}) + 13 = -5$, punktis x_2 aga $2a \cdot (-\dfrac{4}{a}) + 13 = 5$. Tõusu absoluutväärtus on mõlemal juhul 5.

3. *Vastus:* esialgsest asukohast $\dfrac{4}{5}$ m ida ja $\dfrac{2}{5}$ m põhja poole.

   Ida-lääne teljel liigub karu ida suunas $1 - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{16} - \ldots$ meetrit. See on geomeetriline jada esimese liikmega 1 ja teguriga $-\dfrac{1}{4}$. Geomeetrilise jada summa valemi põhjal on selle jada summa

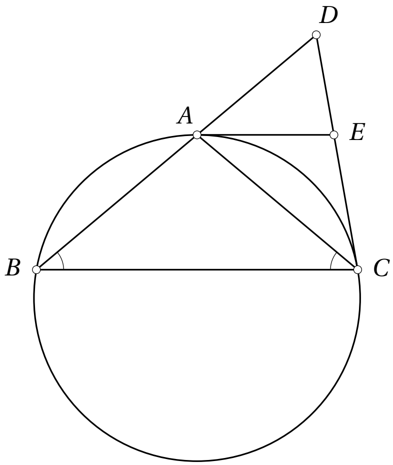
$$\frac{1}{1-(-\frac{1}{4})}=\frac{4}{5}.$$

Põhja-lõuna teljel liigub karu põhja suunas $\frac{1}{2}-\frac{1}{8}+\frac{1}{32}-\ldots$. See on geomeetriline jada esimese liikmega $\frac{1}{2}$ ja teguriga $-\frac{1}{4}$ ning tema summa on

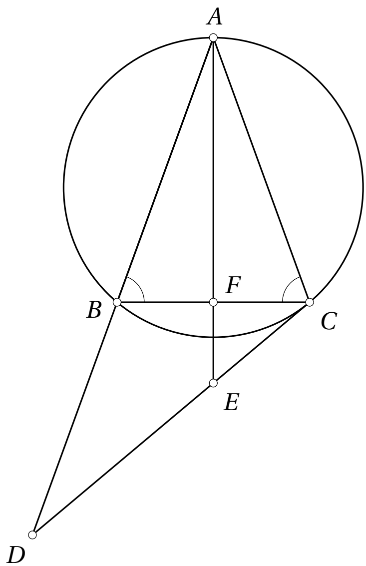
$$\frac{\frac{1}{2}}{1-(-\frac{1}{4})}=\frac{2}{5}.$$

4. *Vastus:* $\angle A = 45^\circ$ ja kõik nurgad $\angle A > 60^\circ$.

Kui punkt D asub kiirel BA (joonis 13), siis on kolmnurk EAC sarnane kolmnurgaga ABC, sest $\angle ECA = \angle CBA$ ning samuti $\angle EAC = \frac{1}{2}\angle DAC = \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle ACB) = \frac{1}{2}\cdot 2\angle ACB = \angle ACB$. Järelikult $\angle CEA = \angle CAB$. Punkt D asub kiirel BA parajasti siis, kui $\angle DCA < \angle CAB$ ehk samaväärselt $\angle CBA < \angle CAB$ ehk võrdhaarse kolmnurga ABC alusnurk on tipunurgast väiksem. See kehtib parajasti siis, kui $\angle A > 60^\circ$.



Joonis 13



Joonis 14

Kui punkt D asub kiirel AB (joonis 14), siis $\angle ECB = \angle CAB$. Võrdhaarse kolmnurga omaduste tõttu $EA \perp BC$. Seega $\angle CEA = \angle CAB$ parajasti siis, kui CEF on võrdhaarne täisnurkne kolmnurk, kus F on AE ja BC lõikepunkt. Järelikult rahuldab ülesande tingimusi parajasti nurk $\angle A = \angle ECB = 45^\circ$.

5. *Vastus:* $d = 0$ või $d = 8k + 4$, kus k on suvaline mittenegatiivne täisarv.

Eeldame, et $d = 0$. Siis võime võtta $a = 1$, millega saame jada $1, 4, 2, 1, \ldots$ Et jada liige b_n on liikmega b_{n-1} üheselt määratud, siis hakkavad liikmed korduma, st jada on perioodiline.

Eeldame, et d on positiivne paaritu arv ja a mingi positiivne täisarv. Jada esimesed liikmed saadakse esimese elemendi järjestikusel 2-ga jagamisel, kuni tekib paaritu arv. Olgu k esimene indeks, mille korral b_k on paaritu. Siis $b_{k+1} = 4b_k + d$ on samuti paaritu ja $b_{k+1} > b_k$; sama kehtib ka järgmiste liikmete korral. Seega hakkab jada piiramatult kasvama ning ei ole perioodiline.

Eeldame, et d on positiivne paarisarv ja a mingi positiivne täisarv. Olgu k jällegi esimene indeks, mille korral b_k on paaritu. Siis $b_{k+1} = 4b_k + d$ ning $b_{k+2} = 2b_k + \frac{d}{2}$.

- Kui d ei jagu 4-ga, siis on b_{k+2} paaritu ja $b_{k+2} > b_k$. Järelikult hakkab jada kasvama ja ei ole perioodiline.
- Kui d jagub 4-ga, aga mitte 8-ga, siis võtame $a = \frac{d}{4}$, millega saame jada $\frac{d}{4}, 2d, d, \frac{d}{2}, \frac{d}{4}, \ldots$, kus liikmed hakkavad korduma, st jada on perioodiline.
- Kui d jagub 8-ga, siis on $b_{k+3} = b_k + \frac{d}{4}$ paaritu ning $b_{k+3} > b_k$. Järelikult hakkab jada kasvama ja ei ole perioodiline.

6. *Vastus:* Pipil leidub võitev strateegia.

Vaatleme strateegiat, kus Pipi kogu aeg vajutab oma käigul alla kõige parempoolsema nupu. Kui Pipi vajutab alla kõige parempoolsema nupu, siis peab Adolf vajutama mingit muud nuppu, mille tagajärjel kõige parempoolsem nupp liigub üles. Seega saab Pipi alati käigu teha.

Tõestame, et saabub hetk, mil Adolf ei saa käiku teha. Olgu seinal n nuppu. Interpreteerime nuppude seisu n-kohalise arvuna, kus alla vajutatud nuppu tähistab arv 1 ja üleval olevat nuppu arv 0. Siis iga käik muudab seda arvu suuremaks. Et see arv ei saa kasvada suuremaks n-kohalisest arvust, kus kõik numbrid on 1, saabub varem või hiljem seis, kus üks osalistest enam käiku teha ei saa. Eelneva põhjal saab see osaline olla ainult Adolf.

Märkus. Lahenduses kirjeldatud strateegia on ainus, mis võidab. Kui Pipi mingil käigul vajutab mingit muud nuppu peale kõige parempoolsema, võib Adolf hakata ise kõige parempoolsemat nuppu vajutama ja seeläbi lõpuks võita.

Lp hindaja!

Käesolevas esitame kõigepealt hindamise üldised põhimõtted ning seejärel järjekorras konkreetsed hindamisjuhised iga ülesande kohta eraldi.

1. Õpilase lahenduseks tuleb esmajoones lugeda see, mida õpilane on ülesande kohta vormistanud puhtandina (sh mustandipaberile selgesti arusaadavalt kirja pandud mõttekäigud, kui need on ametlikult puhtandipaberilt viidatud). Töö mustandi arvestamine või mittearvestamine ülesande lahenduse hulka on hindaja otsustada (või piirkonna hindamiskomisjoni ühine otsus kõigi ülesannete suhtes), kuid see peab toimuma kõigis töödes ühtmoodi.

2. Alljärgnevas on 7.–9. klassi olümpiaadi I osa (testi) ning kõikide ülejäänud ülesannete hindamisjuhised esitatud erinevalt.

   Testi iga küsimuse jaoks on eraldi loetletud või kirjeldatud vastused, mille eest tuleks anda vastavalt kaks punkti või üks punkt (st vastavaid punkte ühe küsimuse piires *ei tule* liita). Testiülesannete lahendusi õpilased ei pea esitama, vaid kirjutavad ülesannete lehel vastavale punktiirile või ülesande tekstis viidatud kohta ainult vastuse.

   Seevastu kõigi teiste ülesannete kohta tuleb esitada täielikud lahendused, ainult vastustest ei piisa. Nende ülesannete lahendused on hindamisjuhistes jaotatud võimalust mööda osadeks (etappideks) ning näidatud lahenduse iga osa eest antav punktide arv (st ühe ülesande eest antava punktisumma saamiseks *tuleb* lahenduse erinevate osade eest antud punktid liita).

3. Žürii lahendustes ja käesolevates hindamisjuhistes on ülesannete arvulised vastused esitatud enamasti ainult ühel, lihtsaimal või kõige tõenäolisemalt esineval kujul. Hindamisel (sh testid!) tuleb võrdselt õigeks lugeda ka sama vastuse teised mõistlikud esitusviisid – sh taandatud hariliku murruna, segaarvuna, kümnendmurruna, sõnadega välja kirjutatuna –, seejuures ka osana pikemalt (nt täislausega, koos sobiva liigisõnaga või koos selgitustega) antud vastusest. Juhud, kus ülesande sisu tingib erandeid sellest üldreeglist, on eraldi mainitud vastava ülesande hindamisjuhises.

Ühik arvu järel on vastuses vajalik juhul, kui ülesandes on küsitud suurust, mis teatud ühikutes avaldub. Näiteks küsimusele „Kui suur pindala …?“ saab õige vastus olla „120 cm^2“, kuid mitte „120“ (kui ülesande tekstis pole kasutatud ühikuta pikkusi/pindalasid). Seejuures on vastused „120 cm^2“ ja „1,2 dm^2“ samaväärsed. Ühik vastuses ei ole nõutav, kui ülesandes on küsitud kindlate ühikute arvu. Näiteks küsimusele „Mitu ruutsentimeetrit …?“ antud vastused „120“ ja „120 cm^2“ tuleb võrdväärseks lugeda samal alusel nagu küsimusele „Mitu karu …?“ antud vastused „3“ ja „3 karu“ (vastus koos liigisõnaga). Niisuguse küsimuse vastuseks on arv ning ühikul või liigisõnal on vaid puhtkeeleline roll. Küsimusele „Mitu ruutsentimeetrit …?“ antud vastused „120 cm^2“ ja „1,2 dm^2“ ei ole samaväärsed.

4. Mõnede ülesannete kohta, mida saab lahendada mitmel oluliselt erineval viisil, anname eraldi hindamisskeemid erinevate lahendusviiside jaoks. Rõhutame, et iga konkreetset mittetäielikku lahendust tuleb hinnata ainult *ühe* sellise skeemi järgi (selle järgi, mille kohaselt ta saaks kõige rohkem punkte).

5. Enamiku ülesannete korral (v.a testid ja tõestusülesanded) on hindamisjuhiste lõpus eraldi näidatud, mitu punkti anda ainult õige vastuse eest. See hinne on mõeldud juhuks, kui töös on ülesande kohta toodud ainult õige vastus või õige vastus koos mõttekäiguga, mis ei annaks skeemi järgi rohkem punkte kui on ette nähtud õige vastuse eest.

6. Kahtlemata esineb õpilaste töödes ka mõttekäike, mis ei mahu meie poolt pakutud skeemidesse. Selliste lahenduste hindamisel tuleb lähtuda sellest, *kui suur osa* antud ülesandest on õpilasel lahendatud, kasutades lahenduse üksikute osade kaalu määramisel võimaluse korral võrdluseks punktide jaotust meie pakutud hindamisskeemides.

7. *Millise tahes* täieliku ja matemaatiliselt korrektse lahenduse eest tuleb igal juhul anda maksimumpunktid, sõltumata selle lahenduse pikkusest või otstarbekusest võrreldes teiste lahendusviisidega.

Eesti LIX matemaatikaolümpiaad

28. jaanuar 2012 Piirkonnavoor **7. klass**

I osa hindamisjuhised

1.	◦ Antud õige vastus 2012:	2 p
2.	◦ Antud õige vastus 2021:	2 p
3.	◦ Antud õige vastus -16:	2 p
4.	◦ Antud õige vastus 5:	2 p
5.	◦ Antud õige vastus 5:	2 p
6.	◦ Antud õige vastus 28 cm:	2 p
	◦ Antud vastuseks arv 28 ilma ühikuta või vale ühikuga:	1 p
7.	◦ Antud õige vastus 2 dm^2:	2 p
	◦ Antud vastuseks arv 2 ilma ühikuta või vale ühikuga:	1 p
8.	◦ Antud õige vastus 120°:	2 p
	◦ Antud vastuseks arv 120 ilma kraadimärgita:	1 p
9.	◦ Antud õige vastus 87:	2 p
10.	◦ Antud õige vastus 34:	2 p

I osa hindamisjuhised

1. ∘ Antud õige vastus 10210: 2 p

2. ∘ Antud õige vastus $-\frac{2}{3}$: 2 p

3. ∘ Antud õige vastus 20: 2 p

4. ∘ Antud õige vastus 16: 2 p

5. ∘ Antud õige vastus „37. veerus“ (või arv 37): 2 p

6. ∘ Antud õige vastus 20°: 2 p
∘ Antud vastuseks arv 20 ilma kraadimärgita: 1 p

7. ∘ Antud õige vastus 3 cm: 2 p
∘ Antud vastuseks arv 3 ilma ühikuta või vale ühikuga: 1 p

8. ∘ Antud õige vastus 40 ruutühikut: 2 p
∘ Antud vastuseks arv 40 ilma ühikuta või vale ühikuga: 1 p

9. ∘ Antud õige vastus 29: 2 p

10. ∘ Antud õige vastus 36: 2 p

Eesti LIX matemaatikaolümpiaad

28. jaanuar 2012 Piirkonnavoor **9. klass**

I osa hindamisjuhised

1.	∘ Antud õige vastus 10021:	2 p
2.	∘ Antud õige vastus 89:	2 p
3.	∘ Antud õige vastus -2:	2 p
4.	∘ Antud õige vastus 200:	2 p
5.	∘ Antud õige vastus „76. veerus“ (või arv 76):	2 p
6.	∘ Antud õige vastus 124:	2 p
7.	∘ Antud õige vastus 135°:	2 p
	∘ Antud vastuseks arv 135 ilma kraadimärgita:	1 p
8.	∘ Antud õige vastus 2:	2 p
9.	∘ Antud õige vastus 59:	2 p
10.	∘ Antud õige vastus 62:	2 p

II osa hindamisjuhised

1. Vastavalt žürii lahendustele 1 ja 2 anname kaks hindamisskeemi.

Lahendus vahetu arvutamise teel.

- Leitud osamaks nelja pere korral 315 eurot: 3 p
- Leitud lumesaha hind 1260 eurot: 2 p
- Leitud osamaks viie pere korral 252 eurot: 2 p

Lahendus võrrandi abil.

- Koostatud võrrand lumesaha hinna leidmiseks: 3 p
- Leitud lumesaha hind 1260 eurot: 2 p
- Leitud osamaks viie pere korral 252 eurot: 2 p

Ainult õige vastuse eest ilma selgitusteta anda 2 punkti.

2.
- Leitud neli ruutude küljepikkust $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$: 2 p
- Leitud tumedaks värvitud kujundi ümbermõõt $\frac{11}{3}$: 3 p

  Sealhulgas
  - leitud kujundit piiravate horisontaalsete lõikude pikkuste summa: *1 p*
  - leitud tumedaks värvitud ruutude ümbermõõtude summa $\frac{13}{3}$: *1 p*
- Leitud tumedaks värvitud kujundi pindala $\frac{61}{144}$: 2 p

Ainult õige vastuse (nii ümbermõõt kui ka pindala) eest ilma selgitusteta anda 2 punkti, ainult ühe õige vastuse eest anda 1 punkt.

3.
- Leitud $M = 0$: 1 p
- Leitud, et suurima arvu korral peab olema $V = 9$ ja $K = 4$: 2 p
- Põhjendatud, et suurima arvu korral ei saa I olla suurem kui 6: 1 p
- Põhjendatud, et suurima arvu korral ei saa I olla väiksem kui 5: 1 p
- Põhjendatud, et $I = 6$ on võimatu: 1 p
- Leitud $S = 6$: 1 p

Ainult õige vastuse 9556 eest ilma selgitusteta anda 2 punkti.

II osa hindamisjuhised

1. Eeldatavasti lähenevad õpilased sellele ülesandele nii nagu žürii lahenduses 1, seetõttu anname hindamisskeemi selle kohta.
   - Koostatud sobiv võrrand: 4 p
   - Lahendatud see võrrand: 2 p
   - Leitud Atsi kasvatatud kartulite arv 316: 1 p

   Kui on koostatud selline võrrand, mille lahendiks juba ongi Atsi kasvatatud kartulite arv, siis anda selle võrrandi lahendamise ja vastuse leidmise eest kokku 3 punkti vastavalt hindamisskeemi kahele viimasele reale.

   Ainult õige vastuse eest ilma selgitusteta anda 2 punkti.

2. - Kirjeldatud selliste kolmekohaliste arvude hulk, mis jaguvad nii 4-ga, 5-ga kui ka 6-ga: 2 p
   - Eraldatud sellest hulgast 8-ga jaguvad arvud: 1 p
   - Eraldatud sellest hulgast 7-ga jaguvad arvud: 1 p
   - Eraldatud sellest hulgast 9-ga jaguvad arvud: 1 p
   - Leitud sobivad kolm arvu 300, 660 ja 780: 2 p

   Ainult õige vastuse eest (kolm arvu ja kõik õiged) ilma selgitusteta anda 2 punkti. Vastuse eest, kus on üks viga (kolme õige arvu kõrval veel täpselt üks arv või kolm arvu, millest ainult kaks on õiged, või ainult kaks arvu, millest mõlemad on õiged) ilma selgitusteta anda 1 punkt.

3. - Leitud raadiuse pikkus $r = 5$ cm: 4 p

     Sealhulgas:
     - põhjendatud, et $|BD| = r$: *2 p*
     - põhjendatud, et $|DC| = r$: *1 p*
     - saadud tulemuste põhjal välja arvutatud raadiuse pikkus $r = 5$ cm: *1 p*
   - Leitud kaare DE pikkus $\dfrac{5\pi}{6}$ cm: 2 p
   - Leitud kujundi ümbermõõt $\left(15 + \dfrac{5\pi}{6}\right)$ cm: 1 p

   Kui arv π on asendatud tema mingi lähendiga, siis vähendada lahenduse eest antavate punktide arvu ühe võrra.

   Vastuses sulgude puudumise eest punkte mitte maha võtta.

   Ainult õige vastuse eest ilma selgitusteta anda 2 punkti.

Eesti LIX matemaatikaolümpiaad

28. jaanuar 2012 — Piirkonnavoor — **9. klass**

II osa hindamisjuhised

1. Vastavalt žürii lahendustele 1 ja 2 anname kaks hindamisskeemi.

Lahendus kõigi arvude ühise teguri väljaeraldamise teel.

- Pandud tähele, et pärast esimest operatsiooni jaguvad kaks viimast arvu b-ga: 2 p
- Järeldatud, et kõik järgnevad arvud jaguvad b-ga: 4 p
- Märgitud, et kõik Mihkli kirjutatud arvud on b-st rangelt suuremad: 1 p

Lahendus ühte liiki tehete tulemuste uurimise teel.

- Tõestatud, et pärast korrutamissammu ei teki kunagi algarvu: 2 p
- Tõestatud, et pärast liitmissammu ei teki kunagi algarvu: 5 p

Ainult õige vastuse eest ilma selgitusteta anda 0 punkti.

2. Vastavalt žürii lahendustele 1 ja 2 anname kaks hindamisskeemi.

Lahendus ruutvõrrandi lahendite väljakirjutamise abil.

- Kirjutatud välja ruutvõrrandi lahendid: 2 p
- Kirjutatud välja tingimus, mida p peab rahuldama, et lahendite vahe oleks 1: 2 p
- Sellest tingimusest leitud p võimalikud väärtused 7 ja -7: 3 p

Lahendus Viète'i valemite abil.

- Viète'i valemite ja ülesande tingimuse põhjal välja kirjutatud ruutvõrrandi lahendite summa, korrutis ja vahe: 2 p
- Lahendatud võrrandisüsteem ja leitud p väärtused 7 ja -7: 5 p

Ainult õige vastuse (7 ja -7) eest ilma selgitusteta anda 1 punkt. Ainult ühe õige vastuse (kas 7 või -7) eest ilma selgitusteta anda 0 punkti.

3.
- Tõestatud, et $|BK| = |AK|$ (või $|LD| = |LC|$): 2 p
- Tõestatud, et kolmnurk ABK (või kolmnurk CDL) on võrdkülgne: 3 p
- Leitud rööpküliku nurkade suurused 60° ja 120°: 2 p

Ainult õige vastuse (60° ja 120°) eest ilma selgitusteta anda 1 punkt. Ainult ühe õige nurga eest ilma selgitusteta anda 0 punkti.

4.
- Avaldatud kõigi esialgu paberil olnud arvude summa kahe parameetri (näiteks arvude 2 arvu ja arvude 1 arvu) kaudu: 2 p
- Avaldatud kõigi pärast muutmist paberil olnud arvude summa sama kahe parameetri kaudu: 1 p
- Näidatud, et need kaks summat on võrdsed: 4 p

Eesti LIX matemaatikaolümpiaad

28. jaanuar 2012 Piirkonnavoor **10. klass**

Hindamisjuhised

1.
- Lahutatud arv $ac + bd + ad + bc$ teguriteks $(a + b)(c + d)$: 5 p
- Leitud, et $a + b = 7$: 1 p
- Leitud, et $a + b + c + d = 11$: 1 p

Ainult õige vastuse 11 eest ilma selgitusteta anda 1 punkt.

2. Vastavalt žürii lahendustele 1 ja 2 anname kaks hindamisskeemi.

Lahendus juhtude $x \geqslant 0$ ja $x < 0$ vaatlemise teel.

- Läbi analüüsitud juht $x \geqslant 0$ ja jõutud lahendini $x = 503$: 4 p
- Läbi analüüsitud juht $x < 0$ ja jõutud tulemusele, et sel juhul lahendeid ei ole: 3 p

Lahendus absoluutväärtuste süstemaatilise lahtikirjutamise teel.

- Läbi analüüsitud üks kahest juhust $\big||x| - 2x\big| + 3x = 2012$ ja $\big||x| - 2x\big| + 3x = -2012$: 3 p
- Läbi analüüsitud teine neist kahest juhust: 2 p
- Kontrollitud lahendite sobivust ja välja eraldatud ainus lahend $x = 503$: 2 p

Ainult õige vastuse $x = 503$ eest ilma selgitusteta anda 1 punkt. Kui õige vastuse kõrval on pakutud veel ka valesid arve, siis anda 0 punkti.

3.
- Avaldatud kummagi teleri ekraani laius ja kõrgus ühe parameetri kaudu: 1 p
- Koostatud seos nende kahe parameetri vahel, mis väljendab tingimust, et ekraanide diagonaalid on võrdsed: 2 p
- Avaldatud ekraanide laiuste või laiuste ruutude suhe: 1 p
- Tõestatud, et ekraanide laiuste suhe on väiksem kui 1,1: 3 p

Ainult õige vastuse „jah“ eest ilma selgitusteta anda 0 punkti.

4.
- Pandud tähele, et $a + b$, $b + c$ ja $c + a$ peavad olema paaritud: 2 p
- Tuletatud avaldis, mille väärtus on ühelt poolt paarisarv, aga teiselt poolt paaritu arv: 2 p
- Pandud tähele vastuolu ja järeldatud, et nõutavaid täisarvukolmikuid ei leidu: 3 p

Ainult õige vastuse 0 eest ilma selgitusteta anda 0 punkti.

5.

- a)-osa: 2 p

  Sealhulgas

  - märgitud, et kolmnurga täisnurka haarav nelinurk on ruut: *1 p*
  - järeldatud, et üks kolmnurga DEF nurk on 45°: *1 p*

- b)-osa: 2 p

  Sealhulgas

  - tõestatud, et võrdhaarse kolmnurga DEF aluseks saab olla ainult see külg, mis asub 45° nurga vastas: *1 p*
  - leitud kolmnurga DEF nurkade suurused: *1 p*

- c)-osa: 3 p

  Sealhulgas

  - tõestatud, et ABC on võrdhaarne: *1 p*
  - arvutatud kolmnurkade DEF ja ABC pindalade suhe: *2 p*

Ainult b)- ja c)-osa õigete vastuste eest ilma selgitusteta anda kokku 1 punkt. Ainult ühe osa õige vastuse eest ilma selgitusteta anda 0 punkti.

6.

- Pandud tähele, et esimese pakkumise kookide hulk sisaldub teise pakkumise kookide hulgas: 3 p
- Tõestatud see tähelepanek: 4 p

Tõestamise osas anda 2 punkti 4-st, kui ülesanne on lahendatud Venni diagrammide abil ja esitatud on ainult õiged diagrammid ilma mingite selgitusteta. Kui üks Venni diagramm on õige ja teine vale või puudu, siis anda 1 punkt.

Ainult õige vastuse „teine pakkumine“ eest ilma selgitusteta anda 0 punkti.

Hindamisjuhised

1.
- Võetud kasutusele tähis otsitava täitumisaja märkimiseks: 1 p
- Koostatud võrrand täitumisaja leidmiseks: 3 p
- Lahendatud võrrand ja saadud vastus $\sqrt{st}$: 3 p

Ainult õige vastuse $\sqrt{st}$ eest ilma selgitusteta anda 1 punkt.

2.
- Saadud ruutvõrrand (kujul, millest on näha ruutliikme, lineaarliikme ja vabaliikme kordajad) lõikepunkti x-koordinaadi leidmiseks: 3 p

  Sealhulgas
  - asendatud y ühest võrrandist teise: *1 p*
- Koostatud võrrand, mis väljendab tingimust, et ruutvõrrandi diskriminant võrdub nulliga: 1 p
- Lahendatud vastav võrrand a suhtes ja saadud vastus 8: 3 p

Ainult õige vastuse 8 eest ilma selgitusteta anda 1 punkt. Kui õige vastuse kõrval on ka valesid väärtusi (nt 0), siis anda 0 punkti.

3.
- Kirja pandud tarvilik ja piisav tingimus, mille korral siinuse väärtus on 1 (või 1-st väiksem): 1 p
- Leitud $\sin x + \cos x$ väärtuste vahemik (vähim ja suurim väärtus): 4 p
- Järeldatud, et ükski arv sellest väärtuste vahemikust ei rahulda tingimust, mille korral siinuse väärtus on 1: 2 p

Ainult õige vastuse „jah“ eest ilma selgitusteta anda 0 punkti.

4.
- Jõutud järeldusele, et $a + b = 2c$ või $a + b = c$: 2 p
- Läbi analüüsitud juht $a + b = 2c$ ning leitud sobivad kolmikud (n, n, n): 1 p
- Läbi analüüsitud juht $a + b = c$ ning leitud sobivad kolmikud $(n, n, 2n)$ ja $(n, 2n, 3n)$: 4 p

Ainult õige vastuse (kõigi nõutud arvukolmikute kirjeldus) eest ilma selgitusteta anda 1 punkt.

5.
- a)-osa: 5 p

  Sealhulgas

        - tõestatud, et kõik nurgad 0° ja 180° vahel sobivad: *4 p*
        - tõestatud, et ükski muu nurk ei sobi: *1 p*
    - b)-osa: 2 p

Ainult mõlema osa õige vastuse eest ilma selgitusteta anda 1 punkt. Ainult ühe osa õige vastuse eest anda 0 punkti.

6.
- Märgitud, et paarisarvuliste m ja n korral saab kogu ruudustiku katta: 1 p
- Tõestatud, et kui vähemalt üks arvudest m ja n on paaritu, siis ruudustikku katta ei saa: 6 p

  Sealhulgas
    - tõestatud, et ruudustiku nurgas asuv kujund ja nurgale kõige lähem nurgas mitteasuv kujund ei saa paikneda osaliselt üksteise peal: *3 p*
    - tõestatud, et ka kõik muud kujundid ei saa paikneda osaliselt üksteise peal: *2 p*
    - märgitud, et ühe paaritu mõõtme korral ei saa ruudustikku täielikult katta üksteise kõrval paiknevate kujunditega: *1 p*

Ainult õige vastuse (kõik paarisarvulised m ja n) eest ilma selgitusteta anda 1 punkt.

Hindamisjuhised

1.
- Teisendatud antud arvud kujule $\ln a$ ja $\ln b$: 3 p
- Märgitud, et arvude logaritmide võrdlemise asemel võime võrrelda nende argumente: 1 p
- Tehtud kindlaks, kumb arvudest a ja b on suurem: 3 p

Kui ülesannet on lahendatud logaritmfunktsiooni asemel mõne teise funktsiooni omaduste abil, siis anda idee eest võrrelda arvude endi asemel selle funktsiooni väärtusi või argumente 1 punkt (skeemi teine rida) ja ülesande teisendamise eest arvude $2011 \cdot 2013$ ja 2012^2 võrdlemisele 3 punkti (skeemi esimene rida).

Ainult õige vastuse $2 \ln 2012$ eest ilma selgitusteta anda 0 punkti.

2.
- Ülesande andmete järgi kirjutatud välja paraboolide võrrandid kujul $y = ax^2 + px$ ja $y = ax^2 + qx$: 1 p
- Puutuja tõusude tingimusest leitud $p = 12$ ja $q = 13$: 1 p
- Leitud esimese parabooli haripunkti x-koordinaat $-\frac{6}{a}$: 1 p
- Leitud esimese parabooli haripunkti y-koordinaat $-\frac{36}{a}$: 1 p
- Leitud kohad $-\frac{9}{a}$ ja $-\frac{4}{a}$, milles teisel paraboolil asuva punkti y-koordinaat võrdub esimese parabooli haripunkti y-koordinaadiga: 1 p
- Leitud puutujate tõusud -5 ja 5 nendes punktides: 1 p
- Antud vastuseks puutuja tõusude absoluutväärtus: 1 p

Ainult õige vastuse 5 eest ilma selgitusteta anda 1 punkt.

3. Seda ülesannet võib mitmel eri viisil, anname kaks hindamisskeemi.

Lahendus kahe koordinaattelje sissetoomisega (nagu žürii lahendus)

- Idee määrata karu lõppasukoht eraldi ida-lääne ja põhja-lõuna teljel: 2 p
- Välja kirjutatud geomeetriline jada, mille summa on karu nihe ühel neist kahest teljest: 1 p
- Leitud selle geomeetrilise jada summa: 2 p
- Leitud karu nihe teisel neist kahest teljest: 2 p

Lahendus karu nihke leidmisega igas neljas suunas.

- Välja kirjutatud geomeetriline jada, mille summa on karu nihe ühes neljast suunast: 1 p
- Leitud selle geomeetrilise jada summa: 2 p
- Leitud teisele suunale vastava geomeetrilise jada summa: 1 p
- Leitud kolmandale suunale vastava geomeetrilise jada summa: 1 p
- Leitud neljandale suunale vastava geomeetrilise jada summa: 1 p
- Tulemused õigesti kahekaupa kokku võetud: 1 p

Ainult täieliku õige vastuse ($\frac{4}{5}$ meetrit ida ja $\frac{2}{5}$ meetrit põhja suunas) eest anda 1 punkt. Ainult ühe õige koordinaadi korral (teine vale või puudub) anda 0 punkti.

4.
- Läbi analüüsitud juht, kus punkt D asub kiirel BA: 4 p

  Sealhulgas
  - tõestatud, et sel juhul alati $\angle CEA = \angle CAB$: *2 p*
  - tõestatud, et vaadeldav juht realiseerub parajasti siis, kui $\angle A > 60^\circ$: *2 p*
- Läbi analüüsitud juht, kus punkt D asub kiirel AB: 3 p

  Sealhulgas
  - saadud, et sellel juhul on CEF võrdhaarne kolmnurk: *1 p*
  - saadud, et sellel juhul on CEF täisnurkne kolmnurk: *1 p*
  - saadud, et sellel juhul on $\angle A = 45^\circ$: *1 p*

Ainult täieliku õige vastuse $\angle A > 60^\circ$ ja $\angle A = 45^\circ$ eest ilma selgitusteta anda 1 punkt.

5.
- Tõestatud, et kui $d = 0$, siis leidub selline täisarv a: 1 p
- Tõestatud, et kui d on paaritu arv, siis sellist täisarvu a ei leidu: 2 p
- Tõestatud, et kui $d = 8k + 4$, siis leidub selline täisarv a: 2 p
- Tõestatud, et ülejäänud juhtudel sellist täisarvu ei leidu: 2 p

Ainult täieliku õige vastuse (sobivate arvude kirjeldus) eest ilma selgitusteta anda 1 punkt.

6.
- Kirjeldatud strateegiat, mille kohaselt Pipi vajutab alati kõige parempoolsemat nuppu: 2 p
- Tõestatud, et selle strateegia järgi tegutsedes saab Pipi alati käigu teha: 1 p
- Tõestatud, et selle strateegia järgi tegutsedes Pipi alati võidab: 4 p

Ainult õige vastuse „Jah, Pipil“ eest ilma adekvaatsete selgitusteta anda 0 punkti.