Eesti LVIII matemaatikaolümpiaad

15. jaanuar 2011 Piirkonnavoor **7. klass**

I osa. *Lahendamisaega on 40 minutit.*
Sellele lehele kirjuta ainult vastused, lahendamiseks võid kasutada lisapaberit.
Iga ülesande õige vastus annab 2 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Leia naturaalarv n nii, et kehtiks võrdus $\dfrac{2^{100}+2^{99}}{3}=2^n$.

. . . .

2. Leia vähim positiivne täisarv a, mille korral arv $2011+a$ jagub arvuga 201.

. . . .

3. Jukul on sel veerandil matemaatikas ainult kolm kahte. Mitu viit peab Juku nüüd lisaks saama, et tema keskmine hinne matemaatikas oleks täpselt 4?

. . . .

4. Leia kõik positiivsed täisarvud a, mille korral leidub selline positiivne täisarv b, et

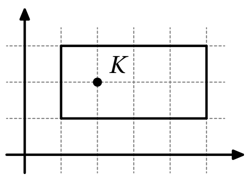
$$\frac{1}{2}-\frac{b}{3}=\frac{1}{a}\,.$$

. . . .

5. Kui palju on selliseid positiivseid täisarve n, et $n \leqslant 100$ ja murd $\dfrac{n}{22}$ on taandumatu?

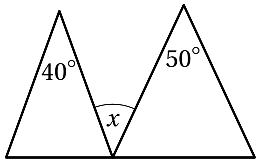
. . . .

6. Koordinaattasandil on ristkülik, mille tippude koordinaadid on $(1;1)$, $(5;1)$, $(5;3)$ ja $(1;3)$. Ristkülikus on märgitud punkt K koordinaatidega $(2;2)$. Seda ristkülikut koos punktiga K pööratakse 90° võrra kellaosuti liikumise suunas ümber punkti $(5;1)$. Leia punkti K koordinaadid pärast pööramist.



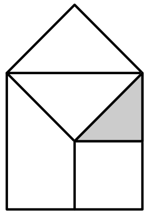
. . . .

7. Joonisel on kujutatud kaks võrdhaarset kolmnurka tipunurkadega 40° ja 50°, mille alused on ühel ja samal sirgel. Leia nurga x suurus.



. . . .

8. Joonisel olev kujund moodustub kolmest ruudust ning selle tumedaks värvitud osa pindala on $1\,\mathrm{dm}^2$. Leia kujundi värvimata osa pindala.

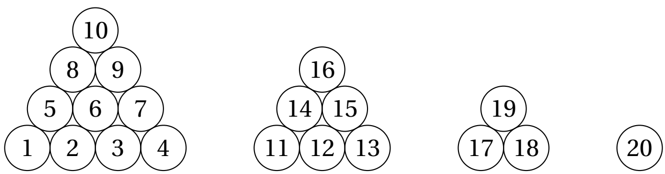


. . . .

9. Kella minutiosuti pikkus on $10\,\mathrm{cm}$. Kui pika aja jooksul läbib minutiosuti ots tee pikkusega $55\pi\,\mathrm{cm}$?

. . . .

10. Mare laob 20 mandariinist lauale kolmnurkse püramiidi taolise kuhja. Esimesed 10 mandariini asetab ta lauale nii nagu näidatud vasakpoolsel joonisel, nende peale paneb ta teise kihi 6 mandariinist (igaüks neist toetub kolmele alumise kihi mandariinile) jne.



1. kiht 2. kiht 3. kiht 4. kiht

Mandariine on võimalik eemaldada neid ühekaupa üles tõstes. Mandariini eemaldamiseks ei tohi ta puutuda ühtki temast kõrgemal asuvat mandariini. Mitu mandariini on vähemalt vaja eemaldada enne, kui on võimalik kätte saada mandariin number 6?

. . . .

Eesti LVIII matemaatikaolümpiaad

15. jaanuar 2011 Piirkonnavoor **8. klass**

I osa. *Lahendamisaega on 40 minutit.*
Sellele lehele kirjuta ainult vastused, lahendamiseks võid kasutada lisapaberit.
Iga ülesande õige vastus annab 2 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Leia naturaalarv n nii, et kehtiks võrdus $\dfrac{2^{2011}+2^{2010}}{6} = 2^n$.

. . . .

2. Leia vähim positiivne täisarv a, mille korral arv $2011 + a$ jagub arvuga 18.

. . . .

3. Kotis on ainult punased ja rohelised õunad. Punaste õunte arv moodustab $\dfrac{3}{4}$ roheliste õunte arvust. Kui suure osa moodustab punaste õunte arv kõikide õunte koguarvust?

. . . .

4. Leia kõik positiivsed täisarvud a, mille korral leidub selline positiivne täisarv b, et

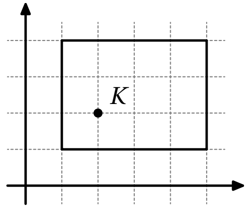
$$\frac{b}{2} - \frac{b}{3} = \frac{1}{a}.$$

. . . .

5. Kui palju on selliseid positiivseid täisarve n, et nii $\dfrac{n}{2}$ kui ka $2n$ on kolmekohalised naturaalarvud?

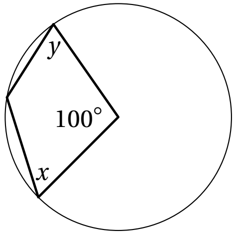
. . . .

6. Koordinaattasandil on ristkülik, mille tippude koordinaadid on $(1;1)$, $(5;1)$, $(5;4)$ ja $(1;4)$. Ristkülikus on märgitud punkt K koordinaatidega $(2;2)$. Seda ristkülikut koos punktiga K pööratakse kaks korda 90° võrra kellaosuti liikumise vastassuunas — esmalt ümber punkti $(5;1)$ ja seejärel ümber punkti $(5;-3)$. Leia punkti K koordinaadid pärast kaht pööramist.



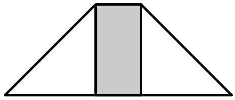
. . . .

7. Joonisel kujutatud nelinurga üks tipp asub ringjoone keskpunktis, ülejäänud kolm tippu aga ringjoonel. Leia tähtedega x ja y märgitud nurkade suuruste summa.



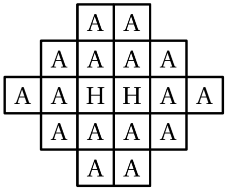
. . . .

8. Joonisel on võrdhaarne trapets, mille üks alus on teisest 5 korda pikem. Mitu korda on trapetsi pindala suurem tumedaks värvitud ristküliku pindalast?



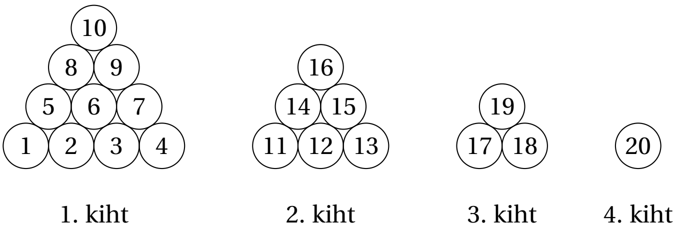
. . . .

9. Joonisel kujutatud ruudustikus saab moodustada sõnu, liikudes ruudult ruudule üle nende ühise külje. Mitu võimalust on viie erineva ruudu valikuks nii, et neid mööda liikudes saame sõna AHHAA?



. . . .

10. Mare laob 20 mandariinist lauale kolmnurkse püramiidi taolise kuhja. Esimesed 10 mandariini asetab ta lauale nii nagu näidatud vasakpoolsel joonisel, nende peale paneb ta teise kihi 6 mandariinist (igaüks neist toetub kolmele alumise kihi mandariinile) jne.



Mandariine on võimalik eemaldada neid ühekaupa üles tõstes. Mandariini eemaldamiseks ei tohi ta puutuda ühtki temast kõrgemal asuvat mandariini. Mitu mandariini on vähemalt vaja eemaldada enne, kui on võimalik kätte saada mandariin number 4?

. . . .

Eesti LVIII matemaatikaolümpiaad

15. jaanuar 2011 Piirkonnavoor **9. klass**

I osa. *Lahendamisaega on 40 minutit.*
Sellele lehele kirjuta ainult vastused, lahendamiseks võid kasutada lisapaberit.
Iga ülesande õige vastus annab 2 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Leia naturaalarv n nii, et kehtiks võrdus $\dfrac{2^{2011}+2^{2010}+2^{2009}}{28}=2^n$.

. . . .

2. Leia positiivsed täisarvud a ja b nii, et $2011 = 11a + b$, kus $b < 11$.

$a =$ . . . . $b =$ . . . .

3. Õppeveerandi jooksul tuli teha 5 kontrolltesti. Iga testi eest võis saada kuni 100 punkti. Jüri nelja testi keskmine tulemus oli 75 punkti. Mitu punkti võib maksimaalselt olla tema viie testi keskmine tulemus?

. . . .

4. Leia kõik positiivsed täisarvud a, mille korral leidub selline positiivne täisarv b, et

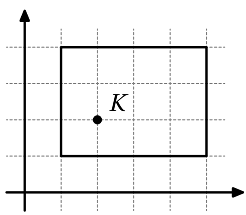
$$\frac{4}{b}-\frac{b}{5}=\frac{1}{a}.$$

. . . .

5. Kui palju on selliseid positiivseid täisarve n, et nii $\dfrac{n}{3}$ kui ka $3n$ on neljakohalised naturaalarvud?

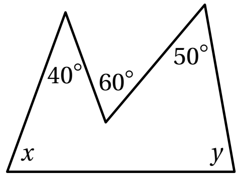
. . . .

6. Koordinaattasandil on ristkülik, mille tippude koordinaadid on $(1;1)$, $(5;1)$, $(5;4)$ ja $(1;4)$. Ristkülikus on märgitud punkt K koordinaatidega $(2;2)$. Seda ristkülikut koos punktiga K pööratakse kaks korda 90° võrra — esmalt kellaosuti liikumise vastassuunas ümber punkti $(1;1)$ ja seejärel kellaosuti liikumise suunas ümber punkti $(-2;5)$. Leia punkti K koordinaadid pärast kaht pööramist.



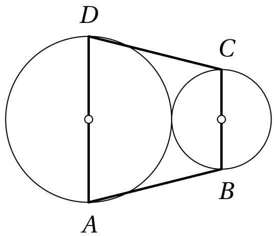
. . . .

7. Leia joonisel tähtedega x ja y märgitud nurkade suuruste summa.



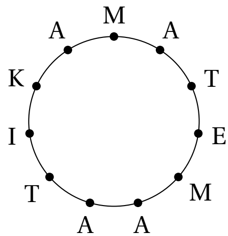
. . . .

8. Kaks eri suurusega ringjoont puutuvad teineteist väliselt. Võrdhaarse trapetsi $ABCD$ alused on nende ringjoonte diameetriteks. Leia ringjoonte raadiused, kui trapetsi pindala on $64\,\mathrm{cm}^2$ ja ühe ringjoone raadius moodustab 60% teise ringjoone raadiusest.



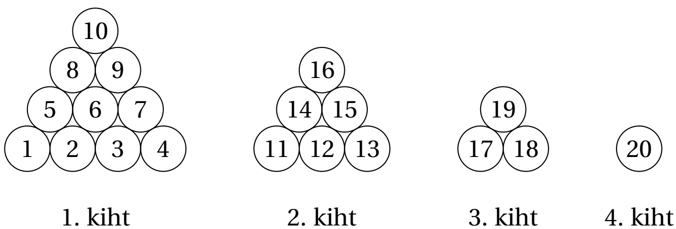
. . . .

9. Mitu erinevat murdjoont, mille tippudeks on ringjoonel märgitud punktid (iga punkt üks kord) ning murdjoon algab tähega M ja lõpeb tähega A märgitud punktis, saab joonistada nii, et murdjoont mööda liikudes moodustub sõna MATEMAATIKA?



. . . .

10. Mare laob 20 mandariinist lauale kolmnurkse püramiidi taolise kuhja. Esimesed 10 mandariini asetab ta lauale nii nagu näidatud vasakpoolsel joonisel, nende peale paneb ta teise kihi 6 mandariinist (igaüks neist toetub kolmele alumise kihi mandariinile) jne.



Mandariine on võimalik eemaldada neid ühekaupa üles tõstes. Mandariini eemaldamiseks ei tohi ta puutuda ühtki temast kõrgemal asuvat mandariini. Mitu mandariini on vähemalt vaja eemaldada enne, kui on võimalik kätte saada mandariin number 7?

. . . .

Eesti LVIII matemaatikaolümpiaad

15. jaanuar 2011 Piirkonnavoor **7. klass**

II osa. *Lahendamisaega on 2 tundi.*
Ülesannete lahendused kirjuta eraldi lehele.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti. Ainult vastusest ei piisa!
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Vaatleme positiivseid täisarve, mis rahuldavad järgmisi tingimusi:

(1) arvu kõik numbrid on erinevad ja on vasakult paremale kasvavas järjekorras;

(2) arv ei sisalda numbrit 5;

(3) arvu numbrite summa jagub 5-ga.

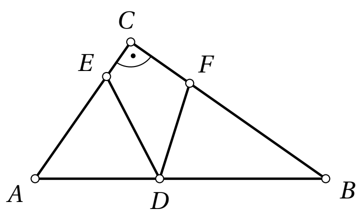
Kas leidub selliste omadustega

a) kuuekohalisi arve;

b) seitsmekohalisi arve?

Kui leidub, siis leia vähim ja suurim selline arv; kui ei leidu, siis põhjenda, miks.

2. Täisnurkse kolmnurga ABC hüpotenuusil AB valitakse punkt D ning kaatetitel AC ja BC vastavalt punktid E ja F nii, et $|AE| = |AD|$ ja $|BF| = |BD|$ (vt joonist). Leia nurga EDF suurus.



3. Arhitektid Aron, Baron, Caron, Daron ja Eron esitasid oma projektid konkursile. Kuni komisjon töid hindas, tegid arhitektid järgmised avaldused.

Aron: Baroni töö saab I koha, Daroni töö jääb viimaseks.
Baron: Minu töö saab II koha, Aroni töö saab III koha.
Caron: Minu töö saab III koha, Daroni töö saab IV koha.
Daron: Baroni töö saab III koha, Aroni töö saab IV koha.
Eron: Minu töö saab I koha, Caroni töö jääb viimaseks.

Kui tulemused teatavaks tehti, selgus, et kohad jagamisele ei läinud ning iga arhitekti avalduse kahest poolest osutus üks tõeseks ja teine vääraks. Millise koha iga arhitekti töö konkursil sai?

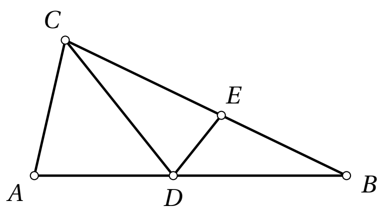
Eesti LVIII matemaatikaolümpiaad

15. jaanuar 2011 Piirkonnavoor **8. klass**

II osa. *Lahendamisaega on 2 tundi.*
Ülesannete lahendused kirjuta eraldi lehele.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti. Ainult vastusest ei piisa!
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Kurrunurruvutisaarel on käibel rahaühik kurr, mis jaguneb n nurruks, ning iga nurr omakorda jaguneb m vutiks, kus n ja m on positiivsed täisarvud ja $n < m$. Pipi ostis poest jäätise, mis maksis 1 nurru ja 2 vutti; šokolaadi, mis maksis 3 nurru ja 4 vutti, ning suure karbi klaaskomme 5 nurru ja 6 vuti eest. Kokku maksis Pipi 1 kurru, 2 nurru ja 3 vutti. Leia arvud n ja m.

2. Kolmnurga ABC külgedel AB ja BC asuvad vastavalt punktid D ja E nii, et $|AC| = |AD| = |BE|$ ja $|CD| = |CE| = |BD|$ (vt joonist). Leia nurga CDE suurus.



3. Naturaalarvude n ja $n+2$ korrutise üheliste number on 4.

a) Leia selle korrutise kümneliste numbri kõik võimalikud väärtused.

b) Leia vähim ja suurim ülesande tingimusele vastav arv n, mille korral arvude n ja $n+2$ korrutis on neljakohaline.

Eesti LVIII matemaatikaolümpiaad

15. jaanuar 2011 Piirkonnavoor **9. klass**

II osa. *Lahendamisaega on 4 tundi.*
Ülesannete lahendused kirjuta eraldi lehele.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti. Ainult vastusest ei piisa!
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Jüri mõtles kolmekohalise arvu n, millel on järgmised omadused: arv n ise jagub 2-ga; temast 2 võrra suurem arv jagub 3-ga ning temast 3 võrra väiksem arv jagub 5-ga. Kui arvu n numbrite järjekord pöörata vastupidiseks, saame samade omadustega arvu. Leia kõik võimalused, millise arvu n võis Jüri mõelda.

2. On antud rööpkülik $ABCD$. Kolmnurkade ABD ja CBD mediaanide lõikepunktid on vastavalt M ja N. Leia lõigu MN pikkus, kui $|AC| = 21\,\mathrm{cm}$.

3. Tähistagu arvude x ja y korral kirjutis $x * y$ arvu $\dfrac{x+y}{xy+4}$. Leia avaldise

$$0 * \left(1 * \left(2 * \left(3 * \left(4 * \left(5 * \left(6 * \left(7 * (8 * 9)\right)\right)\right)\right)\right)\right)\right)$$

väärtus.

4. Naturaalarvude $1, 4, 7, 10, \ldots, 97, 100$ hulgast valitakse välja mingid 20 arvu. Tõesta, et leiduvad kaks erinevat valitud arvu, mille summa on 104.

Eesti LVIII matemaatikaolümpiaad

15. jaanuar 2011 Piirkonnavoor **10. klass**

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Eelmisel veerandil moodustas Juku viite arv 60% tema kahtede arvust. Uuel veerandil võttis Juku eesmärgiks parandada oma õppeedukust, nii et viite arv moodustaks 80% kahtede arvust, ning tal õnnestuski suurendada oma viite arvu 20% võrra võrreldes eelmise veerandiga. Mitme protsendi võrra pidi ta lisaks vähendama kahtede arvu, et võetud eesmärk saavutada?

2. Olgu a ja b mingid positiivsed reaalarvud, kusjuures $a > b$. Kumb murdudest erineb vähem arvust 1, kas $\frac{a}{b}$ või $\frac{b}{a}$?

3. Matemaatikatunnis pidi Jüri jagama positiivse täisarvu n positiivse täisarvuga m, leides jagatise ja jäägi.

a) Tõesta, et kui leitud jagatis ja jääk on võrdsed, siis arv n jagub arvuga $m+1$.

b) Kas kehtib ka pöördväide: alati, kui arv n jagub arvuga $m+1$, on n jagamisel m-ga tekkiv jagatis ja jääk võrdsed?

4. Mari joonestas paberile ringjoone ja jaotas selle punktidega kuueks võrdseks osaks. Iga saadud punkti keskpunktina kasutades joonestas ta veel kuus ringjoont, mis kõik on esimese ringjoonega võrdse raadiusega. Seejärel kustutas ta ära uute ringjoonte need osad, mis asuvad väljaspool esimest ringjoont, ning ka esimese ringjoone enda. Leia järelejäänud „lilleõie“ pindala, kui ringjoonte raadius on 1.

5. Olgu x ja y sellised erinevad positiivsed reaalarvud, et $x - \sqrt{xy}$ ja $y - \sqrt{xy}$ on ratsionaalarvud. Tõesta, et ka x ja y on ratsionaalarvud.

6. Kuubi tipud värvitakse 3 värviga nii, et kuubi igal serval on otspunktid eri värvi. Tõesta, et leidub võrdkülgne kolmnurk, mille tippudeks on kuubi ühte värvi tipud.

Eesti LVIII matemaatikaolümpiaad

15. jaanuar 2011 Piirkonnavoor **11. klass**

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Lahenda võrrand

$$(x+1)^2 - |x+1| + x + 1 = 0\,.$$

2. Leia kõik sellised nurgad α, et $0 \leqslant \alpha < 360^\circ$ ja

$$\frac{\sin\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin 2\alpha}\,.$$

3. Kas võrrandil

$$\frac{x^5 - 5x^3 + 4x}{100} = 987654321$$

on täisarvulisi lahendeid?

4. On antud kolmnurk ABC ning ringjoon, mille keskpunkt asub kolmnurga küljel AB ja mis puutub sirgeid AC ja BC. Tõesta, et kolmnurga ABC pindala on võrdne külgede AC ja BC pikkuste aritmeetilise keskmise ja selle ringjoone raadiuse korrutisega.

5. Tõesta, et iga reaalarvu $a > 1$ korral kehtib võrratus

$$\frac{1}{1+a} + \frac{2}{1+a^2} + \frac{4}{1+a^4} + \frac{8}{1+a^8} < \frac{1}{a-1}\,.$$

6. Marjel on kotis 9 pliiatsit, millest vähemalt üks on sinine. Mistahes neljast pliiatsist on vähemalt kaks ühte värvi ja mistahes viie pliiatsi hulgas on ülimalt kolm ühte värvi. Mitu sinist pliiatsit on Marje kotis?

Eesti LVIII matemaatikaolümpiaad

15. jaanuar 2011 Piirkonnavoor **12. klass**

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Aritmeetilise jada üheteistkümnes liige on 20 ning esimese kahekümne liikme aritmeetiline keskmine on 11. Leia selle jada esimene liige.

2. Funktsiooni $y = x^2 + ax - 2$ ja tema tuletise graafikud lõikuvad kahes punktis, mis paiknevad erineval pool y-telge sellest võrdsel kaugusel. Leia nende lõikepunktide koordinaadid ja a väärtus.

3. Leia kõik reaalarvud x, mille korral kehtib võrdus

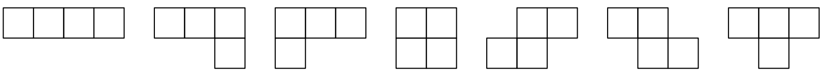
$$\sqrt{x-4-2\sqrt{x-5}} + \sqrt{x+4-6\sqrt{x-5}} = 2\,.$$

4. Täisnurkses kolmnurgas võetakse mõlema kaateti ristprojektsioonid hüpotenuusile. Tõesta, et kaateti ja tema projektsiooni pikkuste vahe on väiksem kui pool teise kaateti projektsiooni pikkusest.

5. Leia kõik positiivsete täisarvude kolmikud (x, y, z), mis rahuldavad võrrandit

$$\frac{x+y-z}{x+z-y} + \frac{y+z-x}{x+y+z} = \frac{xyz}{2}\,.$$

6. Jukul on ruudulisest paberist välja lõigatud kõik erinevad *tetrominokujundid*, st kujundid, mis koosnevad neljast omavahel külgipidi ühendatud ühikruudust (vt joonist).



Kas Juku saab oma kujunditest moodustada ristküliku, nii et iga kujund on kasutatud täpselt üks kord? Kujundeid võib selleks tasandil pöörata, kuid mitte üles tõsta ja teistpidi keerata.

LVIII Олимпиада Эстонии по математике

15 января 2011 г. Региональный тур **7 класс**

I часть. *Время, отводимое для решения: 40 минут.*
На этом листке написать только ответы, для решения можно использовать дополнительную бумагу.
Верный ответ каждой задачи даёт 2 балла.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Найти натуральное число n такое, что $\dfrac{2^{100}+2^{99}}{3} = 2^n$.

. . . .

2. Найти наименьшее положительное целое число a, при котором число $2011 + a$ делится на число 201.

. . . .

3. В этой четверти Юра получил по математике только три двойки. Сколько пятёрок должен теперь получить Юра, чтобы его средняя оценка по математике была бы ровно 4?

. . . .

4. Найти все положительные целые числа a, при которых найдётся такое положительное целое число b, что

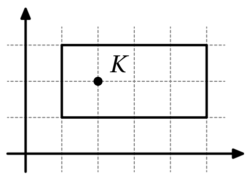
$$\frac{1}{2} - \frac{b}{3} = \frac{1}{a}\,.$$

. . . .

5. Сколько всего существует таких положительных целых чисел n, что $n \leqslant 100$, а дробь $\dfrac{n}{22}$ является несократимой?

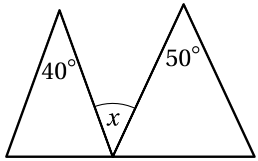
. . . .

6. На координатной плоскости расположен прямоугольник, координаты вершин которого равны $(1;1)$, $(5;1)$, $(5;3)$ и $(1;3)$. Внутри прямоугольника обозначена точка K с координатами $(2;2)$. Этот прямоугольник вместе с точкой K поворачивают на 90° по часовой стрелке вокруг точки $(5;1)$. Найти координаты точки K после поворота.



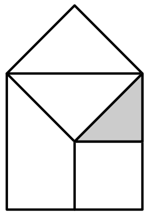
. . . .

7. На рисунке изображены два равнобедренных треугольника, углы при вершинах которых равны 40° и 50°, и основания которых лежат на одной прямой. Найти величину угла x.



. . . .

8. Изображённая на рисунке фигура состоит из трёх квадратов, а площадь окрашенной тёмным цветом части равна 1 дм^2. Найти площадь неокрашенной части фигуры.

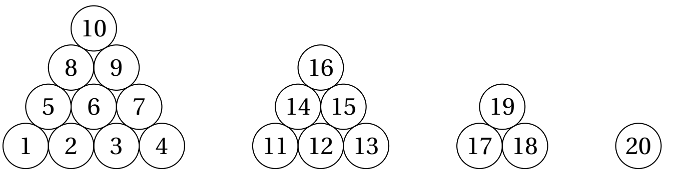


. . . .

9. Длина минутной стрелки часов равна 10 см. За сколько времени кончик минутной стрелки пройдёт путь длиной 55π см?

. . . .

10. Маша складывает на столе горку из 20 мандаринов в виде треугольной пирамиды. Первые 10 мандаринов она кладёт на стол так, как показано на левом рисунке, на них она кладёт второй слой из 6 мандаринов (каждый из которых опирается на три мандарина из нижнего слоя) и так далее.



1. слой 2. слой 3. слой 4. слой

Мандарины можно забирать из горки, поднимая их по одному. Но чтобы забрать мандарин, нельзя, чтобы он касался какого-либо мандарина, находящегося выше него. Сколько мандаринов нужно по крайней мере забрать из горки перед тем, как появится возможность получить мандарин с номером 6?

. . . .

LVIII Олимпиада Эстонии по математике

15 января 2011 г. Региональный тур **8 класс**

I часть. *Время, отводимое для решения: 40 минут.*
На этом листке написать только ответы, для решения можно использовать дополнительную бумагу.
Верный ответ каждой задачи даёт 2 балла.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Найти натуральное число n такое, что $\dfrac{2^{2011}+2^{2010}}{6}=2^n$.

. . . .

2. Найти наименьшее положительное целое число a, при котором число $2011+a$ делится на число 18.

. . . .

3. В мешке лежат только красные и зелёные яблоки. Количество красных яблок составляет $\dfrac{3}{4}$ от количества зелёных яблок. Какую часть составляет количество красных яблок от количества всех яблок в мешке?

. . . .

4. Найти все положительные целые числа a, при которых найдётся такое положительное целое число b, что

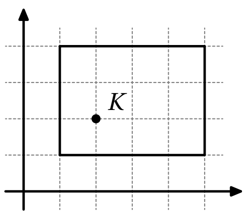
$$\frac{b}{2}-\frac{b}{3}=\frac{1}{a}\,.$$

. . . .

5. Сколько всего существует таких положительных целых чисел n, при которых как $\dfrac{n}{2}$, так и $2n$ являются трёхзначными натуральными числами?

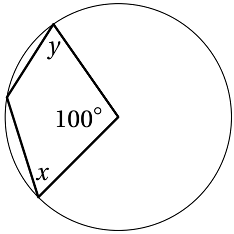
. . . .

6. На координатной плоскости расположен прямоугольник, координаты вершин которого равны $(1;1)$, $(5;1)$, $(5;4)$ и $(1;4)$. Внутри прямоугольника обозначена точка K с координатами $(2;2)$. Этот прямоугольник вместе с точкой K поворачивают два раза на 90° против часовой стрелки: сначала вокруг точки $(5;1)$, а затем вокруг точки $(5;-3)$. Найти координаты точки K после двух поворотов.



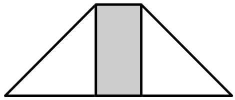
. . . .

7. Одна из вершин изображённого на рисунке четырёхугольника лежит в центре окружности, а три другие вершины лежат на окружности. Найти сумму величин углов, обозначенных буквами x и y.



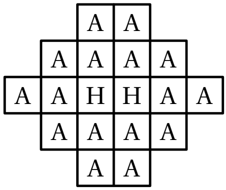
. . . .

8. На рисунке изображена равнобедренная трапеция, одно из оснований которой в 5 раз длиннее другого. Во сколько раз площадь трапеции больше площади окрашенного тёмным цветом прямоугольника?



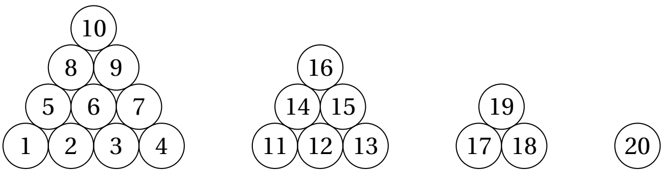
. . . .

9. На изображённой на рисунке клетчатой доске можно образовывать слова, передвигаясь с клетки на клетку через их общую сторону. Сколько всего существует возможностей для выбора пяти различных клеток так, чтобы передвигаясь по ним получить слово АННАА?



. . . .

10. Маша складывает на столе горку из 20 мандаринов в виде треугольной пирамиды. Первые 10 мандаринов она кладёт на стол так, как показано на левом рисунке, на них она кладёт второй слой из 6 мандаринов (каждый из которых опирается на три мандарина из нижнего слоя) и так далее.



1. слой 2. слой 3. слой 4. слой

Мандарины можно забирать из горки, поднимая их по одному. Но чтобы забрать мандарин, нельзя, чтобы он касался какого-либо мандарина, находящегося выше него. Сколько мандаринов нужно по крайней мере забрать из горки перед тем, как появится возможность получить мандарин с номером 4?

. . . .

LVIII Олимпиада Эстонии по математике

15 января 2011 г. Региональный тур **9 класс**

I часть. *Время, отводимое для решения: 40 минут.*
На этом листке написать только ответы, для решения можно использовать дополнительную бумагу.
Верный ответ каждой задачи даёт 2 балла.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Найти натуральное число n такое, что $\dfrac{2^{2011}+2^{2010}+2^{2009}}{28}=2^n$.

. . . .

2. Найти такие положительные целые числа a и b, что $2011 = 11a + b$, где $b < 11$.

$a =$ . . . . $b =$ . . . .

3. В течение учебной четверти нужно было сдать 5 контрольных тестов. За каждый тест можно было получить до 100 баллов. Средний результат четырёх тестов Юры был равен 75 баллам. Скольким баллам может быть максимально равен средний результат пяти его тестов?

. . . .

4. Найти все положительные целые числа a, при которых найдётся такое положительное целое число b, что

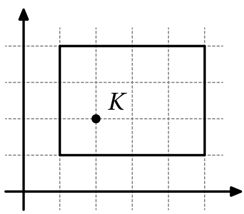
$$\frac{4}{b}-\frac{b}{5}=\frac{1}{a}\,.$$

. . . .

5. Сколько всего существует таких положительных целых чисел n, при которых как $\dfrac{n}{3}$, так и $3n$ являются четырёхзначными натуральными числами?

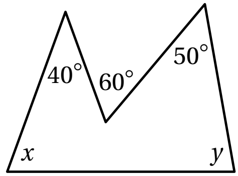
. . . .

6. На координатной плоскости расположен прямоугольник, координаты вершин которого равны $(1;1)$, $(5;1)$, $(5;4)$ и $(1;4)$. Внутри прямоугольника обозначена точка K с координатами $(2;2)$. Этот прямоугольник вместе с точкой K поворачивают два раза на 90°: сначала против часовой стрелки вокруг точки $(1;1)$, а затем по часовой стрелке вокруг точки $(-2;5)$. Найти координаты точки K после двух поворотов.



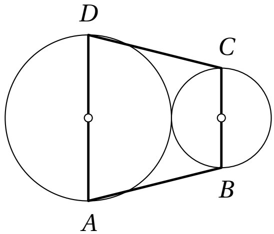
. . . .

7. Найти сумму величин углов, обозначенных на рисунке буквами x и y.



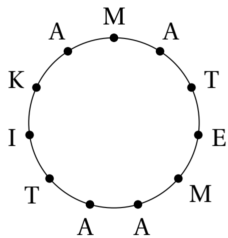
. . . .

8. Две окружности различной величины касаются друг друга внешним образом. Основания равнобедренной трапеции $ABCD$ являются диаметрами этих окружностей. Найти радиусы окружностей, если площадь трапеции равна 64 см^2, а радиус одной окружности составляет 60% от радиуса другой окружности.



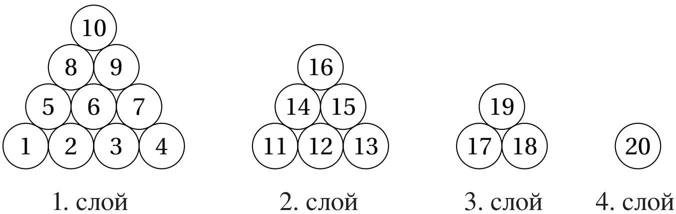
. . . .

9. Сколько всего можно нарисовать различных ломаных, вершинами которых являются обозначенные на окружности точки (каждая точка по одному разу), которые начинаются с точки, обозначенной буквой M, и заканчиваются в точке, обозначенной буквой A, так, чтобы двигаясь вдоль такой ломаной, образовывалось слово MATEMAATIKA?



. . . .

10. Маша складывает на столе горку из 20 мандаринов в виде треугольной пирамиды. Первые 10 мандаринов она кладёт на стол так, как показано на левом рисунке, на них она кладёт второй слой из 6 мандаринов (каждый из которых опирается на три мандарина из нижнего слоя) и так далее.



Мандарины можно забирать из горки, поднимая их по одному. Но чтобы забрать мандарин, нельзя, чтобы он касался какого-либо мандарина, находящегося выше него. Сколько мандаринов нужно по крайней мере забрать из горки перед тем, как появится возможность получить мандарин с номером 7?

. . . .

II часть. *Время, отводимое для решения: 2 часа.*
Решения задач написать на отдельном листе.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов. Написать только ответ недостаточно!
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Рассмотрим положительные целые числа, для которых выполняются следующие условия:

(1) все цифры числа различны и расположены в порядке возрастания слева направо;

(2) число не содержит цифру 5;

(3) сумма цифр числа делится на число 5.

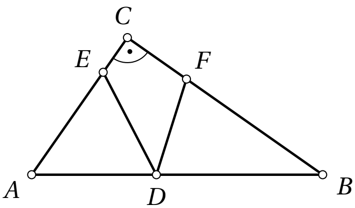
Существуют ли выполняющие данные условия

а) шестизначные числа;

б) семизначные числа?

Если существуют, то найти наименьшее и наибольшее такое число; если не существуют, то пояснить, почему.

2. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC выбирают точку D, а на катетах AC и BC соответственно точки E и F так, что $|AE| = |AD|$ и $|BF| = |BD|$ (см. рисунок). Найти величину угла EDF.



3. Архитекторы Альтов, Ветров, Серов, Дубов и Ежов представили на конкурс свои проекты. В ожидании, пока комиссия оценивала работы, архитекторы сделали следующие заявления.

Альтов: Работа Ветрова займёт I место, работа Дубова будет на последнем месте.
Ветров: Моя работа займёт II место, работа Альтова займёт III место.
Серов: Моя работа займёт III место, работа Дубова займёт IV место.
Дубов: Работа Ветрова займёт III место, работа Альтова займёт IV место.
Ежов: Моя работа займёт I место, работа Серова будет на последнем месте.

Когда стали известны результаты, выяснилось, что дележа мест не было, и что одно из двух заявлений каждого архитектора оказалось правдивым, а другое ложным. На каком месте оказались работы каждого из архитекторов на конкурсе?

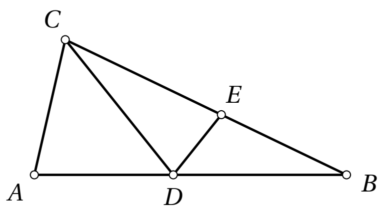
LVIII Олимпиада Эстонии по математике

15 января 2011 г. Региональный тур **8 класс**

II часть. *Время, отводимое для решения: 2 часа.*
Решения задач написать на отдельном листе.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов. Написать только ответ недостаточно!
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. На острове Карнарвар используют денежную единицу кар, которая делится на n наров, а каждый нар в свою очередь делится на m варов, где n и m являются положительными целыми числами, а $n < m$. Пэппи купила в магазине мороженое, которое стоило 1 нар и 2 вара; шоколад, который стоил 3 нара и 4 вара, и большую коробку конфет за 5 наров и 6 варов. Всего Пэппи заплатила 1 кар, 2 нара и 3 вара. Найти числа n и m.

2. На сторонах AB и BC треугольника ABC лежат соответственно точки D и E так, что $|AC| = |AD| = |BE|$ и $|CD| = |CE| = |BD|$ (см. рисунок). Найти величину угла CDE.



3. Цифра единиц произведения натуральных чисел n и $n+2$ равна 4.

а) Найти все возможные значения цифры десятков этого произведения.

б) Найти наименьшее и наибольшее число n, для которого выполняется условие задачи, и при котором произведение чисел n и $n+2$ является четырёхзначным.

II часть. *Время, отводимое для решения: 4 часа.*
Решения задач написать на отдельном листе.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов. Написать только ответ недостаточно!
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Юра задумал трёхзначное число n, которое имеет следующие свойства: само число n делится на 2; число, большее его на 2, делится на 3, а число, меньшее его на 3, делится на 5. Если же цифры числа n записать в обратном порядке, то получится число, имеющее такие же свойства. Найти все возможные числа n, которые мог задумать Юра.

2. Дан параллелограмм $ABCD$. Пусть точки M и N являются точками пересечения медиан соответственно треугольников ABD и CBD. Найти длину отрезка MN, если $|AC| = 21$ см.

3. Пусть для чисел x и y запись $x * y$ обозначает число $\dfrac{x+y}{xy+4}$. Найти значение выражения

$$0 * \Bigg(1 * \Bigg(2 * \bigg(3 * \bigg(4 * \Big(5 * \Big(6 * \big(7 * (8 * 9)\big)\Big)\Big)\bigg)\bigg)\Bigg)\Bigg).$$

4. Из множества натуральных чисел $1, 4, 7, 10, \ldots, 97, 100$ выбирают некоторые 20 чисел. Доказать, что среди выбранных чисел найдутся два различных числа, сумма которых равна 104.

LVIII Олимпиада Эстонии по математике

15 января 2011 г. Региональный тур **10 класс**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. В прошлой четверти количество полученных Юрой пятёрок составило 60% от количества полученных им двоек. В новой четверти Юра поставил задачу улучшить свою успеваемость так, чтобы количество пятёрок составило бы 80% от количества двоек. Ему и удалось увеличить количество пятёрок на 20% по сравнению с прошлой четвертью. На сколько процентов он должен был кроме этого уменьшить количество двоек, чтобы достичь поставленной цели?

2. Пусть a и b некоторые положительные действительные числа, причём $a > b$. Какая из дробей меньше отличается от числа 1, $\frac{a}{b}$ или $\frac{b}{a}$?

3. На уроке математики Юра должен был поделить положительное целое число n на положительное целое число m, чтобы найти частное и остаток.

а) Доказать, что если найденные частное и остаток равны между собой, то число n делится на число $m + 1$.

б) Выполняется ли обратное утверждение: всегда, когда число n делится на число $m + 1$, частное и остаток при делении числа n на число m равны между собой?

4. Маша нарисовала на листке бумаги окружность и поделила её точками на шесть равных частей. Использовав каждую из полученных точек как центр окружности, она нарисовала ещё шесть окружностей, радиус каждой из которых был равен радиусу первой окружности. Затем она стёрла те части новых окружностей, которые лежали вне первой окружности, а также саму первую окружность. Найти площадь оставшегося на листке бумаги „цветка“, если радиус окружностей равен 1.

5. Пусть x и y такие различные положительные действительные числа, что $x - \sqrt{xy}$ и $y - \sqrt{xy}$ являются рациональными числами. Доказать, что x и y также являются рациональными числами.

6. Вершины куба окрашивают 3 цветами так, чтобы концы каждого ребра куба были окрашены различными цветами. Доказать, что найдётся равносторонний треугольник, вершинами которого будут вершины куба одинакового цвета.

LVIII Олимпиада Эстонии по математике

15 января 2011 г. Региональный тур **11 класс**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Решить уравнение

$$(x+1)^2 - |x+1| + x + 1 = 0 .$$

2. Найти все такие углы α, что $0 \leqslant \alpha < 360^\circ$ и

$$\frac{\sin\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin 2\alpha} .$$

3. Имеет ли уравнение

$$\frac{x^5 - 5x^3 + 4x}{100} = 987654321$$

целочисленные решения?

4. Дан треугольник ABC и окружность, центр которой лежит на стороне AB данного треугольника, и которая касается прямых AC и BC. Доказать, что площадь треугольника ABC равна произведению радиуса этой окружности и среднего арифметического длин его сторон AC и BC.

5. Доказать, что для каждого действительного числа $a > 1$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{1+a} + \frac{2}{1+a^2} + \frac{4}{1+a^4} + \frac{8}{1+a^8} < \frac{1}{a-1} .$$

6. У Маши в сумке 9 карандашей, по крайней мере один из которых синего цвета. Среди любых четырёх карандашей не менее двух одного и того же цвета, а среди любых пяти карандашей не более трёх одного и того же цвета. Сколько синих карандашей в сумке у Маши?

LVIII Олимпиада Эстонии по математике

15 января 2011 г. Региональный тур **12 класс**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Одиннадцатый член арифметической прогрессии равен 20, а среднее арифметическое первых двадцати членов этой прогрессии равно 11. Найти первый член этой прогрессии.

2. Графики функции $y = x^2 + ax - 2$ и её производной пересекаются в двух точках, которые лежат по разные стороны от оси y на одном и том же расстоянии от неё. Найти координаты этих точек пересечения и значение a.

3. Найти все действительные числа x, при которых выполняется равенство

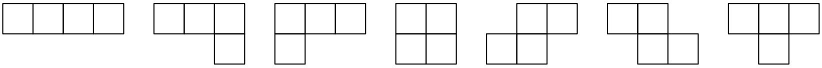
$$\sqrt{x - 4 - 2\sqrt{x-5}} + \sqrt{x + 4 - 6\sqrt{x-5}} = 2\,.$$

4. В прямоугольном треугольнике рассматривают перпендикулярные проекции обоих катетов на гипотенузу. Доказать, что разность длин катета и его проекции меньше, чем половина длины проекции другого катета.

5. Найти все тройки положительных целых чисел $(x,\ y,\ z)$, при которых выполняется уравнение

$$\frac{x+y-z}{x+z-y} + \frac{y+z-x}{x+y+z} = \frac{xyz}{2}\,.$$

6. У Юры вырезаны из клетчатого листка бумаги все различные *фигуры тетромино*, то есть такие фигуры, которые состоят из четырёх клеток, соединённых путём совмещения сторон (см. рисунок).



Может ли Юра из своих фигур составить прямоугольник так, чтобы каждая фигура была использована ровно один раз? Фигуры можно для этого поворачивать на плоскости, но нельзя их поднимать и переворачивать на другую сторону.

Eesti LVIII matemaatikaolümpiaad

15. jaanuar 2011 Piirkonnavoor **7. klass**

I osa vastused

1. 99.

2. 200.

3. 6.

4. 6.

5. 45.

6. $(6;4)$.

7. 45°.

8. $9\,\mathrm{dm}^2$.

9. 2 tundi 45 minutit.

10. 7.

Lahendused

1. Tuues lugejas sulgude ette ühise teguri 2^{99}, saame

$$\frac{2^{100}+2^{99}}{3}=\frac{2^{99}\cdot(2+1)}{3}=2^{99}\,.$$

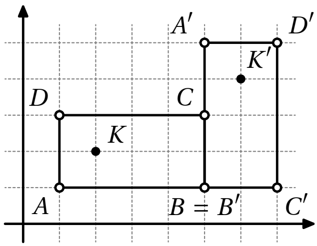
2. Et $2011 = 10\cdot 201 + 1$, siis jäägita 201-ga jagumiseks on vaja arvule 2011 juurde liita $201-1=200$.

3. Paneme tähele, et $2+5+5=12=3\cdot 4$, st ühe kahe kohta on vaja kaks viit, et hinnete keskmine tuleks 4. Kolme kahe kohta on seega vaja 6 viit.

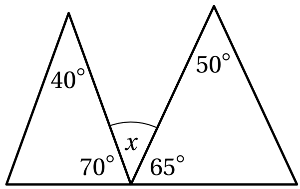
4. Viies vasakul pool murrud ühisele nimetajale ja tehes lahutamistehte, saame $\dfrac{3-2b}{6}=\dfrac{1}{a}$, ehk $(3-2b)\cdot a=6$. Et b on positiivne täisarv, siis $3-2b$ ainus võimalik positiivne väärtus on $3-2\cdot 1=1$, mille korral $a=6$. Kui $3-2b$ on negatiivne, siis sobivat positiivset arvu a ilmselt ei leidu.

5. Murd $\dfrac{n}{22}$ on taandumatu, kui arvudel n ja 22 ei ole ühiseid algtegureid. Et $22=2\cdot 11$, siis tähendab see, et n ei jagu 2-ga ega 11-ga. Seega sobivad kõik 100-st väiksemad paaritud arvud, mis ei ole arvu 11 kordsed. Et 100-st väiksemaid paarituid arve on 50 ja 11 kordseid on nende hulgas 5 (need on 11, 33, 55, 77 ja 99), siis sobivaid arve on $50-5=45$.

6. Joonisel 1 on näidatud ristküliku ja punkti K asukoht enne ja pärast pööramist. Näeme, et pärast pööramist on punkti K koordinaadid $(6;4)$.



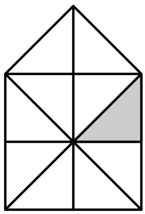
Joonis 1



Joonis 2

7. Võrdhaarsete kolmnurkade alusnurkade suurused on $\frac{180^\circ - 40^\circ}{2} = 70^\circ$ ja $\frac{180^\circ - 50^\circ}{2} = 65^\circ$ (vt joonist 2). Seega $x = 180^\circ - 70^\circ - 65^\circ = 45^\circ$.

8. Jooniselt 3 on näha, et terve kujund koosneb 10 võrdsest kolmnurgast, millest üks on tumedaks värvitud. Kujundi värvimata osa pindala on niisiis $10\,\mathrm{dm}^2 - 1\,\mathrm{dm}^2 = 9\,\mathrm{dm}^2$.



Joonis 3

9. Minutiosuti ots liigub mööda ringjoont raadiusega 10 cm ja ümbermõõduga $2\pi \cdot 10\,\mathrm{cm} = 20\pi\,\mathrm{cm}$. Seega on minutiosuti teinud $\frac{55\pi}{20\pi} = 2\,\frac{3}{4}$ ringi, ehk aega on kulunud 2 tundi ja 45 minutit.

10. Mandariin number 6 puutub teisest kihist mandariine 12, 14 ja 15, mis omakorda puutuvad kõiki kolmanda kihi mandariine. Seega on mandariini number 6 kättesaamiseks vaja esmalt tervenisti eemaldada neljas ja kolmas kiht, st mandariinid 20, 17, 18 ja 19, ning seejärel mandariinid 12, 14 ja 15.

Eesti LVIII matemaatikaolümpiaad

15. jaanuar 2011 Piirkonnavoor **8. klass**

I osa vastused

1. 2009.

2. 5.

3. $\frac{3}{7}$.

4. 1, 2, 3, 6.

5. 150.

6. $(4; -4)$.

7. 130°.

8. 3.

9. 50.

10. 3.

Lahendused

1. Tuues lugejas sulgude ette ühise teguri 2^{2010}, saame

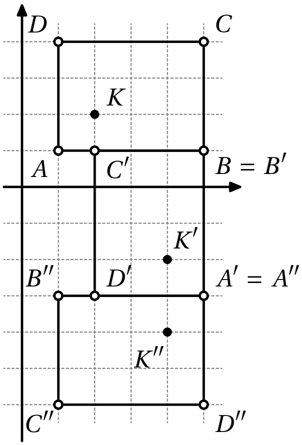
$$\frac{2^{2011}+2^{2010}}{6}=\frac{2^{2010}\cdot(2+1)}{2\cdot 3}=\frac{2^{2010}}{2}=2^{2009}\,.$$

2. Arv jagub arvuga 18 parajasti siis, kui ta on paarisarv ja tema numbrite summa jagub 9-ga. Arvudest $2011+a$ on vähim selline arv 2016, kui $a=5$.

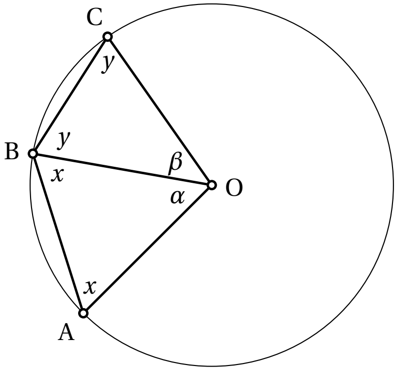
3. Olgu roheliste õunte arv $4n$, siis punaste õunte arv on $\frac{3}{4}\cdot 4n=3n$ ning õunte koguarv on $4n+3n=7n$. Seega punaste õunte arv moodustab $\frac{3n}{7n}=\frac{3}{7}$ õunte koguarvust.

4. Viies vasakul pool murrud ühisele nimetajale ja tehes lahutamistehte, saame $\frac{1}{a}=\frac{3b-2b}{6}=\frac{b}{6}$, ehk $ab=6$. Seega sobivad a väärtusteks arvu 6 kõik tegurid 1, 2, 3 ja 6; neile vastavad b väärtused on 6, 3, 2 ja 1.

5. Et $\frac{n}{2}$ oleks naturaalarv, peab n olema paarisarv. Kolmekohalisuse tingimusest saame, et $\frac{n}{2}\geqslant 100$ ja $2n<1000$, st $200\leqslant n<500$. Selliseid paarisarve on $\frac{500-200}{2}=150$.



Joonis 4

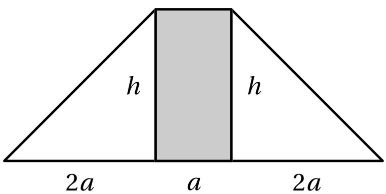


Joonis 5

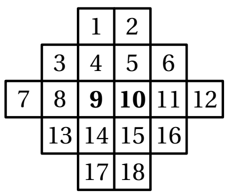
6. Joonisel 4 on näidatud ristküliku ja punkti K asukoht algul, pärast esimest pööramist ja pärast teist pööramist. Näeme, et pärast kaht pööramist on punkti K koordinaadid $(4; -4)$.

7. Jaotame nelinurga $OABC$ tipust O tõmmatud diagonaaliga kaheks kolmnurgaks OAB ja OBC (vt joonist 5). Et $|OA| = |OB| = |OC|$, siis need kolmnurgad on võrdhaarsed alusnurkadega vastavalt x ja y, ja nende tipunurkade summa $\alpha + \beta = 100^\circ$. Nelinurga $OABC$ sisenurkade summa on seega $2x + 2y + 100^\circ = 360^\circ$, kust $x + y = 130^\circ$.

8. Olgu trapetsi kõrgus h ja lühema aluse pikkus a, siis pikema aluse pikkus on $5a$ ning trapets koosneb tumedaks värvitud ristkülikust küljepikkustega a ja h ning kahest võrdsest täisnurksest kolmnurgast kaatetite pikkustega $2a$ ja h (vt joonist 6). Kogu trapetsi pindala on siis $S = ah + 2 \cdot \dfrac{2a \cdot h}{2} = 3ah$, st 3 korda suurem tumedaks värvitud ristküliku pindalast ah.



Joonis 6



Joonis 7

9. Sõna AHHAA tähtede H valikuks on ainult kaks võimalust, mis erinevad üksteisest järjekorra poolest (9 – 10 või 10 – 9, kui nummerdada ruudud nii, nagu näidatud joonisel 7).

Valiku 9 – 10 korral peab esimene täht A paiknema ruudu 9 mõnes naaberruudus (4, 8 või 14) ning neljas täht A ruudu 10 mõnes naaberruudus (5, 11 või 15). Viies täht A peab omakorda paiknema neljandat tähte A sisaldava ruudu mõnes naaberruudus (olenevalt neljanda tähe A valikust on need vastavalt 4, 2, 6 või 6, 12, 16 või 14, 16, 18). Nii saame $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ võimalust ruutude valikuks, kuid kaks neist (4 – 9 – 10 – 5 – 4 ja 5 – 10 – 9 – 4 – 5) ei sobi, sest esimene ja viimane täht A on samas ruudus.

Niisiis saime tähtede H valiku 9 – 10 korral 25 võimalust ülejäänud tähtede valikuks. Sümmeetria tõttu annab ka teine tähtede H valik 10 – 9 samapalju võimalusi ülejäänud tähtede valikuks, kusjuures valitud ruutude hulgad on kõigil neil juhtudel erinevad — seega kokku on võimalusi 50.

10. Mandariin number 4 puutub teisest kihist ainult mandariini number 13, mis omakorda puutub kolmandast kihist ainult mandariini number 18 ning see puutub neljanda kihi ainsat mandariini number 20. Seega on mandariini number 4 kättesaamiseks vaja eelnevalt ära võtta mandariinid 20, 18 ja 13.

Eesti LVIII matemaatikaolümpiaad

15. jaanuar 2011 — Piirkonnavoor — **9. klass**

I osa vastused

1. 2007.

2. $a = 182$, $b = 9$.

3. 80 punkti.

4. 5.

5. 112.

6. $(-5; 3)$.

7. 150°.

8. 5 cm ja 3 cm.

9. 96.

10. 5.

Lahendused

1. Tuues lugejas sulgude ette ühise teguri 2^{2009}, saame

$$\frac{2^{2011} + 2^{2010} + 2^{2009}}{28} = \frac{2^{2009} \cdot (4+2+1)}{4 \cdot 7} = \frac{2^{2009}}{4} = 2^{2007}\,.$$

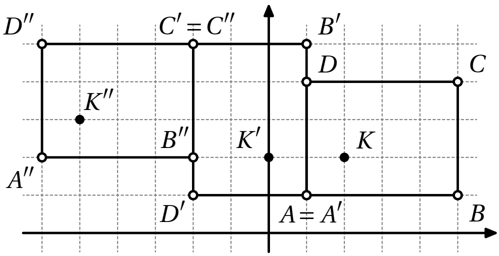
2. Jäägiga jagades saame $2011 = 182 \cdot 11 + 9$, st $a = 182$ ja $b = 9$.

3. Et nelja testi keskmine tulemus oli 75 punkti, siis sai Jüri nende eest kokku $4 \cdot 75 = 300$ punkti. Kui ta viienda testi eest saab maksimaalsed 100 punkti, siis kogusumma on $300 + 100 = 400$ punkti ja viie testi keskmine on $\dfrac{400}{5} = 80$ punkti.

4. Viies vasakul pool murrud ühisele nimetajale ja tehes lahutamistehte, saame $\dfrac{20 - b^2}{5b} = \dfrac{1}{a}$, st $b^2 \leqslant 20$. Võimalikud b väärtused on niisiis 1, 2, 3 ja 4. Arvutades näeme, et $b = 1$, $b = 2$ ja $b = 3$ korral on vasaku poole väärtus vastavalt $\dfrac{19}{5}$, $\dfrac{8}{5}$ ja $\dfrac{11}{15}$, mis ei esitu kujul $\dfrac{1}{a}$, kus a on naturaalarv. Kui $b = 4$, siis saame vasaku poole väärtuseks $\dfrac{4}{4} - \dfrac{4}{5} = 1 - \dfrac{4}{5} = \dfrac{1}{5}$, kust $a = 5$.

5. Et $\dfrac{n}{3}$ oleks naturaalarv, peab n jaguma 3-ga. Neljakohalisuse tingimusest saame, et $\dfrac{n}{3} \geqslant 1000$ ja $3n < 10000$, st $3000 \leqslant n < 3333\,\dfrac{1}{3}$. Selliseid 3-ga jaguvaid arve on $\dfrac{3333 - 3000}{3} + 1 = 112$.

6. Joonisel 8 on näidatud ristküliku ja punkti K asukoht algul, pärast esimest pööramist ja pärast teist pööramist. Näeme, et pärast kaht pööramist on punkti K koordinaadid $(-5; 3)$.



Joonis 8

7. Viisnurga sisenurkade summa on $(5-2)\cdot 180^\circ = 540^\circ$. Et ülesandes antud viisnurga sisenurkade suurused on x, y, 50°, $360^\circ - 60^\circ = 300^\circ$ ja 40°, siis $x + y + 50^\circ + 300^\circ + 40^\circ = 540^\circ$, kust $x + y = 150^\circ$.

8. Olgu suurema ringjoone raadius r cm, siis väiksema ringjoone raadius on $0{,}6\,r$ cm. Trapetsi aluste pikkused on seega vastavalt $2r$ ja $1{,}2\,r$ sentimeetrit ning kõrgus $r + 0{,}6\,r = 1{,}6\,r$ sentimeetrit. Trapetsi pindala jaoks ruutsentimeetrites saame võrduse $\dfrac{2r + 1{,}2\,r}{2} \cdot 1{,}6\,r = 64$ ehk $(1{,}6\,r)^2 = 64$, kust $1{,}6\,r = 8$ ja $r = 5$. Suurema ringjoone raadius on niisiis 5 cm ja väiksemal ringjoonel $0{,}6 \cdot 5\,\text{cm} = 3\,\text{cm}$.

9. Kirjutame sõna MATEMAATIKA iga tähe alla võimaluste arvu selle tähega märgitud tipu valikuks, kui eelnevatele tähtedele vastavad tipud on juba valitud.

M	A	T	E	M	A	A	T	I	K	A
2	4	2	1	1	3	2	1	1	1	1

Võimaluste koguarvuks on nende arvude korrutis, st $2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 = 96$.

10. Mandariin number 7 puutub teisest kihist mandariine 13 ja 15, mis omakorda puutuvad kolmandast kihist mandariine 18 ja 19 ning need puutuvad neljanda kihi ainsat mandariini number 20. Seega on mandariini number 7 kättesaamiseks vaja eelnevalt ära võtta mandariinid 20, 18, 19, 13 ja 15.

II osa lahendused

1. *Vastus:* a) vähim arv on 123469 ja suurim 236789; b) selliseid arve ei leidu.

Lahendus 1. Vaadeldavad arvud ei sisalda numbrit 5 ega ka numbrit 0, kuna täisarv ei alga numbriga 0 ja arvu numbrid on järjestatud kasvavas järjekorras. Võimalikud kaheksa numbrit kasvavas järjekorras on niisiis

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\,. \tag{1}$$

Paneme tähele, et nende summa on 40, mis jagub 5-ga.

a) Et saada kuuekohaline ülesande tingimustele vastav arv, tuleb niisiis loetelust (1) välja jätta kaks numbrit, mille summa jagub 5-ga. Vähima sellise arvu saamiseks tuleb valida väljajäetavad numbrid nii, et loetelu alguses jääks võimalikult palju numbreid alles. Sellised numbrid on 7 ja 8 ning vähim ülesande tingimustele vastav kuuekohaline arv on seega 123469. Suurima arvu saamiseks tuleb väljajäetavad numbrid valida nii, et esimene väljajäetav number oleks võimalikult loetelu alguses. Sellised numbrid on 1 ja 4 ning suurim sobiv kuuekohaline arv on seega 236789.

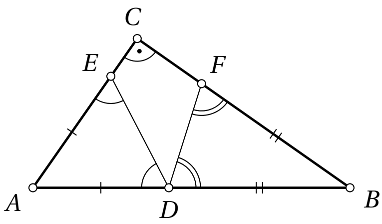
b) Seitsmekohalise arvu saamiseks tuleks loetelust (1) välja jätta vaid üks number ning see väljajäetav number peab jaguma 5-ga. Sellist numbrit aga loetelus ei ole. Seega seitsmekohalist nõutud omadustega arvu ei leidu.

Lahendus 2. Samuti nagu esimeses lahenduses paneme tähele, et tingimusi (1) ja (2) rahuldav arv peab koosnema mingitest loetelus (1) esitatud numbritest selles järjekorras.

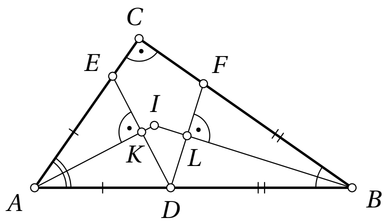
a) Vähim selline kuuekohaline arv on ilmselt 123467. Selle arvu numbrite summa annab 5-ga jagamisel jäägi 3 — seega tuleb tingimuse (3) rahuldamiseks suurendada tema kaht numbrit 1 võrra või üht numbrit 2 võrra nii, et tingimused (1) ja (2) jääks täidetuks. Vähima niisuguse arvu saame viimase numbri suurendamisel 2 võrra, st see arv on 123469.

Suurim selline kuuekohaline arv on 346789. Selle arvu numbrite summa annab 5-ga jagamisel jäägi 2 — seega tuleb tingimuse (3) rahuldamiseks vähendada tema kaht numbrit 1 võrra või üht numbrit 2 võrra nii, et tingimused (1) ja (2) jääks täidetuks. Suurima niisuguse arvu saame kahe esimese numbri vähendamisel 1 võrra, st see arv on 236789.

b) Sarnaselt esimese lahendusega veendume, et nõutud omadustega seitsmekohalisi arve ei leidu.



Joonis 9



Joonis 10

2. *Vastus:* 45°.

Lahendus 1. Ülesande tingimuste põhjal on kolmnurgad ADE ja BDF võrdhaarsed, mistõttu $\angle ADE = \dfrac{180^\circ - \angle BAC}{2}$ ja $\angle BDF = \dfrac{180^\circ - \angle ABC}{2}$ (vt joonist 9). Seega

$$\angle EDF = 180^\circ - \angle ADE - \angle BDF = \frac{\angle BAC + \angle ABC}{2} = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ\,.$$

Lahendus 2. Olgu I kolmnurga ABC nurgapoolitajate lõikepunkt. Kuna $|AE| = |AD|$, siis kiir AI on risti lõiguga DE; samuti on kiir BI risti lõiguga DF. Olgu nende lõikumispunktid vastavalt K ja L (vt joonist 10). Siis $DKIL$ on kõõlnelinurk, sest tema kaks vastasnurka on täisnurgad. Järelikult

$$\begin{aligned}\angle EDF &= \angle KDL = 180^\circ - \angle KIL = 180^\circ - \angle AIB = \\ &= 180^\circ - \left(180^\circ - \frac{\angle BAC}{2} - \frac{\angle ABC}{2}\right) = \\ &= \frac{\angle BAC + \angle ABC}{2} = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ\,.\end{aligned}$$

3. *Vastus:* I koht Eron, II Baron, III Caron, IV Aron, V Daron.

Kui Daroni avalduse esimene pool oleks tõene, st Baroni töö oleks saanud III koha, siis oleks Baroni avalduse mõlemad pooled väärad (sest kohad jagamisele ei läinud), mis on vastuolus ülesande tingimustega.

Seega on tõene Daroni avalduse teine pool, st Aroni töö sai IV koha. Caroni avaldusest peab nüüd olema tõene esimene pool, st tema töö sai III koha. Baroni avaldusest peab samuti olema tõene esimene pool, st tema töö sai II koha. Lõpuks näeme, et Aroni avaldusest peab olema tõene teine pool, st Daroni töö jäi viimaseks ning I koha sai seega Eroni töö.

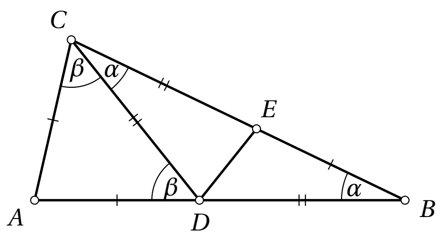
II osa lahendused

1. *Vastus:* $n = 8$ ja $m = 9$.

Vastavalt ülesande tingimustele maksis jäätis $m + 2$ vutti, šokolaad $3m + 4$ vutti ning karp klaaskomme $5m + 6$ vutti. Kokku maksid Pipi ostud seega $9m + 12$ vutti, mis on võrdne 1 kurru, 2 nurru ja 3 vutiga, ehk $nm + 2m + 3$ vutiga. Saame võrrandi

$$9m + 12 = nm + 2m + 3\,,$$

ehk $nm - 7m = 9$ ehk $m(n - 7) = 9$. Vastavalt arvu 9 tegurdustele saame kolm võimalust: $m = 9$ ja $n = 8$, või $m = 3$ ja $n = 10$, või $m = 1$ ja $n = 16$. Tingimust $n < m$ rahuldab neist ainult esimene.



Joonis 11

2. *Vastus:* $77\,\frac{1}{7}$ kraadi.

Ülesande tingimuste põhjal on kolmnurgad ACD, DCB, BAC ja CDE võrdhaarsed. Olgu $\angle DCB = \angle DBC = \alpha$ ja $\angle ACD = \angle ADC = \beta$ (vt joonist 11), siis

$$\beta = \angle ADC = 180^\circ - \angle BDC = \angle DCB + \angle DBC = 2\alpha\,.$$

Et kolmnurk BAC on võrdhaarne, siis $\angle BAC = \angle BCA$, ehk $180^\circ - 2\beta = \alpha + \beta$, kust $180^\circ = 3\beta + \alpha = 7\alpha$ ja $\alpha = \dfrac{180^\circ}{7}$.

Kolmnurga CDE võrdhaarsusest saame nüüd, et

$$\angle CDE = \frac{180^\circ - \alpha}{2} = \frac{3}{7} \cdot 180^\circ = 77\,\frac{1}{7} \text{ kraadi.}$$

3. *Vastus:* a) 2; b) 34 ja 94.

Lahendus 1. a) Et arvude n ja $n+2$ korrutise üheliste number oleks 4, peavad arvude n ja $n+2$ üheliste numbrid olema kaks järjestikust paarisarvu, mille korrutis lõppeb numbriga 4. Tõepoolest — esitame arvu n kujul $10m+k$, kus $0 \leqslant k \leqslant 9$, siis

$$\begin{aligned} n(n+2) &= (10m+k)(10m+k+2) = \\ &= 100m^2 + 20mk + 20m + k(k+2) = \\ &= 100m^2 + 20m(k+1) + k(k+2) \,, \end{aligned}$$

st korrutise $k(k+2)$ üheliste number peab olema 4. Vaadates läbi kõik ühekohalised paarisarvud k leiame, et ainus sobiv võimalus on $k=4$. Siis aga

$$n(n+2) = 100m^2 + 20m \cdot 5 + 24 = 100(m^2+m) + 24 \,.$$

Et arv $100(m^2+m)$ lõpeb kahe nulliga, siis temast 24 võrra suurem arv lõpeb numbritega 24, st kümneliste number on 2.

b) Et arv $n(n+2) = 100(m^2+m) + 24$ oleks neljakohaline, peab olema $976 \leqslant 100(m^2+m) < 9976$, ehk $9{,}76 \leqslant m^2+m < 99{,}76$, kust leiame, et $3 \leqslant m \leqslant 9$. Vähim selline neljakohaline arv on niisiis $100\cdot(3^2+3)+24=1224$, kui $n = 10m+4 = 34$; suurim on $100 \cdot (9^2+9) + 24 = 9024$, kui $n=94$.

Lahendus 2. a) Sarnaselt eelmise lahendusega leiame, et arvu n üheliste number peab olema 4. Esitame arvu n kujul $10m+4$, siis

$$\begin{aligned} n(n+2) &= (10m+4)(10m+6) = 100m^2 + 100m + 24 = \\ &= 100(m^2+m) + 24 \,, \end{aligned}$$

st arvu $n(n+2)$ kümneliste number on 2.

b) Et $24 \cdot 26 = 624 < 1000$ ja $34 \cdot 36 = 1224 > 1000$, siis vähima neljakohalise korrutise saame juhul, kui $n=34$. Et $94 \cdot 96 = 9024 < 10000$ ja $104 \cdot 106 = 11024 > 10000$, siis suurima neljakohalise korrutise saame juhul, kui $n=94$.

Lahendus 3. a) Paneme tähele, et $n \cdot (n+2) = (n+1)^2 - 1$. Seega arv $(n+1)^2$ lõpeb numbriga 5, mistõttu ka arv $n+1$ lõpeb numbriga 5 ja arv n numbriga 4.

Sarnaselt eelmise lahendusega esitame nüüd tegurid kujul $n = 10m+4$ ja $n+2 = 10m+6$ ning saame, et arvu $n(n+2)$ kümneliste number on 2.

b) Arvud n, mille korral $n(n+2)$ on vähim ja suurim võimalik neljakohaline arv, leiame samuti nagu eelmistes lahendustes.

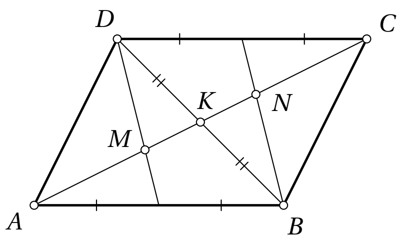
Eesti LVIII matemaatikaolümpiaad

15. jaanuar 2011 Piirkonnavoor **9. klass**

II osa lahendused

1. *Vastus:* 808, 838, 868 või 898.

Tingimusest, et arv $n - 3$ jagub 5-ga, saame, et arvu n viimane number on 3 või 8. Et arv n ise jagub 2-ga, siis saab tema viimane number olla ainult 8, ning kuna numbrite järjekorra ümberpööramisel saame samade omadustega arvu, siis peab ka esimene number olema 8. Niisiis on arv n kujul $\overline{8a8}$. Et arv $n + 2$ peab jaguma 3-ga, siis arvu n ristsumma annab 3-ga jagamisel jäägi 1, st keskmine number a saab olla 0, 3, 6 või 9.



Joonis 12

2. *Vastus:* 7 cm.

Olgu K rööpküliku $ABCD$ diagonaalide lõikepunkt (vt joonist 12). Et rööpküliku diagonaalid poolitavad teineteise, siis AK ja CK on vastavalt kolmnurkade ABD ja CBD mediaanid, st punktid M ja N asuvad diagonaalil AC. Et mediaanide lõikepunkt jaotab iga mediaani suhtes $2 : 1$, siis $|AK| = 3|MK|$ ja $|CK| = 3|NK|$. Seega

$$|AC| = |AK| + |CK| = 3(|MK| + |NK|) = 3|MN|\,,$$

ehk $|MN| = \dfrac{|AC|}{3} = 7\,\text{cm}$.

3. *Vastus:* $\dfrac{1}{12}$.

Paneme tähele, et $2 * z = \dfrac{2+z}{2z+4} = \dfrac{1}{2}$ mistahes $z \neq -2$ korral. Muuhulgas kehtib see ka $z = 3*(4*(5*(6*(7*(8*9)))))$ korral, sest mistahes positiivsete x ja y korral on ka $x*y$ positiivne, mistõttu $3*(4*(5*(6*(7*(8*9))))) > 0$.

Niisiis $2 * (3 * (4 * (5 * (6 * (7 * (8 * 9)))))) = \frac{1}{2}$ ning jääb üle leida avaldise $0 * \left(1 * \frac{1}{2}\right)$ väärtus. Arvutades näeme, et $1 * \frac{1}{2} = \dfrac{1 + \frac{1}{2}}{1 \cdot \frac{1}{2} + 4} = \frac{1}{3}$ ja

$$0 * \frac{1}{3} = \dfrac{0 + \frac{1}{3}}{0 \cdot \frac{1}{3} + 4} = \frac{1}{12}.$$

4. Jaotame kõik vaadeldavad arvud peale 1 ja 52 paaridesse järgmisel viisil: $(4; 100)$, $(7; 97)$, $(10; 94)$, …, $(49; 55)$. Siis igas paaris on arvude summa 104. Kuna valitud 20 arvu seas on vähemalt 18 sellist, mis ei ole 1 ega 52, kuid paare on ainult 16, siis leidub paar, mille mõlemad arvud on valitud. Nende valitud arvude summa ongi 104.

Lahendused

1. *Vastus:* 10% võrra.

Olgu Juku kahtede ja viite arv eelmisel veerandil vastavalt K ja V ning uuel veerandil viite arv V' ja vajalikul määral vähenenud kahtede arv K'. Ülesande tingimustest saame, et $V = 0{,}6\,K$, $V' = 0{,}8\,K'$ ja $V' = V + 0{,}2\,V = 1{,}2\,V$. Siit leiame, et

$$K' = \frac{V'}{0{,}8} = \frac{1{,}2\,V}{0{,}8} = \frac{1{,}2 \cdot 0{,}6\,K}{0{,}8} = 0{,}9\,K = K - 0{,}1\,K\,.$$

Seega peab Juku kahtede arvu uuel veerandil vähendama 10% võrra.

2. *Vastus:* $\frac{b}{a}$.

Lahendus 1. Et $a > b$, siis $\frac{a}{b} > 1$ ja $\frac{b}{a} < 1$ ning võrreldavad positiivsed erinevused arvust 1 on vastavalt $\frac{a}{b} - 1 = \frac{a-b}{b}$ ja $1 - \frac{b}{a} = \frac{a-b}{a}$. Et nende murdude lugejad on võrdsed ja teise murru nimetaja on suurem, siis teine murd ise on väiksem, st $1 - \frac{b}{a} < \frac{a}{b} - 1$, ehk $\frac{b}{a}$ erineb arvust 1 vähem kui $\frac{a}{b}$.

Lahendus 2. Kasutades aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vahelist võrratust, saame

$$\frac{\frac{a}{b} + \frac{b}{a}}{2} > \sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}} = \sqrt{1} = 1\,,$$

kus võrratus on range seetõttu, et $\frac{a}{b} \neq \frac{b}{a}$. Niisiis arvude $\frac{a}{b}$ ja $\frac{b}{a}$ aritmeetiline keskmine on 1-st suurem — järelikult 1 on lähemal neist kahest väiksemale ehk arvule $\frac{b}{a}$.

3. *Vastus:* b) ei.

a) Olgu jagatis q ja jääk samuti q, siis $n = qm + q = q(m + 1)$. Järelikult n jagub arvuga $m + 1$.

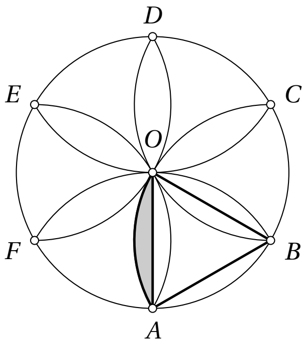
b) Kui näiteks $n = 4$ ja $m = 1$, siis n jagub arvuga $m + 1$, kuid jagatis ja jääk n jagamisel m-ga on vastavalt 4 ja 0, mis pole võrdsed. Järelikult pöördväide ei kehti.

4. *Vastus:* $2\pi - 3\sqrt{3}$.

Olgu esimese ringjoone keskpunkt O ja sellel võetud punktid (ülejäänud ringjoonte keskpunktid) A, B, C, D, E ja F (vt joonist 13).

„Lilleõis" moodustub 12 võrdsest segmendist, millest üks on joonisel 13 värvitud tumedaks. Selle segmendi pindala avaldub keskpunktiga B ringjoone 60° sektori pindala ja võrdkülgse kolmnurga BAO pindala vahena. Sektori pindala on $S_1 = \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot 1^2 = \frac{\pi}{6}$ ning kolmnurga BAO pindala on $S_2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$. Kogu „lilleõie" pindala on niisiis

$$S = 12(S_1 - S_2) = 12 \cdot \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = 2\pi - 3\sqrt{3}\,.$$



Joonis 13

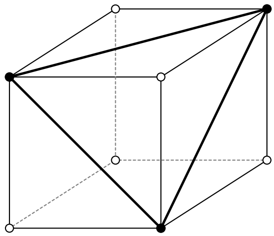
5. *Lahendus 1.* Et $y - \sqrt{xy} = \sqrt{y} \cdot (\sqrt{y} - \sqrt{x})$ on ülesande tingimuse kohaselt ratsionaalarv, siis $(y - \sqrt{xy})^2 = y \cdot (\sqrt{y} - \sqrt{x})^2$ on samuti ratsionaalarv. Samas on ratsionaalarvud ka $2(y - \sqrt{xy})$ ja $(x - \sqrt{xy}) - (y - \sqrt{xy}) = x - y$ ning seega ka arv $(x - y) + 2(y - \sqrt{xy}) = x + y - 2\sqrt{xy} = (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2$.

Et $y = \dfrac{y(\sqrt{y} - \sqrt{x})^2}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2}$ (siin nimetaja on nullist erinev, sest $x \neq y$) ning $x = (x - y) + y$, siis on ka x ja y ratsionaalarvud.

Lahendus 2. Tähistame $x - \sqrt{xy} = p$ ja $y - \sqrt{xy} = q$, siis $p^2 = x^2 + xy - 2x\sqrt{xy}$ ja $q^2 = y^2 + xy - 2y\sqrt{xy}$ ning $p + q = x + y - 2\sqrt{xy}$. Seega $x = \dfrac{p^2}{p+q}$ ja $y = \dfrac{q^2}{p+q}$ on ratsionaalarvud. (Siin nimetaja ei ole 0, sest $x \neq y$ ja seega $(\sqrt{y} - \sqrt{x})^2 \neq 0$, ehk $x + y \neq 2\sqrt{xy}$.)

Märkus. Väide ilmselt ei kehti, kui $x = y$, sest siis on ka irratsionaalarvulise x korral $x - \sqrt{xy} = y - \sqrt{xy} = 0$, st ratsionaalarvud.

6. Kui iga värviga oleks värvitud maksimaalselt kaks kuubi tippu, saaks kokku olla värvitud kuni $3 \cdot 2 = 6$ tippu, kuid kuubil on 8 tippu. Seega leidub mingi värv — ütleme, et must — millega on värvitud vähemalt kolm kuubi tippu.



Joonis 14

Vaatleme kuubi kaht vastastahku (olgu need kuubi esimene ja tagumine tahk joonisel 14): need kokku hõlmavad kuubi kõik tipud. Kuna kuubil leidub kolm musta tippu, siis vähemalt ühel neist kahest tahust peab olema kaks musta tippu — üldisust kitsendamata olgu see kuubi esimene tahk. Vastavalt värvimise tingimusele on need kaks musta tippu selle tahu ühe diagonaali otspunktid. Sama tingimuse järgi ei saa ühel tahul olla üle kahe üht värvi tipu, st kolmas must tipp peab kuuluma tagumisele tahule, kusjuures ta ei saa olla servaga ühendatud esimese tahu kummagi musta tipuga. Seega moodustavad kolm musta tippu kolmnurga, mille iga külg on kuubi mingi tahu diagonaal ja mis järelikult on võrdkülgne.

Eesti LVIII matemaatikaolümpiaad

15. jaanuar 2011 Piirkonnavoor **11. klass**

Lahendused

1. *Vastus:* $x = -1$ või $x = -3$.

Vaatleme kahte juhtu olenevalt $x + 1$ märgist.

Kui $x \geqslant -1$, siis $x + 1 \geqslant 0$, st $|x + 1| = x + 1$ ning

$$0 = (x+1)^2 - |x+1| + x + 1 = (x+1)^2 ,$$

kust $x = -1$.

Kui $x < -1$, siis $x + 1 < 0$, st $|x + 1| = -(x + 1)$ ning

$$0 = (x+1)^2 - |x+1| + x + 1 = (x+1)^2 + 2(x+1) = (x+1)(x+3) .$$

Et vastavalt tehtud eeldusele $x + 1 \neq 0$, siis peab olema $x + 3 = 0$, kust $x = -3$.

2. *Vastus:* 30°, 150°, 210° ja 330°.

Lahendus 1. Et $\sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \cos\alpha$ ja $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$, siis antud võrdusest saame, et

$$\frac{\sin\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{1}{2\sin\alpha} ,$$

ehk

$$2\sin^2\alpha = \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha .$$

Kasutades seost $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$ saame siit, et $2\sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$, ehk $4\sin^2\alpha = 1$, kust $\sin\alpha = \pm\frac{1}{2}$. Antud vahemikus on sellised nurgad 30° ja 150°, mille siinus on $\frac{1}{2}$, ning 210° ja 330°, mille siinus on $-\frac{1}{2}$. Kontroll näitab, et kõik need nurgad ka sobivad.

Lahendus 2. Nurgad, mis on 45° kordsed, ei sobi, sest nende korral on $\cos 2\alpha = 0$ või $\sin 2\alpha = 0$. Ülejäänud nurkade korral on antud võrdus samaväärne võrdusega $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$ ehk võrdusega $\tan\alpha = \cot 2\alpha$. Et $\cot x = \tan(90^\circ - x)$, siis algne võrdus on samaväärne võrdusega

$$\tan\alpha = \tan(90^\circ - 2\alpha) .$$

Siit $\alpha = 90^\circ - 2\alpha + n \cdot 180^\circ$ ehk $3\alpha = n \cdot 180^\circ + 90^\circ$ ehk $\alpha = n \cdot 60^\circ + 30^\circ$.

Kui $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, siis α on vastavalt 30°, 90°, 150°, 210°, 270° ja 330°.

Neist väärtustest 90° ja 270° ei sobi, kuna on 45° kordsed.

3. *Vastus:* ei.

Lahendus 1. Tegurdades saame

$$\begin{aligned} x^5 - 5x^3 + 4x &= x \cdot (x^4 - 5x^2 + 4) = x \cdot (x^2 - 1)(x^2 - 4) = \\ &= (x-2) \cdot (x-1) \cdot x \cdot (x+1) \cdot (x+2) \, . \end{aligned}$$

Mistahes viie järjestikuse täisarvu korrutis jagub alati 8-ga, sest nende viie arvu seas on vähemalt kaks paarisarvu, millest üks jagub 4-ga. Arv $987654321 \cdot 100 = 98765432100$ aga 8-ga ei jagu, sest selle kolmest viimasest numbrist moodustuv arv 100 ei jagu 8-ga.

Lahendus 2. Võttes $r = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ näeme, et arv $r^5 - 5r^3 + 4r$ jagub kõigil juhtudel 8-ga. Olgu nüüd $x = 8q + r$, kus q on mingi täisarv ja r on üks eespool loetletud jääkidest, siis $x^5 - 5x^3 + 4x = 8Q + r^5 - 5r^3 + 4r$, kus Q on samuti mingi täisarv. Seega arv $x^5 - 5x^3 + 4x$ jagub 8-ga iga täisarvu x korral. Teisalt aga veendume samuti nagu esimeses lahenduses, et arv $987654321 \cdot 100$ ei jagu 8-ga.

Lahendus 3. Tähistame $f(x) = x^5 - 5x^3 + 4x$, siis võime antud võrduse kirjutada kujul $f(x) = 98765432100$. Samuti nagu esimeses lahenduses näitame, et

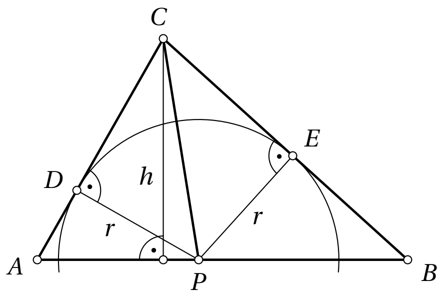
$$f(x) = (x-2) \cdot (x-1) \cdot x \cdot (x+1) \cdot (x+2) \, . \tag{2}$$

Kuna mistahes viiest järjestikusest täisarvust täpselt üks jagub 5-ga, aga nende korrutis peab jaguma 25-ga, siis peab üks neist arvudest jaguma 25-ga. Kui see 25-ga jaguv arv on 150 või väiksem, siis x on maksimaalselt 152, ning $f(152) < 98765432100$. Kui aga see 25-ga jaguv arv on 175 või suurem, siis x on minimaalselt 173, ning $f(173) > 98765432100$. Avaldisest (2) näeme, et funktsioon $f(x)$ on kasvav, kui $x \leqslant -2$ või $x \geqslant 2$, ning $f(-2) = f(-1) = f(0) = f(1) = f(2) = 0$. Koos eespool tõestatuga tähendab see, et võrdus $f(x) = 98765432100$ võiks kehtida ainult siis, kui $152 < x < 173$ — kuid sellesse vahemikku kuuluvate täisarvude x korral $f(x)$ ei jagu 25-ga.

4. *Lahendus 1.* Olgu ülesandes antud ringjoone raadius r, keskpunkt P ning puutepunktid kolmnurga külgedega AC ja BC vastavalt D ja E (vt joonist 15). Siis $|PD| = |PE| = r$.

Et puutepunktist tõmmatud ringjoone raadius on puutujaga risti, siis PD ja PE on vastavalt kolmnurkade PAC ja PBC tipust P tõmmatud kõrgused. Järelikult nende kolmnurkade pindalad on

$$\begin{aligned} S_{PAC} &= \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |PD| = \frac{|AC|}{2} \cdot r \, , \\ S_{PBC} &= \frac{1}{2} \cdot |BC| \cdot |PE| = \frac{|BC|}{2} \cdot r \, . \end{aligned}$$



Joonis 15

Kokkuvõttes

$$S_{ABC} = S_{PAC} + S_{PBC} = \frac{|AC| + |BC|}{2} \cdot r\ .$$

Lahendus 2. Kasutame samu tähistusi nagu lahenduses 1 ning olgu lisaks h kolmnurga ABC tipust C tõmmatud kõrgus (vt joonist 15). Paneme tähele, et lõik CP on kolmnurga ABC nurgapoolitaja, sest punkt P on võrdsel kaugusel r kolmnurga külgedest AC ja BC. Nurgapoolitaja omaduse põhjal saame, et $|AP| = k \cdot |AC|$ ja $|BP| = k \cdot |BC|$, kus k on mingi reaalarv. Kolmnurga ABC pindala avaldub nüüd kujul

$$S = \frac{|AB| \cdot h}{2} = \frac{|AP| + |BP|}{2} \cdot h = \frac{|AC| + |BC|}{2} \cdot kh\ .$$

Ülesande väite tõestamiseks piisab näidata, et $kh = r$, ehk $|AP| \cdot h = |AC| \cdot r$. See võrdus kehtib, sest selle mõlemad pooled on võrdsed kolmnurga APC kahekordse pindalaga.

5. Tõestame antud võrratusega samaväärse võrratuse

$$\frac{1}{a-1} - \frac{1}{1+a} - \frac{2}{1+a^2} - \frac{4}{1+a^4} - \frac{8}{1+a^8} > 0\ .$$

Tõepoolest,

$$\begin{aligned} \frac{1}{a-1} - \frac{1}{1+a} - \frac{2}{1+a^2} - \frac{4}{1+a^4} - \frac{8}{1+a^8} &= \\ = \frac{2}{a^2-1} - \frac{2}{1+a^2} - \frac{4}{1+a^4} - \frac{8}{1+a^8} &= \\ = \frac{4}{a^4-1} - \frac{4}{1+a^4} - \frac{8}{1+a^8} &= \\ = \frac{8}{a^8-1} - \frac{8}{1+a^8} &= \end{aligned}$$

$$= \frac{16}{a^{16} - 1} > 0\,,$$

sest $a > 1$.

6. *Vastus:* 3.

Kuna mistahes neljast pliiatsist on vähemalt kaks ühte värvi, siis saab Marjel olla ülimalt kolme värvi pliiatseid (muidu saaksime valida neli pliiatsit, mis on igaüks erinevat värvi). Kuna mistahes viie pliiatsi hulgas on ülimalt kolm ühte värvi, siis mistahes ühte värvi pliiatseid saab tal olla ülimalt 3. Et Marjel on 9 pliiatsit, siis peab tal olema täpselt kolme värvi pliiatseid ning igaüht neist täpselt 3.

Lahendused

1. *Vastus:* -160.

Olgu vaadeldav aritmeetiline jada $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ vahega d ning tähistagu S_n jada n esimese liikme summat, siis

$$a_n = a_1 + (n-1)d\,, \qquad S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n\,,$$

kust n esimese liikme aritmeetiliseks keskmiseks A_n leiame

$$A_n = \frac{S_n}{n} = \frac{a_1 + a_n}{2} = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2}\,.$$

Vastavalt ülesande tingimustele $a_{11} = 20$ ja $A_{20} = 11$. Saame a_1 ja d leidmiseks võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} 2a_1 + 19d = 2 \cdot 11 \\ a_1 + 10d = 20 \end{cases}.$$

Lahutades esimesest võrrandist kaks korda teise, saame $-d = 22 - 40 = -18$, ehk $d = 18$. Teisest võrrandist leiame nüüd, et $a_1 = 20 - 10 \cdot 18 = -160$.

2. *Vastus:* $a = 2$; lõikepunktid on $(-2; -2)$ ja $(2; 6)$.

Funktsiooni $f(x) = x^2 + ax - 2$ tuletis on $f'(x) = 2x + a$. Nende graafikute lõikepunktide x-koordinaadid saame niisiis võrrandist $x^2 + ax - 2 = 2x + a$, ehk

$$x^2 + (a-2)x - (2+a) = 0\,. \tag{3}$$

Et need lõikepunktid asuvad erineval pool y-telge ja sellest võrdsel kaugusel, peab nende x-koordinaatide (st võrrandi (3) lahendite) summa olema 0. Viete'i valemite põhjal tähendab see, et $a - 2 = 0$, ehk $a = 2$. Võrrand (3) omandab nüüd kuju $x^2 - 4 = 0$ ning selle lahendid on $x_1 = -2$ ja $x_2 = 2$. Asendades need tuletise graafiku võrrandisse $y = 2x + a$, saame vastavalt $y_1 = -2$ ja $y_2 = 6$. Otsitavad lõikepunktid on niisiis $(-2; -2)$ ja $(2; 6)$.

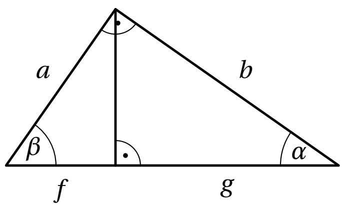
3. *Vastus:* kõik reaalarvud x, kus $6 \leqslant x \leqslant 14$.

Tähistame $y = \sqrt{x-5}$, siis $x = y^2 + 5$ ja võrrand teiseneb kujule

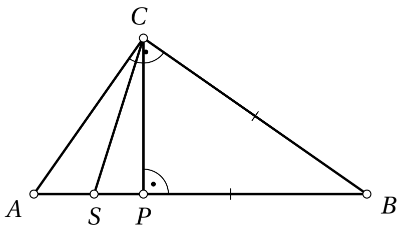
$$\sqrt{y^2 + 1 - 2y} + \sqrt{y^2 + 9 - 6y} = 2$$

ehk $\sqrt{(y-1)^2}+\sqrt{(y-3)^2}=2$ ehk $|y-1|+|y-3|=2$.
Vaatleme kolme juhtu. Kui $1 \leqslant y \leqslant 3$, siis $|y-1|+|y-3|=(y-1)+(3-y)=2$, st mistahes selline arv y rahuldab võrrandit. Kui aga $y<1$, siis saame $|y-1|+|y-3|=(1-y)+(3-y)=4-2y>4-2\cdot 1=2$, ning kui $y>3$, siis $|y-1|+|y-3|=(y-1)+(y-3)=2y-4>2\cdot 3-4=2$, st sellised arvud y võrrandit ei rahulda.
Arvestades nüüd seost $x=y^2+5$, leiame, et kui $1 \leqslant y \leqslant 3$, siis $6 \leqslant x \leqslant 14$.

4. *Lahendus 1.* Olgu kaatetite pikkused a ja b, nende projektsioonide pikkused vastavalt f ja g ning hüpotenuusi pikkus $c=f+g$ (vt joonist 16). Siis Eukleidese teoreemist saame, et $a^2=cf$, ehk $a=\sqrt{cf}$. Aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vahelise võrratuse põhjal järeldub sellest, et $a<\frac{c+f}{2}$ (võrratus on range, sest $c \neq f$). Kuid $\frac{c+f}{2}=\frac{c-f}{2}+f$, mistõttu $a-f<\frac{c-f}{2}=\frac{g}{2}$, mida oligi tarvis tõestada.



Joonis 16



Joonis 17

Lahendus 2. Olgu vaadeldav kolmnurk ABC täisnurgaga tipu C juures. Olgu P tipu C projektsioon hüpotenuusile ning S selline punkt hüpotenuusil, et $|BS|=|BC|$ (vt joonist 17). Siis $\angle BCS=\frac{180^\circ-\angle ABC}{2}=90^\circ-\frac{\angle ABC}{2}$, mistõttu $\angle ACS=\frac{\angle ABC}{2}=\frac{\angle ACP}{2}$. Seega kiir CS on nurga ACP poolitaja. Nurgapoolitaja omadusest saame, et $\frac{|AS|}{|SP|}=\frac{|AC|}{|CP|}>1$, ehk $|AS|>|SP|$, kust $|BC|-|BP|=|BS|-|BP|=|SP|<\frac{1}{2}|AP|$.

Lahendus 3. Olgu kolmnurga kaatetid pikkusega a ja b ning nende vastasnurgad suurusega α ja β (vt joonist 16). Ülesande väite tõestamiseks on vaja näidata, et

$$a-a\cos\beta<\frac{1}{2}b\cos\alpha\,.$$

Kuna $\cos\beta=\sin\alpha$ ja $a=b\tan\alpha$, siis on see samaväärne võrratusega

$$\tan\alpha-\tan\alpha\sin\alpha<\frac{1}{2}\cos\alpha\,.$$

Korrutades selle võrratuse pooled positiivse suurusega $2\cos\alpha$, saame samaväärse võrratuse

$$2\sin\alpha - 2\sin^2\alpha < \cos^2\alpha \ ,$$

mis omakorda on samaväärne võrratusega

$$1 - 2\sin\alpha + \sin^2\alpha > 0 \ .$$

See võrratus kehtib, sest tema vasak pool on $(1 - \sin\alpha)^2$ ning $\sin\alpha < 1$.

5. *Vastus:* ainus selline kolmik on $(2;\ 1;\ 1)$.

Viies võrrandi vasakul pool murrud ühisele nimetajale ja liites, saame

$$\frac{(x+y)^2 - z^2 + z^2 - (x-y)^2}{(x+z-y)(x+y+z)} = \frac{xyz}{2} \ ,$$

ehk

$$\frac{4xy}{(x+z-y)(x+y+z)} = \frac{xyz}{2} \ .$$

Jagades selle võrrandi pooled läbi positiivse suurusega $4xy$, saame

$$\frac{1}{(x+z-y)(x+y+z)} = \frac{z}{8} \ ,$$

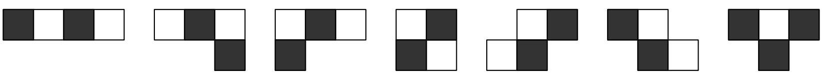
ehk

$$z \cdot (x+z-y) \cdot (x+y+z) = 8 \ .$$

Paneme tähele, et kuna y on positiivne, siis $x+z-y < x+y+z$. Lisaks näeme, et $(x+y+z)-(x+z-y) = 2y$ on paarisarv, st tegurid $x+z-y$ ja $x+y+z$ peavad olema sama paarsusega, mis ainsa võimalusena annab $x+z-y = 2$ ja $x+y+z = 4$. Niisiis $z = 1$ ning $2y = 4-2 = 2$, kust $y = 1$. Lõpuks saame võrdusest $x+y+z = 4$, et $x = 4-1-1 = 2$.

6. *Vastus:* ei.

Olgu ruuduline paber, kust Juku kujundid välja lõikab, värvitud malekorras mustaks ja valgeks. Jooniselt 18, kus on kujutatud kõik võimalikud tetrominokujundid, on näha, et täpselt üks neist sisaldab musti ja valgeid ruute erineval arvul. Seega, kui Juku moodustab ristküliku, kasutades selleks iga kujundit üks kord, siis on selles ristkülikus musti ja valgeid ruute erineval arvul.



Joonis 18

Teisalt aga sisaldab iga kujund 4 ruutu, mistõttu peab neist moodustatud ristkülik sisaldama paarisarvu ruute. See on võimalik ainult siis, kui vähemalt ühel ristküliku küljel on paarisarv ruute. Siis aga sisaldab iga selle külje sihis olev ruudurida musti ja valgeid ruute võrdsel arvul ning järelikult on ka ristkülikus kokku musti ja valgeid ruute võrdne arv. Saadud vastuolu näitab, et kõigist tetrominokujunditest ristküliku moodustamine ei ole võimalik.

Lp hindaja!

Käesolevas esitame kõigepealt hindamise üldised põhimõtted ning seejärel järjekorras konkreetsed hindamisjuhised iga ülesande kohta eraldi.

1. Õpilase lahenduseks tuleb esmajoones lugeda see, mida õpilane on ülesande kohta vormistanud puhtandina (sh mustandipaberile selgesti arusaadavalt kirja pandud mõttekäigud, kui need on ametlikult puhtandipaberilt viidatud). Töö mustandi arvestamine või mittearvestamine ülesande lahenduse hulka on hindaja otsustada (või piirkonna hindamiskomisjoni ühine otsus kõigi ülesannete suhtes), kuid see peab toimuma kõigis töödes ühtmoodi.

2. Alljärgnevas on 7.–9. klassi olümpiaadi I osa (testi) ning kõikide ülejäänud ülesannete hindamisjuhised esitatud erinevalt.

   Testi iga küsimuse jaoks on eraldi loetletud või kirjeldatud vastused, mille eest tuleks anda vastavalt kaks punkti või üks punkt (st vastavaid punkte ühe küsimuse piires *ei tule* liita). Testiülesannete lahendusi õpilased ei pea esitama, vaid kirjutavad ülesannete lehel vastavale punktiirile või ülesande tekstis viidatud kohta ainult vastuse.

   Seevastu kõigi teiste ülesannete kohta tuleb esitada täielikud lahendused, ainult vastustest ei piisa. Nende ülesannete lahendused on hindamisjuhistes jaotatud võimalust mööda osadeks (etappideks) ning näidatud lahenduse iga osa eest antav punktide arv (st ühe ülesande eest antava punktisumma saamiseks *tuleb* lahenduse erinevate osade eest antud punktid liita).

3. Žürii lahendustes ja käesolevates hindamisjuhistes on ülesannete arvulised vastused esitatud enamasti ainult ühel, lihtsaimal või kõige tõenäolisemalt esineval kujul. Hindamisel (sh testid!) tuleb võrdselt õigeks lugeda ka sama vastuse teised mõistlikud esitusviisid – sh taandatud hariliku murruna, segaarvuna, kümnendmurruna, sõnadega välja kirjutatuna –, seejuures ka osana pikemalt (nt täislausega, koos sobiva liigisõnaga või koos selgitustega) antud vastusest. Juhud, kus ülesande sisu tingib erandeid sellest üldreeglist, on eraldi mainitud vastava ülesande hindamisjuhises.

Ühik arvu järel on vastuses vajalik juhul, kui ülesandes on küsitud suurust, mis teatud ühikutes avaldub. Näiteks küsimusele „Kui suur pindala …?“ saab õige vastus olla „120 cm^2“, kuid mitte „120“ (kui ülesande tekstis pole kasutatud ühikuta pikkusi/pindalasid). Seejuures on vastused „120 cm^2“ ja „1,2 dm^2“ samaväärsed. Ühik vastuses ei ole nõutav, kui ülesandes on küsitud kindlate ühikute arvu. Näiteks küsimusele „Mitu ruutsentimeetrit …?“ antud vastused „120“ ja „120 cm^2“ tuleb võrdväärseks lugeda samal alusel nagu küsimusele „Mitu karu …?“ antud vastused „3“ ja „3 karu“ (vastus koos liigisõnaga). Niisuguse küsimuse vastuseks on arv ning ühikul või liigisõnal on vaid puhtkeeleline roll. Küsimusele „Mitu ruutsentimeetrit …?“ antud vastused „120 cm^2“ ja „1,2 dm^2“ ei ole samaväärsed.

4. Mõnede ülesannete kohta, mida saab lahendada mitmel oluliselt erineval viisil, anname eraldi hindamisskeemid erinevate lahendusviiside jaoks. Rõhutame, et iga konkreetset mittetäielikku lahendust tuleb hinnata ainult *ühe* sellise skeemi järgi (selle järgi, mille kohaselt ta saaks kõige rohkem punkte).

5. Enamiku ülesannete korral (v.a testid ja tõestusülesanded) on hindamisjuhiste lõpus eraldi näidatud, mitu punkti anda ainult õige vastuse eest. See hinne on mõeldud juhuks, kui töös on ülesande kohta toodud ainult õige vastus või õige vastus koos mõttekäiguga, mis ei annaks skeemi järgi rohkem punkte kui on ette nähtud õige vastuse eest.

6. Kahtlemata esineb õpilaste töödes ka mõttekäike, mis ei mahu meie poolt pakutud skeemidesse. Selliste lahenduste hindamisel tuleb lähtuda sellest, *kui suur osa* antud ülesandest on õpilasel lahendatud, kasutades lahenduse üksikute osade kaalu määramisel võimaluse korral võrdluseks punktide jaotust meie pakutud hindamisskeemides.

7. *Millise tahes* täieliku ja matemaatiliselt korrektse lahenduse eest tuleb igal juhul anda maksimumpunktid, sõltumata selle lahenduse pikkusest või otstarbekusest võrreldes teiste lahendusviisidega.

I osa hindamisjuhised

1. ◦ Antud õige vastus 99: 2 p

2. ◦ Antud õige vastus 200: 2 p

3. ◦ Antud õige vastus 6: 2 p

4. ◦ Antud õige vastus 6: 2 p

5. ◦ Antud õige vastus 45: 2 p

6. ◦ Antud õige vastus $(6;4)$: 2 p

Kui vastuses on kas või üks koordinaat vale, siis anda 0 punkti (sh ka vahetatud koordinaatidega vastuse $(4;6)$ korral).

Kui vastus on antud sõnaliselt ja koordinaatide nimed puuduvad, siis lugeda vastuses esimene arv x-koordinaadiks ja teine y-koordinaadiks. Nii näiteks vastuse „6 ja 4“ eest anda 2 punkti, vastuse „4 ja 6“ eest aga 0 punkti.

7. ◦ Antud õige vastus 45°: 2 p
◦ Antud vastuseks arv 45 ilma kraadimärgita: 1 p

8. ◦ Antud õige vastus 9 dm^2: 2 p
◦ Antud vastuseks arv 9 ilma ühikuta või vale ühikuga: 1 p

9. ◦ Antud õige vastus 2 tundi 45 minutit: 2 p
◦ Antud vastuseks arv $2\frac{3}{4}$ ilma ühikuta või vale ühikuga: 1 p

Ajavahemikuna tõlgendataval kujul antud vastuse eest (nt „2:45“ või „2.45“) anda 2 punkti.

10. ◦ Antud õige vastus 7: 2 p

I osa hindamisjuhised

1. ◦ Antud õige vastus 2009: 2 p

2. ◦ Antud õige vastus 5: 2 p

3. ◦ Antud õige vastus $\frac{3}{7}$: 2 p

4. ◦ Antud vastuseks neli õiget arvu 1, 2, 3 ja 6: 2 p
◦ Antud vastuseks kolm õiget arvu (üks puudu): 1 p
◦ Antud vastuseks neli õiget arvu ning veel üks vale arv: 1 p

5. ◦ Antud õige vastus 150: 2 p

6. ◦ Antud õige vastus $(4; -4)$: 2 p

Kui vastuses on kas või üks koordinaat vale, siis anda 0 punkti (sh ka vahetatud koordinaatidega vastuse $(-4; 4)$ korral).

Kui vastus on antud sõnaliselt ja koordinaatide nimed puuduvad, siis lugeda vastuses esimene arv x-koordinaadiks ja teine y-koordinaadiks. Nii näiteks vastuse „4 ja −4“ eest anda 2 punkti, vastuse „−4 ja 4“ eest aga 0 punkti.

7. ◦ Antud õige vastus 130°: 2 p
◦ Antud vastuseks arv 130 ilma kraadimärgita: 1 p

8. ◦ Antud õige vastus 3: 2 p

9. ◦ Antud õige vastus 50: 2 p

10. ◦ Antud õige vastus 3: 2 p

I osa hindamisjuhised

1. ∘ Antud õige vastus 2007: 2 p

2. ∘ Antud õige vastus $a = 182$, $b = 9$: 2 p
∘ Antud vastus, kus üks arvudest on õige, teine vale või puudu: 1 p

Vastuse $a = 9$, $b = 182$ eest (kus arvud on vahetuses ja seega kumbki neist ei ole õige) anda 0 punkti.

3. ∘ Antud õige vastus „80 punkti“ (või arv 80): 2 p

4. ∘ Antud õige vastus 5: 2 p

5. ∘ Antud õige vastus 112: 2 p

6. ∘ Antud õige vastus $(-5; 3)$: 2 p

Kui vastuses on kas või üks koordinaat vale, siis anda 0 punkti (sh ka vahetatud koordinaatidega vastuse $(3; -5)$ korral).

Kui vastus on antud sõnaliselt ja koordinaatide nimed puuduvad, siis lugeda vastuses esimene arv x-koordinaadiks ja teine y-koordinaadiks. Nii näiteks vastuse „−5 ja 3“ eest anda 2 punkti, vastuse „3 ja −5“ eest aga 0 punkti.

7. ∘ Antud õige vastus $150°$: 2 p
∘ Antud vastuseks arv 150 ilma kraadimärgita: 1 p

8. ∘ Antud vastuseks õiged raadiused 5 cm ja 3 cm ükskõik kummas järjekorras: 2 p
∘ Antud vastuseks arvud 5 ja 3 ilma ühikuta või vale ühikuga: 1 p
∘ Antud vastus, kus üks raadiustest on õige (ja koos õige ühikuga), teine vale või puudu: 1 p

9. ∘ Antud õige vastus 96: 2 p

10. ∘ Antud õige vastus 5: 2 p

II osa hindamisjuhised

1. Kuna siin võib arutleda mitmetel viisidel — nii numbrite kogusumma kaudu (nagu žürii lahenduses 1) või variantide läbivaatamise teel (nagu žürii lahenduses 2), siis anname siin ainult üldised juhised.
   - Koos põhjendusega leitud mõlemad õiged kuuekohalised arvud: 4 p
   - Põhjendatud, et otsitavaid seitsmekohalisi arve ei leidu: 3 p

   Kui a)-osas on leitud koos põhjendusega ainult üks arvudest, siis anda selle osa eest 2 punkti.

   Ainult a)-osa õige vastuse eest (mõlemad õiged arvud) ilma selgitusteta anda 2 punkti, ühe õige arvu eest ilma selgitusteta anda 1 punkt. Ülesande b)-osa õige vastuse eest ilma selgitusteta anda 0 punkti.

2. Vastavalt žürii lahendustele 1 ja 2 anname siin kaks hindamisskeemi.

   Lahendus võrdhaarsuste kaudu.
   - Avaldatud nurgad $\angle ADE$ ja $\angle BDF$ kolmnurga ABC nurkade kaudu: 4 p
   - Leitud otsitav nurk $\angle EDF$: 3 p

   Kui on avaldatud ainult üks nurkadest $\angle ADE$ ja $\angle BDF$, siis anda selle osa eest 2 punkti.

   Lahendus kõõlnelinurga kaudu.
   - Joonestatud nurgapoolitajad nurkadele CAB ja ABC ning märgitud nende lõikepunkt I: 1 p
   - Pandud tähele, et $DKIL$ on kõõlnelinurk: 3 p
   - Kõõlnelinurga omaduse kaudu leitud otsitav nurk $\angle EDF$: 3 p

   Ainult õige vastuse eest ilma selgitusteta anda 2 punkti.

3. - Oletatud, et mingi avalduse üks pooltest (mis tegelikult peab olema väär) on tõene ning saadud sellest vastuolu: 3 p
   - Tehtud järeldus, et tõene pidi olema selle avalduse teine pool: 1 p
   - Sellest lähtudes lahendus lõpule viidud: 3 p

   Ainult õige vastuse eest (kõigi viie arhitekti õiged kohad) ilma selgitusteta anda 2 punkti. Kui kasvõi ühe arhitekti koht on vale, siis anda 0 punkti.

   Kui ülesannet on tõlgendatud nii, et kohti võib ka jagada (ning seega saadud mitu vastust), siis anda 0 punkti.

II osa hindamisjuhised

1.
- Teisendatud ostetud kaupade hinnad ja makstud raha vuttideks: 2 p
- Koostatud õige võrrand: 1 p
- Teisendatud võrrand kujule, mis võimaldab kasutada arvu 9 tegurdust (nt $m(n-7)=9$): 2 p
- Leitud võrrandi kolm lahendit: 1 p
- Välistatud mittesobivad variandid tingimuse $n<m$ abil: 1 p

Täieliku õige vastuse eest (mõlemad arvud m ja n) ilma selgitusteta anda 2 punkti. Kui vastuses on üks arvudest õige, teine aga vale või puudu, siis anda 1 punkt.

2.
- Näidatud, et $\angle ACD = 2\angle DBC$ (kasutades kolmnurkade ACD ja DCB võrdhaarsust): 3 p
- Näidatud, et $\angle DCE = \dfrac{180^\circ}{7}$ (kasutades kolmnurga BAC võrdhaarsust): 2 p
- Leitud lõppvastus (kasutades kolmnurga CDE võrdhaarsust): 2 p

Kui on ainult tähele pandud *kõigi* nelja kolmnurga ACD, DCB, BAC ja CDE võrdhaarsus, kuid kasulikke järeldusi sellest tehtud ei ole, siis anda 2 punkti. Kui on tähele pandud ainult mingi kolme kolmnurga võrdhaarsus, siis anda 1 punkt.

Ainult õige vastuse eest ilma selgitusteta anda 2 punkti.

3.
- a)-osa: 4 p

  Sealhulgas:
  - Sõnastatud õige idee, mis võimaldab leida arvu n üheliste numbri (nt see, et arvude n ja $n+2$ üheliste numbrid on kaks järjestikust paarisarvu, mille korrutis lõpeb numbriga 4, või see, et $n\cdot(n+2)=(n+1)^2-1$): *1 p*
  - Leitud sellest lähtudes arvu n üheliste number 4: *1 p*
  - Esitatud korrutis $n(n+2)$ kujul, mis võimaldab leida selle kümneliste numbri (nt $(10m+4)(10m+6)$): *1 p*
  - Leitud korrutise $n(n+2)$ kümneliste number: *1 p*

- b)-osa: 3 p

  Sealhulgas:

  - Leitud otsitavad arvud n: *2 p*
  - Põhjendatud, miks just need arvud n annavad vähima ja suurima neljakohalise korrutise $n(n+2)$: *1 p*

Kui a)-osas on arvu n üheliste numbri 4 leidmise järel vaadeldud ainult erijuhte $4 \cdot 6$, $14 \cdot 16$, $24 \cdot 26$ jne ning tehtud sellest järeldus kümneliste numbri kohta, siis anda a)-osa skeemi kahe viimase rea eest kokku 1 punkt.

Ainult mõlema osa õige vastuse eest ilma selgitusteta anda 2 punkti. Kui ilma selgitusteta on antud ainult ühe osa õige vastus, siis selle eest anda 1 punkt.

II osa hindamisjuhised

1.
- Leitud, et arvu n viimane number on 3 või 8 (5-ga jaguvusest): 2 p
- Leitud, et arvu n viimane number on 8 (2-ga jaguvusest): 1 p
- Leitud, et arvu n esimene number on samuti 8: 1 p
- Pandud tähele, et arvu n numbrite summa peab 3-ga jagades andma jäägi 1: 2 p
- Leitud kõik sobivad arvud: 1 p

Täieliku õige vastuse eest (kõik 3 arvu) ilma selgitusteta anda 1 punkt.

2.
- Põhjendatud, et AK ja CK on kolmnurkade ABD ja CBD mediaanid: 2 p
- Mediaanide lõikepunkti omadusest järeldatud, et $|AK| = 3|MK|$ ja $|CK| = 3|NK|$: 2 p
- Leitud lõigu MN pikkus: 3 p

Kui vastuses ühik puudub või on vale, siis anda 1 punkt vähem.

Ainult õige vastuse eest (koos õige ühikuga) ilma selgitusteta anda 1 punkt.

3.
- Tähele pandud, et $2 * z = \frac{1}{2}$ lahendamise käigus tekkiva arvu $z = 3 * (4 * (5 * (6 * (7 * (8 * 9))))) \neq -2$ korral: 5 p

  Sealhulgas:
  - Märgatud omadust $2 * z = \frac{1}{2}$: *4 p*
  - Märgatud, et $3 * (4 * (5 * (6 * (7 * (8 * 9))))) \neq -2$: *1 p*
- Leitud avaldise $0 * \left(1 * \frac{1}{2}\right)$ väärtus: 2 p

Kuigi $2 * z = \frac{1}{2}$ kehtib mistahes $z \neq -2$ korral, pole lahenduses tingimata vaja seda kõigi arvude z jaoks näidata, vaid piisab tähele panna, et see kehtib (täielikult või osaliselt väljaarvutatud) arvu $z = 3*(4*(5*(6*(7*(8*9)))))$ jaoks.

Kui lahendaja on püüdnud arvu $z = 3 * (4 * (5 * (6 * (7 * (8 * 9)))))$ välja arvutada ja saanud arvutusvigade tõttu vale tulemuse (õige tulemus on $z = \frac{6891}{11281}$), ning siis leidnud selle vale z väärtuse jaoks, et $2 * z = \frac{1}{2}$, ilma põhjendamata, et see kehtib *mistahes* $z \neq -2$ korral, siis anda selle osa eest ette nähtud 5 punktist 3 punkti. Kui aga lahenduses on põhjendatud, et võrdus $2 * z = \frac{1}{2}$ kehtib *mistahes* $z \neq -2$ korral, siis anda selle osa eest 5 punkti sõltumata z tegeliku väärtuse leidmisel tehtud vigadest.

Kui lahenduses on tehtud õigesti vähemalt üks $*$-tehe (näiteks leitud $8 * 9$ vms), aga $2 * z$ arvutamiseni pole jõutud, anda 1 punkt.

Ainult õige vastuse eest ilma selgitusteta anda 1 punkt.

4.
- Jaotatud kõik vaadeldavad arvud peale 1 ja 52 paaridesse, kus igas paaris on arvude summa 104: 3 p
- Leitud, et paare on 16 ning valitud arvude seas on vähemalt 18 sellist, mis ei ole 1 ega 52: 2 p
- Lahendus lõpule viidud (rakendades Dirichlet' printsiipi): 2 p

Hindamisjuhised

1.
- Avaldatud $V = 0{,}6K$: 1 p
- Avaldatud $V' = 0{,}8K'$: 1 p
- Avaldatud $V' = 1{,}2V$: 1 p
- Saadud, et $K' = 0{,}9K$: 2 p
- Saadud lõppvastus: 2 p

Ainult õige vastuse eest ilma selgitusteta anda 1 punkt.

2. Vastavalt žürii lahendustele 1 ja 2 anname siin kaks hindamisskeemi.

Lahendus nimetajate võrdlemise abil.
- Kirjutatud välja positiivsed erinevused arvust 1: 2 p
- Teisendatud nad kujule, kus lugejad on võrdsed: 2 p
- Nimetajate võrdlemise kaudu lahendus lõpule viidud: 3 p

Lahendus keskmiste vahelise võrratuse abil.
- Kirja pandud võrratus $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqslant 2$: 3 p
- Põhjendatud, et see võrratus kehtib siin rangena: 1 p
- Lahendus lõpule viidud: 3 p

Et võrratust $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqslant 2$ võib lugeda tuntud faktiks, siis selle põhjenduse puudumise eest punkte mitte maha võtta.

Kui lahenduses on kirjutatud välja positiivsed erinevused arvust 1 ning näidatud, et nendevaheline õige võrratus järelduks võrratusest $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} > 2$, siis anda teise skeemi viimase rea alusel 3 punkti.

Ainult õige vastuse eest ilma selgitusteta anda 0 punkti.

3.
- a)-osa: 3 p
- b)-osa: 4 p

Ainult õige vastuse „ei“ eest b)-osas ilma selgitusteta anda 0 punkti.

Kui b)-osas on ainult kirja pandud mingid sobivad m ja n ning antud õige (eitav) vastus, aga pole näidatud, et jagatis ja jääk on nende korral erinevad, siis anda selle osa eest 2 punkti.

4. - Pandud tähele, et segmendi pindala saab arvutada sektori ja võrdkülgse kolmnurga pindalade vahena: 2 p
   - Arvutatud sektori pindala: 2 p
   - Arvutatud võrdkülgse kolmnurga pindala: 2 p
   - Leitud lõppvastus: 1 p

   Vastusele mistahes ühikute lisamise eest punkte mitte maha võtta.

   Ainult õige vastuse eest ilma selgitusteta anda 1 punkt.

5. Žürii lahendused 1 ja 2 kasutavad siin sisult sarnast arutlust, mis on vaid erinevalt kirja pandud. Anname hindamisskeemi üldisel kujul, mida saab rakendada kõigi sarnaste lahenduste korral.
   - Leitud sobivad ratsionaalarvuliste väärtustega avaldised, mille kaudu saab x ja y aritmeetiliste tehete abil avaldada: 4 p
   - Avaldatud nende kaudu x ja y viisil, millest järeldub, et nad on ratsionaalarvud: 2 p
   - Tehtud lõppjäreldus: 1 p

6. - Pandud tähele, et leidub värv, millega on värvitud vähemalt kolm kuubi tippu: 2 p
   - Pandud tähele, et leidub tahk, mille vähemalt kaks tippu on seda värvi, kusjuures nad on selle tahu mingi diagonaali otspunktid: 2 p
   - Lahendus lõpule viidud: 3 p

Eesti LVIII matemaatikaolümpiaad

15. jaanuar 2011 Piirkonnavoor **11. klass**

Hindamisjuhised

1.
- Vaadeldud eraldi kaht juhtu, vabanemaks absoluutväärtusest: 2 p
- Lahendatud võrrand juhul $x \geqslant -1$: 2 p
- Lahendatud võrrand juhul $x < -1$: 3 p

Kui absoluutväärtust on lihtsalt ignoreeritud, siis skeemi esimese ja kolmanda rea eest punkte mitte anda (kuna võrdus $|x+1| = x+1$ kehtib juhul, kui $x \geqslant -1$), st sellisele lahendusele saab anda ülimalt 2 punkti.

Ainult täieliku õige vastuse eest ilma selgitusteta anda 1 punkt. Mittetäieliku või osaliselt vale vastuse eest ilma selgitusteta anda 0 punkti.

2.
- Teisendatud võrrand kujule $4\sin^2\alpha = 1$ või $\tan\alpha = \tan(90^\circ - 2\alpha)$ või mõnele nendega samaväärsele kujule: 4 p
- Leitud sobivad nurgad α ning veendutud, et nad sobivad (ei muuda lähtevõrrandis nimetajat nulliks): 3 p

Skeemi esimese rea eesmärk on saavutatav ligikaudu 4 teisendusega; iga mõistliku teisenduse eest anda siin 1 punkt.

Kui ülesanne on muidu lahendatud, kuid lõppvastus on antud üldkujul (st pole arvestatud tingimust $0 \leqslant \alpha < 360^\circ$), siis selle eest võtta maha 1 punkt.

Detailset kontrolli pole siin vaja teha, kuna pärast murdudest vabanemist tehtavad teisendused on kõik pööratavad. Küll aga peab olema veendutud, et leitud nurgad kuuluvad ka lähtevõrrandi määramispiirkonda (ei muuda mõnda nimetajat nulliks). Kui lõppvastusesse on sisse jäetud nurgad 90° ja/või 270°, võtta maha 1 punkt.

Ainult täieliku õige vastuse eest (kõik neli õiget nurka) ilma selgitusteta anda 1 punkt. Mittetäieliku või lisaks valesid nurki sisaldava vastuse eest ilma selgitusteta anda 0 punkti.

3. Vastavalt žürii lahendustele 1, 2 ja 3 anname siin kolm hindamisskeemi.

Lahendus tegurduse ja 8-ga jaguvuse abil.

- Tegurdatud murru lugeja viie järjestikuse täisarvu korrutiseks: 2 p
- Põhjendatud, et selline korrutis jagub alati 8-ga: 2 p
- Põhjendatud, et arv 98765432100 ei jagu 8-ga: 2 p
- Lahendus lõpule viidud: 1 p

Lahendus 8*-ga jagamisel tekkivate jääkide läbivaatuse abil.*

- Veendutud jääkide läbivaatuse teel, et arv $x^5 - 5x^3 + 4x$ jagub 8-ga mistahes täisarvu x korral: 4 p
- Põhjendatud, et arv 98765432100 ei jagu 8-ga: 2 p
- Lahendus lõpule viidud: 1 p

Lahendus funktsiooni $f(x) = x^5 - 5x^3 + 4x$ *uurimise abil.*

- Pandud tähele, et kui x on võrrandi lahend, siis üks arvudest $x-2$, $x-1$, x, $x+1$ või $x+2$ peab jaguma 25-ga: 3 p
- Funktsiooni $f(x) = x^5 - 5x^3 + 4x$ uurimisel leitud, et lahend x võiks olla ainult arvude 152 ja 173 vahel, ning järeldatud, et lahendit ei leidu: 4 p

Ainult õige vastuse „ei“ eest ilma selgitusteta anda 0 punkti.

4. Vastavalt žürii lahendustele 1 ja 2 anname siin kaks hindamisskeemi.

Lahendus kolmnurkade APC ja BPC pindalade abil.

- Põhjendatud, et $DP \perp AC$ ja $EP \perp BC$: 2 p
- Avaldatud kolmnurkade PAC ja PBC pindalad kolmnurga külje ning ringjoone raadiuse kaudu: 3 p
- Avaldatud kolmnurga ABC pindala ning lahendus lõpule viidud: 2 p

Lahendus kolmnurga ABC nurgapoolitaja ja kõrguse abil.

- Põhjendatud, et CP on nurga ABC poolitaja: 2 p
- Õigesti rakendatud nurgapoolitaja omadust: 1 p
- Avaldatud kolmnurga ABC pindala külgede AC ja BC pikkuste, kordaja $k = \frac{|AP|}{|AC|}$ ja kõrguse h kaudu: 2 p
- Lahendus lõpule viidud: 2 p

5.
- Viidud kõik liikmed ühele poole võrratusmärki: 2 p
- Saadud, et lähtevõrratus on samaväärne võrratusega $\frac{16}{a^{16}-1} > 0$: 4 p
- Lahendus lõpule viidud: 1 p

6.
- Põhjendatud, et Marjel saab olla ülimalt kolme värvi pliiatseid: 3 p
- Põhjendatud, et mistahes ühte värvi pliiatseid saab olla ülimalt 3: 2 p
- Lahendus lõpule viidud: 2 p

Ainult õige vastuse eest ilma selgitusteta anda 1 punkt.

Hindamisjuhised

1.
- Koostatud võrrandisüsteem jada esimese liikme ning vahe suhtes: 4 p

  Sealhulgas:
  - Kirjutatud välja (üldkujul või konkreetse jada jaoks) jada liikme ja n esimese liikme summa avaldised: *2 p*
  - Kirjutatud välja n esimese liikme aritmeetiline keskmine: *1 p*
  - Võrrandisüsteem välja kirjutatud: *1 p*
- Lahendatud see võrrandisüsteem: 3 p

Ainult õige vastuse eest ilma selgitusteta anda 1 punkt.

2.
- Leitud antud funktsiooni tuletis: 1 p
- Koostatud funktsiooni ja tema tuletise avaldistest lõikepunktide leidmiseks võrrand: 1 p
- Leitud, et $a = 2$: 3 p

  Sealhulgas näiteks:
  - Pandud tähele, et võrrandi lahendite summa peab olema 0: *1 p*
  - Viète'i valemitest järeldatud, et $a - 2 = 0$: *2 p*
- Leitud lõikepunktide x-koordinaadid: 1 p
- Leitud lõikepunktide y-koordinaadid: 1 p

Ainult täieliku õige vastuse eest (mõlemad lõikepunktid ning a väärtus) ilma selgitusteta anda 1 punkt. Mittetäieliku või lisaks valesid suurusi sisaldava vastuse eest ilma selgitusteta anda 0 punkti.

3.
- Pandud tähele, et mõlema ruutjuure all on tegemist vahe ruuduga: 2 p
- Teisendatud võrrand kujule $|y-1| + |y-3| = 2$, kus $y = \sqrt{x-5}$ (kasutades selleks seost $\sqrt{A^2} = |A|$): 1 p
- Näidatud, et iga $y \in [1, 3]$ on selle võrrandi lahend: 1 p
- Näidatud, et piirkonnas $y \in (-\infty, 1)$ lahendeid ei ole: 1 p
- Näidatud, et piirkonnas $y \in (3, \infty)$ lahendeid ei ole: 1 p
- Leitud tulemuste põhjal välja lõppvastus (sobivad x väärtused): 1 p

Juhul, kui lahendaja asendab suurused $\sqrt{A^2}$ otse suurustega A, arvestamata avaldise A märki, anda punkte ainult skeemi esimese ja viienda (kuna sel juhul $|y-1| = y-1$ ja $|y-3| = y-3$) rea alusel, st maksimaalselt 3 punkti.
Ainult õige vastuse eest ilma selgitusteta anda 1 punkt.

4. Vastavalt žürii lahendustele 1, 2 ja 3 anname siin kolm hindamisskeemi.

Lahendus Eukleidese teoreemi abil.

- Avaldatud Eukleidese teoreemist $a = \sqrt{cf}$: 2 p
- Näidatud, et $a < \dfrac{c+f}{2}$ (koos selgitusega, miks võrratus on range): 2 p
- Lahendus lõpule viidud: 3 p

Sarnane lahendus võib olla vormistatud ka tagant ettepoole. Nii näiteks, kui lahendaja on näidanud, et ülesande väite tõestuseks piisab tõestada võrratus $a < \dfrac{c+f}{2}$, siis anda selle osa eest punkte skeemi viimase rea põhjal.

Kui lahenduses on jäetud Eukleidese teoreem kujule $a^2 = cf$ ning seda on hiljem kasutatud kasulike võrratuste tõestamisel (näiteks näidatud, et $a^2 < \left(\dfrac{c+f}{2}\right)^2$, koos selgitusega, miks võrratusmärk on range), siis anda $a^2 = cf$ eest skeemi esimese rea alusel ikka 2 punkti. Kui lahenduses mingeid kasulikke tulemusi lisaks võrdusele $a^2 = cf$ ei ole, anda skeemi esimese rea alusel 1 punkt.

Lahendus nurgapoolitaja omaduse abil.

- Esitatud idee vaadelda punkti S, mille korral $|BS| = |BC|$: 1 p
- Näidatud, et kiir CS on nurga ACP poolitaja: 2 p
- Näidatud, et $|AS| > |SP|$: 2 p
- Lahendus lõpule viidud: 2 p

Lahendus trigonomeetriliste seoste abil.

- Pandud tõestatav võrratus kirja antud kolmnurga kaatetite ja teravnurkade trigonomeetriliste funktsioonide kaudu: 2 p
- Teisendatud võrratus selliseks, et ta sisaldab ainult üht muutujat: 2 p
- Lahendus lõpule viidud: 3 p

5.

- Teisendatud antud võrdus kujule $z \cdot (x+z-y) \cdot (x+z+y) = 8$: 4 p
- Lahendus lõpule viidud: 3 p

Tingimuseni $z \cdot (x+z-y) \cdot (x+z+y) = 8$ on võimalik jõuda ligikaudu nelja mõistliku vahesammuga, millest igaühe teostamise eest anda 1 punkt.

Tingimusest $z \cdot (x+z-y) \cdot (x+z+y) = 8$ võib lõppvastuse järeldada mitmel moel. Kui on tehtud z võimalike väärtuste läbivaatus (arvu 8 positiivsed tegurid 1, 2, 4 ja 8), siis mittetäielikes lahendustes anda kahe väärtuse läbivaatamise eest 1 punkt ning kolme väärtuse eest 2 punkti.

Ainult täieliku õige vastuse eest (üks õige kolmik) ilma selgitusteta anda 1 punkt.

6.
- Esitatud idee värvida ruudustik malekorras: 2 p
- Pandud tähele, et kõiki seitset kujundit üks kord kasutades on musti ja valgeid ruute erinev arv: 2 p
- Näidatud, et teiselt poolt peab ristkülikus olema mõlemat värvi ruute ühepalju: 2 p
- Lahendus lõpule viidud: 1 p

Ainult õige vastuse „ei“ eest ilma selgitusteta anda 0 punkti.

Kokkuvõtteks

Sel aastal osutusid mõnevõrra liiga raskeks ainult 8. klassi ülesanded. Seevastu 11. klassi komplekt, mis varasematel aastatel on tihti madalate tulemustega silma paistnud, osutus seekord üheks lihtsamaks. Samuti paljudel aastatel lahendajaile raskeks osutunud 9. klassi ülesandekomplekt andis üsna normikohased tulemused.

Ka 12. klassi tulemused on väga head. Seda võib lausa üllatuseks pidada, sest siin oli mitu piirkonnavooru kohta päris tõsist ülesannet. Teisest küljest on 12. klass varemgi meeldivalt üllatanud. Seekord on 12. klassi pingereas veidi tavatu kujuga ülemine ots: tervelt 6 õpilast on maksimumpunktidega ja neist järgmisel on juba 4 punkti vähem.

Nagu eelmistel aastatel, vaatas žürii ka nüüd mõnes klassis piirkondadest saadetud töödes läbi ainult niipalju ülesandeid, kui oli vaja huvipäevale ja lõppvooru kutsutavate õiglaseks määramiseks. See tähendab, et kõikide huvipäevale ja lõppvooru kutsutavate õpilaste töödes vaadati läbi kõik ülesanded ning ükski õpilane, kelle töös jäid mõned ülesanded läbi vaatamata, ei tõuseks kutsutavate hulka ka siis, kui talle kõigi nende ülesannete eest antaks maksimaalsed punktid.

Läbi vaatamata jäänud ülesanded on tabelites eristatud kollase (veebiversioonis oranži) taustavärviga. 8.–10. ja 12. klassi tööde kontrollijad vaatasid läbi kõikides töödes kõik ülesanded.

Kontrollijate kommentaarid (Reimo Palm, Laur Tooming)

Test

Lahendajatele osutusid raskeimateks ülesanded 5, 9 ja 10; samas ülesanded 2, 3, 4, 7 ja 8 olid peaaegu kõigil õpilastel õigesti lahendatud.

Testi oli hinnatud väga hästi, punkte tuli muuta vaid üksikutes töödes.

Ül. 1. Vastuse 2^{99} eest andsime 1 punkti.

Ül. 4. Kolmes töös oli vastuseks antud „$a = 6$, $b = 1$“ — selle eest oli piirkondades antud 2 punkti ja me ei muutnud seda.

Ül. 6. Paaris töös oli piirkondades antud 0 või 2 punkti, kui juhend nägi ette 1 punkti.

Ül. 9. Väga tavaline vale vastus oli 55 minutit. Vastuse „2 min 45 sek“ eest andsime 1 punkti.

Ülesanne 1

Mitmes piirkonnas oli antud täispunktid selliste lahenduste eest, kus a)-osas pakuti välja kaks õiget arvu ja kontrolliti, et nad rahuldavad ülesande tingimusi (1)–(3). Niisugustele lahendustele andsime a)-osa eest 2 punkti, sest puudus põhjendus, kuidas need arvud on leitud, ehk miks nad on just vähim ja suurim.

Ülesande b)-osas põhjendati sobiva arvu mitteleidumist tihti otse ülesandest võetud sõnadega (nt „sest siis numbrite summa ei jagu 5-ga“). Kui sisulisi argumente polnud toodud, siis said sellised lahendused b)-osa eest 0 punkti.

Ülesanne 2

Paljud lahendajad vaatlesid mingeid konkreetseid teravnurkade suurusi, nt oletasid, et $\angle CAB = 50^\circ$. Sellised lahendused said tüüpiliselt 4 punkti — selline lähenemine viib õige lahenduseni, kui tähistada $\angle CAB = x$ ja arvutada seejärel välja teised nurgad. Kui lisaks konkreetse suurusega nurkade vaatlemisele oli väidetud ka midagi üldisemat, siis andsime 5 punkti. Kui aga kasutatud konkreetsed nurkade suurused olid saadud mingitest mittekehtivatest eeldustest (nt eeldati, et täisnurkne kolmnurk ABC on võrdhaarne, või kolmnurk ADE on võrdkülgne), siis sai lahendus 3 punkti.

Enamasti saadi lahenduses mingil viisil võrdus $\angle ADE + \angle BDF = 135^\circ$, mille abil arvutati välja otsitav nurk. Selle võrduse saamist hinnati kuni 5 punktiga.

Ülesanne 3

Kõigis meile saadetud töödes oli õpilane leidnud õige vastuse. Kuid 7 punkti saamiseks tuli ka põhjendada, miks selline vastus on ainuvõimalik; paljudes piirkondades oli aga maksimumpunktid antud ka töödele, kus seda polnud tehtud. Näiteks oli sageli tehtud oletus, et mingi üks väide on tõene, ja sellest edasi arutledes saadud kätte vastus; võimalus, et tehtud oletus ei kehti, oli aga läbi vaatamata. Sellistele töödele andsime hindamisjuhise järgi 3 punkti.

Žürii lahendusest erinevad lahendused tuginesid sageli faktile, et antud kümne väite hulgas peab iga arhitekti jaoks olema üks temale õiget kohta pakkuv väide (sellest järeldati näiteks, et Eron peab saama 1. koha, kuna talle teisi kohti ei pakutud). Seda fakti ei olnud keegi põhjendanud. Tegelikult pole seda raske näidata: selle põhjuseks on, et 10 väitest 5 peavad olema tõesed ja kaks erinevat tõest väidet ei saa olla sama arhitekti kohta, kuna antud juhul ei leidu kahte erinevat väidet, mis pakuksid samale arhitektile sama kohta. Põhjenduse puudumise tõttu andsime sellistele lahendustele tüüpiliselt 5 punkti, vigade esinemise korral ka 4 või 3 punkti. Ka mitmes piirkonnas oli taoliste lahenduste eest antud 5 punkti, sagedamini aga siiski 7 punkti.

Kontrollijate kommentaarid (Maksim Ivanov, Raili Vilt)

Test

Test osutus lahendajatele raskeks. Vaid ainult ligikaudu veerand kõigist osalejatest said testi eest 10 või enam punkti.

Kõige vähem õigeid vastuseid oli ülesannetel 9, 1, 7 ja 5, kõige rohkem aga ülesandel 2; ka ülesandeid 8 ja 10 oli hästi lahendatud.

Ülesanne 1

Tüüpiline lahendus sellele ülesandele oli selline, kus liideti kokku jäätise, šokolaadi ja klaaskommide hinnad. Saadud tulemuse põhjal tehti kohe järeldus, et üks nurr on võrdne 9 vutiga, ning edasi leiti, mitu nurru on ühes kurrus. Sellised lahendused oli piirkondades saanud 2 kuni 7 punkti. Lähtudes vajadusest eristada hindamisel põhjenduste põhjalikkust, andsime ühtlustamise käigus sellistele lahendustele 4 punkti.

Kui õpilase töös leidus tähelepanek, et 9 vutti võiks võrduda ka rohkem kui 1 nurruga, siis andsime lahendusele 5 punkti. Kui lisaks tähelepanekule leidus ka põhjendusi, miks leitud vastus on ainus võimalik, kuid need ei olnud piisavad, andsime 6 punkti.

Paljudes töödes oli põhjendamisel ja vastuse leidmisel kasutatud hinñanguid. Kõige tüüpilisem hinnang oli, et kuna klaaskommide hind oli 5 nurru ja 6 vutti, siis ühes nurrus peab olema rohkem kui 6 vutti, sest hind on selliselt antud.

Selle ülesande vastuseni jõudmine oli õpilastele üldiselt igati jõukohane. Küll aga ei märgatud vajadust põhjendada, et 9 vutti võrdub just ühe nurruga. Kahjuks ei märganud selle põhjenduse vajalikkust ka paljud hindajad.

Ülesanne 2

Tundub, et iga aastaga muutuvad geomeetriaülesanded lahendajaile üha raskemaks — seda isegi siis, kui lahendus toetub vaid kolmnurga sisenurkade summa, kõrvunurkade summa ja võrdhaarse kolmnurkade alusnurkade võrdsuse kasutamisele. Ainult 17 tööd läbi vaadatud 96-st said selle ülesande eest 5 või rohkem punkti.

Paljud õpilased väitsid, et kuna ühegi nurga suurust pole antud, siis ei saagi nurkade suurusi täpselt kindlaks teha. Teised arvasid, et selles olukorras peab ise vähemalt ühe nurga suuruse välja pakkuma (nt malliga mõõtmise teel) ja selle järgi siis teiste nurkade suurusi arvutama. Selline võte ei anna täpset tulemust ja vähemalt ühes kolmnurgas tekib vastuolu nt sellega, et kolmnurga sisenurkade summa peab olema alati täpselt 180°.

Lahenduste eest, kus arutluskäik oli õige, kuid kasutati ligikaudseid arvutusi ja/või saadi ligikaudne vastus, andsime kuni 2 punkti vähem.

Ülesanne 3

Ülesande a) osas andsime rohkem kui vastuse eest ettenähtud 1 punkti ainult juhul, kui arvu n viimase numbri ja korrutise $n(n+2)$ eelviimase numbri leidmine oli ka põhjendatud. Ainult väikeste n väärtuste läbivaatamine põhjendusena arvesse ei läinud.

Selle ülesande eest saadi kokku kõige rohkem 5 punkti. Kõige raskemaks osutus õpilastele arvu $n(n+2)$ kümneliste numbri leidmine ja tõestamine, et see on ainus võimalik. Selle osa eest sai täispunktid vaid üks õpilane, kes kasutas oma lahenduses arvu $n(n+2)$ esitust kujul $(10m+4)(10m+6)$ ja saadud avaldisest $100(m^2+m)+24$ järeldas, et korrutise kaks viimast numbrit on 2 ja 4.

Kontrollijate kommentaarid (Indrek Zolk, Kalle Kaarli)

Test

Rõõmustav oli, et testis esines küllaltki vähe valede või puuduvate ühikutega seotud vigu. Küllaltki palju tehti aga „pluss-miinus 1“ tüüpi loendamisvigu ülesandes 5 (õige vastuse 112 asemel esines palju ka vastust 113). Ülesandes 7 oli mõni lahendaja leidnud nurkade x ja y väärtused; tegelikult ülesande andmed ei ole selleks piisavad.

Ülesanne 1

Ülesanne oli väga hästi lahendatud ja ka hinnatud; ühtlustamist oli siin vähe. Üksikud õpilased olid ühel või teisel põhjusel ühe arvu neljast ära unustanud. Ligikaudu pooltes lahendustes prooviti ristsumma kasutamise asemel läbi kõik arvud 808, 818, ..., 898.

Lahendajatel, kes siiski kasutasid ristsummat, ei olnud see sageli päris korrektselt tehtud: arvu $\overline{8b8}+2$ ristsumma ei tarvitse tingimata olla $8+(b+1)$, vaid $b=9$ korral on see $9=8+(b+1)-9$. Seda ei lugenud ükski hindaja ega ka meie siiski puuduseks, kuna oluline pole siin ristsumma väärtus, vaid jaguvus 3-ga, mida 9 võrra erinevus ei mõjuta (st arv $\overline{8b8}+2$ jagub 3-ga parajasti siis, kui tema ristsumma jagub 3-ga, ning see omakorda kehtib parajasti siis, kui arv $8+(b+1)$ jagub 3-ga).

Ülesanne 2

Selle ülesande lahendus tugineb kahele faktile:

1) Rööpküliku diagonaalide lõikepunkt poolitab mõlemad diagonaalid;

2) Kolmnurga mediaanide lõikepunkt jaotab iga mediaani suhtes $1:2$.

Kui teist omadust oskasid nimetada ja kasutada peaaegu kõik lahendajad, siis esimest kasutati paljudes töödes nö vaikimisi, mis tingis 2 punkti mahavõtmise. Oli ka lahendajaid, kes märkisid küll ära, et diagonaalide lõikepunkt poolitab diagonaalid, kuid ei kasutanud seda fakti näitamaks, et lõik MN tõesti asub diagonaalil — nt esmalt väideti, et AK ja CK, kus K on diagonaalide lõikepunkt, on mediaanid, kuid diagonaalide poolitamise omadust mainiti alles hiljem tõestamaks, et need lõigud on võrdse pikkusega. Sellistele lahendustele andsime 1 punkti vähem, ja suurem osa ümberhindamisi oligi seotud selle probleemiga.

Leidus ka töid, kus lahendus oli hinnatud 7 punkti vääriliseks, kuigi diagonaalide lõikepunkti omadust polnud mainitud — ning ka vastupidiseid näiteid, kus lahendaja oli selgelt välja kirjutanud, et mediaanid asuvad diagonaalil, kuid hindaja oli punkti maha võtnud, kuna polnud öeldud, et punktid M ja N asuvad diagonaalil.

Ülesanne 3

See ülesanne oli olümpiaadil võrdlemisi harvaesinevate hulgast, kus oli võimalik täieliku lahenduseni jõuda ka ilma erilist matemaatilist nutikust üles näitamata, lihtsalt „jõuga“ kõik vahetulemused välja arvutades.

Kuigi mõnes piirkonnas oli näha hindajate kiusatust anda punkte vastavalt sellele, kui mitu viga on tehtud või kui palju on lahendaja vaeva näinud, jaotab hindamisjuhis tööd ühemõtteliselt järgmistesse klassidesse.

- Tööd, kus on vähemalt üks $*$-tehe õigesti tehtud, aga edasine progress puudub: 1 punkt.
- „Jõuga“ läbiarvutamisel põhinevad tööd, kus on jõutud mingi lõppvastuseni, aga tehte $2 * z$ tulemus leitud valesti: 1 punkt. (Punkte ei saa siin anda muu kui ainult hindamisskeemi eelviimase lõigu eest!)
- „Jõuga“ läbiarvutamisel põhinevad tööd, kus on tehtud mingi viga, aga $2 * z = \frac{1}{2}$ leitud õigesti: vähemalt 3 punkti.
  - Kui lisaks on ka $0 * \left(1 * \frac{1}{2}\right)$ leitud õigesti: kokku 5 punkti.
  - Juhu kohta, kui $0 * \left(1 * \frac{1}{2}\right)$ leidmisel on üks $*$-tehetest tehtud õigesti, teine aga vigaselt, oli piirkondades erinevaid seisukohti; ühtlustamise käigus said sellised tööd skeemi viimase rea eest 1 punkti, seega kokku 4 punkti.
- „Jõuga“ läbiarvutamisel põhinevad tööd, kus arvutusvigu pole: 7 punkti.
- Tööd, kus on omadus $2 * z = \frac{1}{2}$ tähele pandud ning edasi ka õigesti arvutatud, aga pole märgitud, et arv $z = 3 * (4 * (5 * (6 * (7 * (8 * 9)))))$ rahuldab tingimust $z \neq -2$ (nt sellepärast, et on positiivne): 6 punkti.

- Tööd, kus on pandud tähele, et $2 * z = \frac{1}{2}$, märgitud, et $z \neq 2$, ning õigesti leitud $0 * \left(1 * \frac{1}{2}\right)$ (selliseid töid tegelikult ei olnud): 7 punkti.

Niisiis karistatakse $2 * z$ arvutamisel tehtavat viga 6 punktiga (kui siin on tehtud viga, ei saa ka skeemi viimase rea eest punkti saada ning ainus punkt saab tulla mõne õigesti tehtud $*$-tehte eest). See võib tunduda ebaõiglane, aga teisest küljest on olümpiaadidel kombeks, et kui lahendaja valib „jõuga“ läbiarvutamise, ilma ülesande sisu lähemalt uurimata, siis on mistahes lahenduskäiku mõjutav viga väga kallis. Sama põhimõte kehtib näiteks ka geomeetriaülesannete korral, kui neid lahendatakse „jõuga“ koordinaatide meetodil (ka sel juhul saavad lahenduskäiku mõjutava veaga või mittetäielikud lahendused reeglina ainult mõne üksiku punkti).

Mitu lahendajat pidas sümbolit $*$ korrutusmärgiks ning arvas, et seetõttu peab avaldise väärtuseks olema $0 \cdot \ldots = 0$.

Ülesanne 4

Kuna tegemist ei ole standardse kooliülesandega, siis võib öelda, et õpilased olid sellega üsna hästi hakkama saanud. Peamiseks puuduseks oli ehk nõrk väljendusoskus. Sageli oli tunda, et õpilasel on lahendus peas olemas, aga ta kirjutab mitte päris seda. Kahes töös ei olnud aru saadud, millise jadaga on tegemist — üks neist koguni väitis, et tekst on mitmeti mõistetav.

Ühes piirkonnas oli hindaja punkti maha võtnud, kui lahenduses ei esinenud Dirichlet nimi. Tegelikult enamik lahendajatest kasutas Dirichlet’ printsiipi tervele mõistusele tuginedes, seda nimetamata. Üksikutes töödes oli lahendaja ka öelnud, et ta kasutab kellegi printsiipi, kelle nime ta ei mäleta.

Kontrollijate kommentaarid (Raul Kangro, Oleg Košik)

Üldised märkused

Tahaks panna hindajaile südamele, et olümpiaadil antakse õpilaste lahendustele punkte ainult õigete ja edasiviivate väidete ja tähelepanekute eest. Ainult selle eest, et „õpilane on nii tubli, et üritab midagi analüüsida ja tõestada“, ei tohiks kergekäeliselt punkte anda! Iga klassi komplekt püütakse koostada erineva raskusastmega ülesannetest ning kui tubli õpilane saabki mõne raskema ülesande eest 0 punkti, teenib ta tõenäoliselt punkte teistes ülesannetes.

Ülesanne 1

Ülesanne oli lahendatud küllaltki hästi, suuremad punktimuutused esinesid ainult mõne üksiku töö puhul.

Mõnes töös lähtuti valest eeldusest, et hinnete koguarv jääb igal veerandil samaks. Tekstis selle kohta midagi öeldud ei ole ning ülesandes kirjeldatud olukorras ei pea see eeldus tegelikult üldse paika.

Ülesanne 2

Ka see ülesanne kuulus lihtsamate hulka. Rohkem oli vaja ühtlustada selliste lahenduste hindamist, kus ei olnud täielikult ära tehtud ühtegi esitatud hindamisskeemides mainitud osa. Ühtlustamisel otsustati arvuliste näidete läbiproovimise eest punkte mitte anda. Arutelud, mis tuginesid väitele, et $\frac{a}{b}$ võib olla kuitahes suur, samal ajal kui $\frac{b}{a}$ jääb 0 ja 1 vahele, said 1 punkti. Ühe punkti said ka lahendused, kus esines mõni sisuline tähelepanek (nt et $\frac{a}{b} > 1$ ning $\frac{b}{a} < 1$). Kahe punkti vääriliseks loeti sellised erijuhtude käsitlused, kus selgelt tõestati, et murd $\frac{b}{a}$ on arvule 1 lähemal kui $\frac{a}{b}$ lõpmatul arvul juhtudel: näiteks kui $a > 2b$. Punktide lisamine tulenes enamasti sellest, et võrratuse $\frac{a-b}{a} < \frac{a-b}{b}$ põhjendamisel luges enamik hindajaist piisavaks mainimist

„Kuna $a > b$, siis...“, kuid mõned nõudsid põhjalikumat põhjendust. Ühtlustamisel lähtuti siin leebemast nõudest.

Ülesanne 3

Ülesande a) osa oli enamikule jõukohane, b) osas aga unustati tihti, et jääk peab olema jagajast väiksem, ning seetõttu jõuti valele järeldusele. Kahjuks oli b) osa hindamisel sageli loetud väärad arutelud õigeks, mistõttu tuli punktide arvu mitmel juhul oluliselt kahandada.

Ülesanne 4

Ülesanne osutus lahendajaile lihtsaks, kuid üllatavalt palju esines vigu geomeetria põhitõdede kasutamisel (näiteks võrdkülgse kolmnurga kõrguse leidmisel, kolmnurga pindala arvutamisel). Kuna aga ülejäänud arutelu paikapidavuse korral olid piirkondade hindajad selliste vigade eest üsna üksmeelselt vaid 1 punkti maha võtnud, siis võtsime selle ka ühtlustamisel aluseks.

Ülesanne 5

See ülesanne ei ole piirkonnavooru kohta standardne, mistõttu ta ei osutunud lihtsaks ei lahendajatele ega ka hindajatele.

Ilmnes, et üsna paljud õpilased ei orienteeru eriti hästi ratsionaal- ja irratsionaalarvu mõistes ja omadustes. Näiteks arvati mõnikord, et irratsionaalarv peab olema ruutjuur mingist ratsionaalarvust, kuigi tegelikult on irratsionaalarv igasugune lõpmatu mitteperioodiline kümnendmurd, sh näiteks π ja $\frac{1}{\pi}$. Mitmes töös lahutati irratsionaalarvud „ratsionaalarvulise“ ja „irratsionaalarvulise“ osa summaks, mis ei ole irratsionaalarvude puhul tegelikult defineeritud.

Kuigi ratsionaalarvude summa, vahe, korrutis ja jagatis (kui jagaja ei võrdu nulliga) on ratsionaalarvud, siis vastupidine väide üldjuhul ei kehti: näiteks sellest, et kahe arvu jagatis on ratsionaalarv, ei järeldu, et ka jagatav ja jagaja on ratsionaalarvud.

Kahjuks nii mõnigi kord läksid ka hindajad niisuguste väärkäsitluste õnge ning andsid lahendusele punkte isegi juhul, kui ei üritatudki etteantud arve kuidagi avaldada või teisendada.

Õigete lahenduskäikude korral unustas enamik õpilasi kahe ratsionaalarvu jagamistehte puhul kontrollida, kas jagaja on alati nullist erinev. Selle põhimõttelise puudujäägi eest võeti ülevaatamisel 1 punkt maha.

Ülesanne 6

Päris mitmes lahenduses oli ainult näide sellest, kuidas on võimalik värvida kuubi tipud kolme värviga nii, et iga serva otspunktid on erinevat värvi, ja et sel juhul tõepoolest leidub võrdkülgne kolmnurk, mille kõik tipud on sama värvi. Kuid sellest ühest näitest ei ole mingit kasu tõestamaks, et *alati* leidub selline võrdkülgne kolmnurk — mistõttu said sellised lahendused ühtlustamisel 0 punkti, kui midagi muud kasulikku ei tehtud. Kahjuks oli mõnes piirkonnas antud ainult sellise näite olemasolu eest koguni 5 kuni 7 punkti.

Ühel juhul aga võeti ülesande tingimusi rahuldava näite puudumise eest hoopis punkte maha. Tegelikult ülesande tekst ütleb kindlas kõneviisis, et „kuubi tipud *värvitakse* nii, et… “, mistõttu antud juhul võib algusest peale eeldada, et ülesande tingimusi rahuldav värvimine on olemas, ning jääb vaid tõestada, et leidub nõutav võrdkülgne kolmnurk. Seetõttu puudub värvimise näide ka žürii lahenduses. Olümpiaadiülesannete puhul võib eeldada, et õpilasi ei eksitata ning palutakse tõestada vaid tõeseid väiteid.

Ülesanne ei olnud lahendajaile eriti raske ning lisaks žürii poolt pakutud lahendusele esines palju teisigi õigeid lahenduskäike. See aga tegi tõenäoliselt elu keeruliseks hindajaile, mistõttu selle ülesande hindamisel esines suuri raskusi.

Kontrollijate kommentaarid (Härmel Nestra, Toomas Krips)

Üldised märkused

Seekordne komplekt osutus väga lihtsaks, nii et gümnaasiumiklassidest kujunes just 11. klassis lõppvooru kutsumise punktipiir kõige kõrgemaks. Mitmed olümpiaaditüüpi ülesanded olid lahendatud üllatavalt hästi ning ka tööde hindamisega piirkondades ei paistnud olevat suuremaid probleeme.

Ülesanne 1

Seda ülesannet oli üldiselt hästi lahendatud. Vead esinesid üldjuhul seoses kontrolliga, kas kahe vaadeldava piirkonna ($x \geqslant -1$ ja $x < -1$) jaoks saadud võrrandite lahendid ikka kuuluvad vastavasse piirkonda. Kui töös olid ära märgitud õiged piirkonnad, leitud neile vastavad võrrandid ja need võrrandid ära lahendatud, saades mõlema võrrandi korral lahendi $x = -1$, kuid polnud märgitud, et piirkonnas $x < -1$ on tegu võõrlahendiga, siis me punkte maha ei võtnud. Kui aga piirkondi polnud märgitud (või olid nad valesti märgitud) ning saadud lahendeid polnud ka lähtevõrrandi suhtes kontrollitud, siis andsime 5 punkti.

Ülesanne 2

Ehkki see ülesanne oli planeeritud standardse „kooliülesandena“, osutus ta reaalselt üheks raskemaks komplektis. Ühelt poolt tulenes see ilmselt komplekti kui terviku tavatust lihtsusest. Teisest küljest aga näitasid selle ülesande lahendused teatavat üldist lohakust võrrandite lahendamisel, kui võrrandi pooli korrutati-jagati läbi muutujat sisaldavate avaldistega (need operatsioonid teatavasti võivad tuua sisse võõrlahendeid või põhjustada õigete lahendite kaotsimineku, mistõttu nõuavad kontrolli ja erijuhtude analüüsi). Täispunktid said siin vaid vähesed osavõtjad.

Võrrandit teisendati paljudel eri viisidel, kuid lõpuks jõuti ikka üheni kolmest kujust: (1) $\sin^2\alpha = \frac{1}{4}$, (2) $\tan^2\alpha = \frac{1}{3}$ (või analoogne seos kootangensiga), või (3) $\cos 3\alpha = 0$. Viimane tuleb huvitavast lisalahendusest, mida me žüriis ise ette ei näinud.

Punktimuutuste puhul oli valdavalt tegu poolikute lahenduste hindamise ühtlustamisega. Tüüpiliseks juhuks oli olukord, kus õpilane jõudis võrrandi teisendamisega kujuni $\cos^2\alpha - 3\sin^2\alpha = 0$ ja ei osanud sellega midagi teha või hakkas seejärel lahendeid „laest“ võtma. Kui selle kujuni oli jõutud korrektselt, andsime 3 punkti ning õigete lahendite äraarvamise ja kontrolli eest veel kuni 1 punkti.

Mõnes piirkonnas ei olnud punkti maha võetud leitud lahendite kontrolli puudumise eest. Siin-seal polnud ka arvestatud, et kontroll tuleb teha algse võrrandi suhtes (teine variant oleks kontrollida iga potentsiaalselt võõrlahendeid tekitavat sammu eraldi).

Ülesanne 3

Üldiselt oli tegu kaunis raske ülesandega, mille eest eriti palju täispunkte ei saadud.

Sagedane oli viga, kus pandi küll tähele, et viiest järjestikusest arvust vaid üks saab jaguda 5-ga, ent tehti sellest väär järeldus, et viie järjestikuse arvu korrutis ei saa jaguda 25-ga — mis pole tõsi, sest kui see 5-ga jaguv tegur jagub ka 25-ga, jagub ka kogu korrutis 25-ga.

Leidus ka osalisi lahendusi, kus näidati esmalt, et kui $x \leqslant 2$, siis on funktsiooni $x^5 - 5x^3 + 4x$ väärtused kas negatiivsed või lihtsalt ebasobivad, ning $x \geqslant 2$ korral on see funktsioon kasvav. Seejärel leiti tingimusi rahuldavatest arvudest kaks järjestikkust arvu, millest ühel oli funktsiooni väärtus arvust 98765432100 väiksem, teisel aga suurem. Sellise lahenduse osade eest anti punkte järgnevalt.

- Näidatud, et kui $x \geqslant 2$, siis funktsioon $x^5 - 5x^3 + 4x$ kasvab: 3 p

  Sealhulgas:
  - Näidatud, et $x^5 - 5x^3 + 4x = (x-2)(x-1)x(x+1)(x+2)$: 2 p
- Pandud tähele, et väärtused $x \leqslant 2$ ei sobi: 1 p
- Leitud funktsiooni argumendile sobivad hinnangud: 3 p

  Sealhulgas:
  - Pandud tähele, et üks arvudest $x-2$, $x-1$, x, $x+1$, $x+2$ peab jaguma 25-ga: 1 p

Ülesanne 4

Seda ülesannet oli üldiselt hästi lahendatud, kuid samas nii mõnigi muidu hästi esinenud õpilane oli selle ees käed üles tõstnud. Praktiliselt kõik sihile jõudnud tegid kas sarnaselt žürii lahendusele 1 või jaotasid kolmnurgad APB ja

APC omakorda kaheks täisnurkseks kolmnurgaks ja opereerisid nende pindaladega.

Punktimuutused olid seotud peamiselt hindamisjuhendi esimese reaga, mis andis $DP \perp AC$ ja $EP \perp BC$ põhjendamise eest 2 punkti. Seda tõlgendati ka nii, et kui põhjendus puudub, siis selle osa eest üldse punkte ei saa (seega kokku ülimalt 5 punkti). Pidasime seda liiga rangeks ning kui õpilane neid ristseise põhjendamata oli nad joonisele märkinud või muul viisil ära maininud, võtsime vaid 1 punkti maha. Ainult juhul, kui ristseisu isegi mainitud ei olnud, võtsime maha 2 punkti. Niiviisi oli suurematest piirkondadest hinnatud näiteks Tallinnas.

Mõnes töös, kus piirkondade hindajad ega ka meie punkte ei alandanud, oleks võinud siiski norida tõestuse lõpu üle. Kui on vaja tõestada, et pindala S võrdub küljepikkuste $|AB|$ ja $|AC|$ aritmeetilise keskmise ja raadiuse r korrutisega, siis peaks lahendaja jõudma võrduseni $S = \frac{|AB| + |AC|}{2} \cdot r$. Paraku nii mõneski töös jäeti parem pool kujule $\frac{(|AB| + |AC|) \cdot r}{2}$ vms, mis pole päris see, mida nõuti, sest viimane väike samm on tegemata. Kui selline pisike algebraline samm on puudu kuskilt lahenduse keskelt (tekib paarisammuline „hüpe“), siis pole sellest suurt midagi, aga lõpuks peaks ikka jõudma täpselt selle võrduseni, mille tõestamist on nõutud.

Ülesanne 5

Siin ülesandes üritati nõutavat väidet mõnikord põhjendada, kasutades piirväärtusi - paraku oli säärane lähenemine aga ebaefektiivne. Samuti esines vigu, kus tõestati vastupidise märgiga võrratus, mille liikmeteks on antud võrratuse liikmete pöördväärtused. Kahjuks pole sellest aga nõutava võrratuse tõestamisel kasu.

Ülesanne 6

Ülesanne osutus üllatavalt lihtsaks isegi pärast tööde ülevaatamist. Kui tihti on kombinatoorikaülesanded toonud kaasa ulatuslikud punktimuutused, siis siin alandati vaid üksikutes töödes punkte rohkem kui 2 võrra.

Peamiselt ei olnud me rahul lahenduse lõpuosaga, kus arvestades pliiatsite koguarvu tuli jõuda arusaamisele, et on täpselt kolme värvi pliiatseid, igaüht täpselt kolm eksemplari. Aga väga ranged me siin polnud ja enamik töid jäid maksimumpunktidega, kuigi paljude õpilaste põhjenduste üle võinuks norida.

Põhifaktid, et pliiatseid on ülimalt kolme värvi ja iga värvi pliiatseid on ülimalt kolm, olid enamasti kirjas. Neil, kes rohkem kui 2 punkti kaotasid, oli neist üks või mõlemad põhjendamata.

Kontrollijate kommentaarid (Urve Kangro, Kairi Kangro)

Ülesanne 1

Tegu oli komplekti lihtsaima ülesandega, kus kõik, kes teadsid aritmeetilise jada ja keskmise mõistet, olid ka lahenduseni jõudnud. Punkte kaotati enamasti arvutusvigade või tekstist mööda lugemise eest; ühtlustamist üldiselt vaja ei olnud.

Ülesanne 2

Ka see oli küllalt lihtne ülesanne, punkte kaotati peamiselt arvutusvigade ja ebatäpsuste eest. Üllataval kombel esines mitmes töös väide, et kuna lõikepunktid peavad asuma y-teljest võrdsel kaugusel, siis $x_1 = |x_2|$, ilma seejuures mainimata, miks x_1 peab positiivne olema. Kui edasises lahenduses oli siiski kasutatud, et $x_1 = -x_2$, siis selle eest punkte maha ei võetud. Lisaks Viete'i valemitele kasutati siin küllalt tihti ka lihtsalt ruutvõrrandi lahendivalemit. Ühtlustamisel muutusid punktisummad maksimaalselt ühe punkti võrra, enamasti oli tegemist arvutusvea märkamata jäämisega hindaja poolt (selle ülesande eripäraks oli, et enamik arvutus- ja märgivigu vastust ei mõjutanud).

Ülesanne 3

See ülesanne osutus lahendajaile üllatavalt raskeks. Tüüpiliselt tõsteti võrrand kaks korda ruutu ilma võrrandi poolte mittenegatiivsust kontrollimata. Kui midagi rohkem tehtud polnud, mistõttu saadi lahendiks kõik reaalarvud, andsime ainult 1 punkti. Paljudes töödes oli ka lisatud, et $x \geqslant 5$, selle eest me lisapunkti ei andnud. Kui töös oli uuritud kõigi ruutjuurealuste mittenegatiivsust, siis selle eest sai 1 punkti lisaks. Üllataval kombel oskasid mõned õpilased sellest (ebakorrektselt!) järeldada õige vastuse ja selliste lahenduste eest olid mõned hindajad andnud täispunktid. Ühtlustamisel muutusid seetõttu mitmete lahenduste hinded 6 või 7 punktilt 2 punktile.

Esines ka lahendusi, kus oli pandud tähele, et mõlemad ruutjuuured peavad olema 0 ja 2 vahel ning see annab õige vastuse kätte. Selle tähelepaneku ning siit x jaoks konkreetsete tingimuste saamise eest andsime 4 punkti. Siit aga ei järeldu veel, et kõik neid tingimusi rahuldavad arvud ka tõepoolest algset võrrandit rahuldavad, ning see kontroll oli üldiselt tegemata (siin oleks piisanud võrrandi ruutuvõtmisest koos märgikontrolliga, mis saadud tingimustel on lihtne).

Ülesanne 4

Ülesanne oli üldiselt küllaltki hästi lahendatud. Osalisi punkte saadi enamasti esimese hindamisskeemi alusel ehk Eukleidese teoreemi teadmise ja kasutada üritamise eest. Selle ülesande omapäraks oli lahenduste rohkus - juba žürii lahendusi oli kolm, mis ka kõik õpilastel esinesid, ent enamik töid ei järginud ühtegi žürii lahendust. Kuna alternatiivseil viisidel lahendanud olid enamasti ka lõpuni jõudnud, ei tekitanud nende lahenduste kohta sobiva hindamisskeemi puudumine enamasti probleeme. Ühtlustamise käigus võeti punkt maha lahendustelt, kus väideti, et avaldis kujul $(b-h)^2$ on alati positiivne, seejuures põhjendamata, miks $b \neq h$, ning samuti neilt, kes ühegi põhjenduseta võrratuse ruutu tõstsid. Esines ka paar drastilist punktimuutust, kus täiesti vale lahenduse eest oli antud 6 või 7 punkti. Mõnel juhul, kus õpilasel polnud arvutusvigade tõttu päris täislahendus, aga see oli kergesti täislahenduseks täiendatav, andsime ühtlustamisel ka punkte juurde.

Ülesanne 5

Kuna selles ülesandes anti punkte ka avaldise teisendamise eest, olid peaaegu kõik õpilased saanud vastavalt hindamisskeemi esimesele reale kas 3 või 4 punkti. Komistuskiviks kujunes aga just järgnev osa. Žürii poolt pakutud lahendus esines täpselt ühes töös; valdavalt viidi lahendus z erinevate väärtuste läbivaatamisele, ent selles osas kas ei suudetud rahuldavalt põhjendada mõne väärtuse võimatust või jäeti mõni võimalik variant ikkagi läbi vaatamata. Esines ka töid, kus ilmselt peeti 0 positiivseks täisarvuks ja saadi vastavalt sellele lahendeid rohkem. Ühtlustamisel võeti punkte maha põhjenduste ebapiisavuse ja tähelepanemata jäänud arvutusvigade eest. Sagedasim punktide kaotamise põhjus oli ilma põhjenduseta esitatud väide, et positiivsete täisarvude ruutude vahe ei saa olla 1, 2 ega 4.

Ülesanne 6

See ülesanne oli oodatult komplekti raskeim. Need, kes olid värvimise peale tulnud, lahendasid ülesande üldiselt ära — need aga, kes olid hakanud lihtsalt paigutamist proovima, ei jõudnud kuigi kaugele, sest variantide arv on liiga suur. Paljud olid õigesti läbi vaadanud 2×14 ristküliku juhu, aga kuna see on võrreldes 4×7 ristkülikuga oluliselt lihtsam, andsime selle eest ainult 1 punkti (piirkondades oli selle eest antud 0 kuni 6 punkti). Kui oli proovitud kujundeid 4×7 ristkülikusse süstemaatiliselt paigutada, andsime selle eest veel 1 punkti, aga alati jäid paljud variandid läbi vaatamata. Üks lahendus põhines sellel, et kõik kujundid peale T-tetromino saab jagada 1×2 ristkülikuteks, mistõttu piisab näidata, et ükskõik kuhu T-tetromino paigutada, ei saa ülejäänud osa katta 1×2 ristkülikutega. Kahjuks olid ka siin paljud juhud läbi vaatamata.

Seda ülesannet oli piirkondades väga erinevalt hinnatud. Sisult sarnane lahendus võis saada Tartus 6 punkti ja Tallinnas 0 punkti. Esines ka juhte, kus muutsime piirkonnas antud 7 punkti 0 või 1 punktiks, sest põhjendus sisuliselt puudus.