Piirkonnavoor 2010

Eesti LVII matemaatikaolümpiaad

6. veebruar 2010 Piirkonnavoor **7. klass**

I osa. *Lahendamisaega on 40 minutit.*
Sellele lehele kirjuta ainult vastused, lahendamiseks võid kasutada lisapaberit.
Iga ülesande õige vastus annab 2 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Arv a moodustab 2000% arvust b. Leia jagatis $b : a$.

. . . .

2. Arvud $-\frac{1}{6}, \frac{1}{7}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ ja $-\frac{1}{3}$ järjestatakse suuruse järjekorras. Milline neist arvudest on selles järjestuses keskmisel kohal?

. . . .

3. Aastaarvu 2010 kahest esimesest numbrist moodustuv arv 20 on täpselt kaks korda suurem kui tema kahest viimasest numbrist moodustuv arv 10. Milline on järgmine sellise omadusega aastaarv?

. . . .

4. Leia vähim positiivne täisarv, millega arvu 600 korrutades saame mingi täisarvu ruudu.

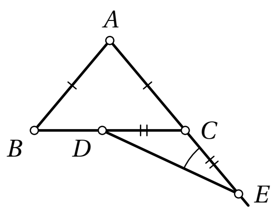
. . . .

5. Ruudustikku kirjutatakse naturaalarvud 1 kuni 10 joonisel näidatud viisil. Kui palju on ruudustikus selliseid ristkülikuid, milles on täpselt üks paarisarv?

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10

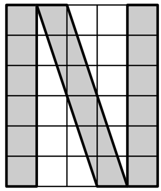
. . . .

6. Võrdhaarse kolmnurga ABC alusel BC valitakse punkt D ja haara AC pikendusel üle punkti C valitakse punkt E nii, et $|CD| = |CE|$. Leia nurga BAC suurus, kui $\angle CED = 25°$.



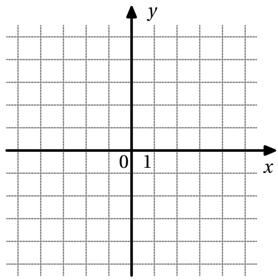
. . . .

7. Leia tähe N pindala, kui ühe ruudukese pindala on 1 pindalaühik.

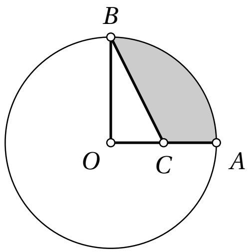


....

8. Täisnurkse kolmnurga ABC tipu A koordinaadid on $(-3;1)$, täisnurga tipu B koordinaadid on $(-2;-2)$ ja tipp C asub x-teljel. Joonesta koordinaattasandile kolmnurk ABC.

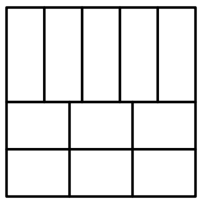


9. Ringi raadiused OA ja OB on risti ning punkt C poolitab raadiuse OA. Leia tumedaks värvitud kujundi täpne pindala, kui $|OB| = 2$ cm.



....

10. Ruut on jaotatud horisontaalse joonega pooleks. Kumbki pool on omakorda jaotatud joonisel näidatud viisil võrdseteks ristkülikuteks. Leia ruudu vähim võimalik küljepikkus, kui kõigi ristkülikute küljepikkused sentimeetrites on täisarvulised.



....

Eesti LVII matemaatikaolümpiaad

6. veebruar 2010 Piirkonnavoor **8. klass**

I osa. *Lahendamisaega on 40 minutit.*
Sellele lehele kirjuta ainult vastused, lahendamiseks võid kasutada lisapaberit.
Iga ülesande õige vastus annab 2 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Milline arvudest a, b, c, d, e on suurim, kui $a = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$, $b = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$, $c = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}$, $d = \frac{1}{3} : \frac{1}{4}$ ja $e = \frac{1}{4} : \frac{1}{3}$?

. . . .

2. Aastaarvul 2010 on järgmine omadus: esimene number on suurem teisest, teine on väiksem kolmandast, kolmas on omakorda suurem neljandast numbrist. Milline oli eelmine sellise omadusega aastaarv?

. . . .

3. Leia vähim positiivne täisarv, millega arv 2520 ei jagu.

. . . .

4. Ruudustikku kirjutatakse naturaalarvud 1 kuni 9 joonisel näidatud viisil. Kui palju on ruudustikus selliseid ristkülikuid, millesse kirjutatud arvude seas on täpselt üks täisarvu ruut?

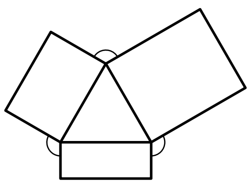
1	2	3
4	5	6
7	8	9

. . . .

5. Kui suur on nurk, mis moodustab 25% oma kõrvunurgast?

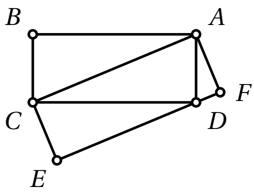
. . . .

6. Võrdkülgse kolmnurga külgedele on konstrueeritud ristkülikud. Leia kaarekestega märgitud nurkade suuruste summa.



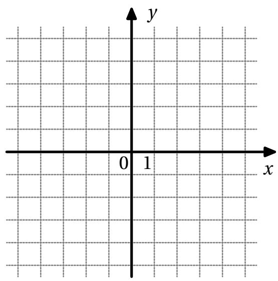
. . . .

7. Ristküliku $ABCD$ diagonaal on ristküliku $ACEF$ küljeks ning punkt D asub küljel EF. Leia viisnurga $ABCEF$ pindala, kui $|AB| = 12$ cm ja $|BC| =$ $= 5$ cm.

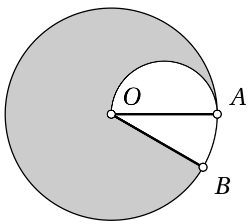


. . . .

8. Võrdhaarse trapetsi $ABCD$ aluse AB otspunktide koordinaadid on $A(-3;-1)$ ja $B(1;3)$ ning alus CD läbib punkti $E(3;1)$ ja on kaks korda pikem alusest AB. Joonesta koordinaattasandile trapets $ABCD$.

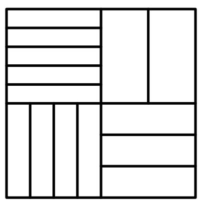


9. Ringi raadiusele OA on konstrueeritud poolring. Leia tumedaks värvitud kujundi täpne ümbermõõt, kui raadiuste OA ja OB vaheline nurk on suurusega $30°$ ja $|OA| = 6$ cm.



. . . .

10. Ruut on jaotatud neljaks võrdseks ruuduks, millest igaüks on omakorda jaotatud joonisel näidatud viisil võrdseteks ristkülikuteks. Leia suure ruudu vähim võimalik küljepikkus, kui kõigi ristkülikute küljepikkused sentimeetrites on täisarvulised.



. . . .

Eesti LVII matemaatikaolümpiaad

6. veebruar 2010 Piirkonnavoor **9. klass**

I osa. *Lahendamisaega on 40 minutit.*
Sellele lehele kirjuta ainult vastused, lahendamiseks võid kasutada lisapaberit.
Iga ülesande õige vastus annab 2 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Mitu korda tuleb arvu 2010 vähemalt järjest kirjutada, et tekiks 18-ga jaguv arv?

. . . .

2. Leia arvude $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$ ja 6^3 suurim ühistegur.

. . . .

3. Leia positiivne arv n, mille korral $2009 \cdot 2011 + 1 = n^2$.

. . . .

4. Ruudustikku kirjutatakse naturaalarvud 1 kuni 10 joonisel näidatud viisil. Kui palju on ruudustikus selliseid ristkülikuid, millesse kirjutatud arvude seas on täpselt üks 3-ga jaguv arv?

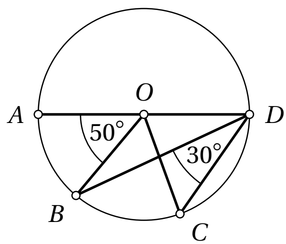
1	2	3	4	5
6	7	8	9	10

. . . .

5. Kui suur on võrdhaarse kolmnurga tipunurk, kui see moodustab 1600% kolmnurga alusnurgast?

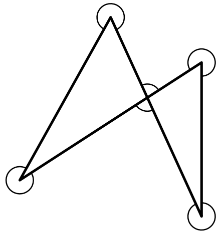
. . . .

6. Ringjoonel keskpunktiga O asuvad punktid A, B, C ja D, kusjuures AD on ringjoone diameeter. Leia nurga COD suurus, kui $\angle AOB = 50°$ ja $\angle BDC = 30°$.



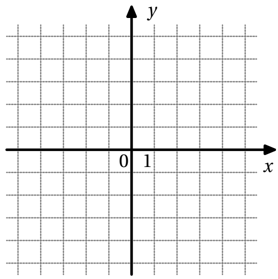
. . . .

7. Leia kaarekestega märgitud kuue nurga suuruste summa.



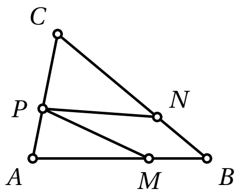
. . . .

8. Rombi kolme tipu koordinaadid on $(-1; 0)$, $(1; 2)$ ja $(2; -1)$. Kirjuta rombi neljanda tipu võimalike asukohtade koordinaadid.



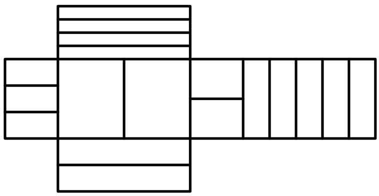
. . . .

9. Kolmnurga ABC külgedel AB ja BC võetakse punktid M ja N nii, et $|AM| = 2|MB|$ ja $|CN| = 2|NB|$. Küljel AC valitakse mingi punkt P. Leia kolmnurga ABC pindala, kui nelinurga $PMBN$ pindala on $12\ \text{cm}^2$.



. . . .

10. Joonisel on näidatud risttahuka pinnalaotus, kus iga tahk on jaotatud võrdseteks ristkülikuteks. Leia risttahuka vähim võimalik ruumala, kui kõigi ristkülikute küljepikkused sentimeetrites on täisarvulised.



. . . .

Eesti LVII matemaatikaolümpiaad

6. veebruar 2010 Piirkonnavoor **7. klass**

II osa. *Lahendamisaega on 2 tundi.*
Ülesannete lahendused kirjuta eraldi lehele.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti. Ainult vastusest ei piisa!
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Kahekohalisele arvule liideti kolmekohaline arv ja tulemuseks saadi neljakohaline arv. Kõigil neil kolmel arvul on selline omadus, et lugedes neid vasakult paremale või paremalt vasakule, saame ühe ja sama arvu. Leia kõik sellised arvukolmikud.

2. Risttahukakujulise veepaagi põhja laius on 2 m ja pikkus 3 m. Vee transportimiseks kasutatakse tsisterne, mis mahutavad 2 tonni vett. Kolme tsisternitäie veega sai täis 80% veepaagi mahust. On teada, et 1 dm^3 vett kaalub 1 kg.
   a) Leia veepaagi kõrgus.
   b) Mitu protsenti neljandast tsisternitäiest veest on vaja lisada, et veepaak saaks täis?

3. Neli klassivenda Ants, Peeter, Jüri ja Toomas ennustasid eelseisva kontrolltöö tulemusi.

   Ants: „Peetri tulemus on meist neljast kahe parema hulgas."
   Peeter: „Jüri ei saa meist kõige vähem punkte."
   Jüri: „Toomas saab rohkem punkte kui Ants."
   Toomas: „Minu tulemus tuleb Antsu omast kehvem."

   Pärast kontrolltööd selgus, et poiste saadud punktisummad on kõik erinevad ja ainult üks ennustustest osutus tõeseks, kusjuures kõige madalama tulemuse saanud poisi ennustus oli väär. Leia poiste tulemuste paremusjärjestus selles kontrolltöös.

Eesti LVII matemaatikaolümpiaad

6. veebruar 2010 Piirkonnavoor **8. klass**

II osa. *Lahendamisaega on 2 tundi.*
Ülesannete lahendused kirjuta eraldi lehele.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti. Ainult vastusest ei piisa!
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Kolmekohalisest arvust ühe numbri kustutamisel saadakse kahekohaline arv, mille summa esialgse kolmekohalise arvuga on 221. Leia kõik sellised kolmekohalised arvud.

2. Täisnurkse kolmnurga ABC teravnurga tipust A tõmmatud nurgapoolitaja lõikab kaatetit BC punktis K. Nurga AKC poolitaja lõikab hüpotenuusi AC punktis L. Leia kolmnurga ABC teravnurkade suurused, kui $|AB| = |AL|$.

3. Kingaparanduses oli 35 katkist saabast. Neist 16-l tuli vahetada lukk, 17-l vahetada kontsaplekid ja 18-l oli vaja talda liimida, kusjuures igal saapal tuli teha vähemalt üht neist kolmest. Saapaid, millel oli vaja ainult vahetada lukk ja kontsaplekid, oli nende hulgas 4. Saapaid, millel oli vaja ainult vahetada lukk ja talda liimida, oli 3 ning saapaid, millel oli vaja ainult vahetada kontsaplekid ja talda liimida, oli 5. Kui palju oli kingaparanduses selliseid saapaid, millel oli vaja vahetada lukk ja kontsaplekid ja ka talda liimida?

II osa. *Lahendamisaega on 4 tundi.*
Ülesannete lahendused kirjuta eraldi lehele.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti. Ainult vastusest ei piisa!
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Teadlane kirjutas uue raamatu keskmise kiirusega 6 lehekülge päevas. Pärast seda tuli aga raamatut ka toimetada, mistõttu raamatu valmimise keskmine kiirus langes 4,5 leheküljele päevas. Leia toimetamise keskmine kiirus, kui on teada, et raamatu lehekülgede arv toimetamise käigus ei muutunud.

2. Täisnurkses kolmnurgas hüpotenuusile tõmmatud kõrgus jaotab hüpotenuusi kaheks osaks, mille pikkuste vahe on võrdne ühe kaateti pikkusega. Leia selle täisnurkse kolmnurga teravnurkade suurused.

3. Leia kõik jäägid, mille saab anda 4-ga mittejaguva paarisarvu ruut jagamisel 32-ga.

4. Lumivalgeke tuli koju ja nägi, et võõrasema istub kamina ees ja sööb õuna. Lumivalgeke küsis pöialpoistelt, kes avas võõrasemale ukse ja kes andis talle õuna. Pöialpoiste vastused olid sellised.

Õnneseen: „Ukse avas Toriseja, õuna andis Unimüts.“
Toriseja: „Ukse avas Ninatark, õuna andsin mina.“
Ninatark: „Mina ust ei avanud, õuna andis Unimüts.“
Unimüts: „Ukse avas Õnneseen ja tema andis ka õuna.“

On teada, et ühe pöialpoisi vastuses on mõlemad väited tõesed, teisel mõlemad väited väärad ning ülejäänud kahe pöialpoisi vastustes on üks väide tõene ja teine väär.

Kes avas tegelikult võõrasemale ukse ja kes andis talle õuna?

Eesti LVII matemaatikaolümpiaad

6. veebruar 2010 Piirkonnavoor **10. klass**

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Risttahuka ruumala on 72 cm^3 ja selle eri suurusega tahkude pindalad suhtuvad üksteisesse nagu $2 : 3 : 4$. Leia selle risttahuka servade pikkused.

2. Leia võrrandi

$$\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}$$

reaalarvulised lahendid.

3. Tõesta, et mis tahes reaalarvude x ja y korral kehtib võrratus

$$x^2 + y^2 \geqslant \frac{3}{2}xy\,.$$

Milliste paaride $(x,\ y)$ korral kehtib võrdus?

4. Olgu C lõigu AB keskpunkt. Lõik AB on võrdhaarse kolmnurga ADB aluseks ning lõigud AC ja BC on vastavalt võrdhaarsete kolmnurkade AEC ja BFC alusteks, kusjuures $|AD| = |BD| = |AE| = |EC| = |BF| = |FC|$. Tõesta, et nurkade AEC ja BFC suuruste summa on väiksem nurga ADB suurusest.

5. Tõesta, et iga täisarvu $n \geqslant 3$ korral leidub selline n-kohaline arv, mis on täisarvu ruut ja mille algusse numbri 1 lisamisel saame samuti mingi täisarvu ruudu.

6. Juku ja Miku mängivad $n \times n$ ruudust koosneval mängulaual järgmiste reeglitega mängu. Algul on mängulaua kõik ruudud tühjad. Käigulolev mängija lisab mängulauale 1, 2 või 4 nuppu, kusjuures igal ruudul saab olla vaid üks nupp. Käike tehakse kordamööda, alustab Juku. Võidab mängija, kes asetab nupu mänguvälja viimasele tühjale ruudule. Kumb mängija saab võita vastase suvalise vastumängu korral, kui

a) $n = 6$;

b) $n = 8$?

Eesti LVII matemaatikaolümpiaad

6. veebruar 2010 Piirkonnavoor **11. klass**

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Kas arv $\sqrt{5} \cdot \sqrt[4]{6}$ on suurem või väiksem arvust 3,5?

2. Matkarada on 6 km pikkune ring. Üheaegselt hakkasid seda samast lähtekohast eri suundades läbima kaks matkajat. Kõndinud 2 km, peatus üks matkaja pooleks tunniks, et einet võtta, ja 4 minutit pärast uuesti liikuma hakkamist kohtus teise matkajaga. Rohkem matkajad peatusi ei teinud ja kumbki neist kõndis kogu oma liikumise aja konstantse kiirusega. Leia matkajate kiirused, kui lähtepunkti tagasi jõudsid nad korraga.

3. Tõesta, et iga naturaalarvu $n > 2$ jaoks leidub selline algarv $p < n$, millega arv n ei jagu.

4. a) Kas iga kolmnurga jaoks leidub ringjoon, mis lõikab tema iga külge kahes punktis nii, et moodustuvad kolm kõõlu on võrdse pikkusega?

b) Kas iga nelinurga jaoks leidub ringjoon, mis lõikab tema iga külge kahes punktis nii, et moodustuvad neli kõõlu on võrdse pikkusega?

5. Olgu x ja y sellised positiivsed reaalarvud, et $x + y = 1$. Tõesta, et kehtib võrratus

$$\left(\frac{1}{x^2} - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{y^2} - 1\right) \geqslant 9 .$$

6. Telemängude „Kes tahab saada superstaariks“, „Superstaarijaht“ ja „Meeleheitel superstaarid“ võitjad pandi üksteisega võistlema saates „Superstaaride tuleproov“. Selle võistluse igas voorus seati kolm superstaari omavahel ilma kohajagamiseta paremusjärjestusse ning iga osaleja lõpptulemuseks kõigi voorude kokkuvõttes loeti tema saadud esimeste ja viimaste kohtade arvude vahe. Pärast kõiki voore oli „Kes tahab saada superstaariks“ võitja edestanud „Superstaarijahi“ võitjat 20 voorus ning „Meeleheitel superstaaride“ võitjat 10 voorus, kuid ometi said kõik superstaarid võrdse lõpptulemuse. Mitu vooru peeti?

Eesti LVII matemaatikaolümpiaad

6. veebruar 2010 Piirkonnavoor **12. klass**

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Leia võrrandi

$$4^x + 1 = 2^{x-1} + 2^{x+1}$$

reaalarvulised lahendid.

2. Olgu a selline positiivne reaalarv, et funktsiooni $y = \frac{1}{x}$ graafikule punktis $x = a$ tõmmatud puutuja ja funktsiooni $y = -\frac{1}{x}$ graafikule punktis $x = -a$ tõmmatud puutuja lõikepunktid koordinaattelgedega on võrdkülgse kolmnurga tippudeks. Leia a.

3. Positiivse täisarvu n korral tähistame $S(n) = n + n^2 + n^3 + n^4 + n^5 + n^6$.

a) Tõesta, et mis tahes positiivse täisarvu n korral $S(n)$ jagub 6-ga.

b) Milliste positiivsete täisarvude n korral $S(n)$ jagub 12-ga?

4. Olgu $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ ja $\vec{d} = \vec{b} + \vec{c}$, kusjuures vektorite $\vec{b}$, $\vec{c}$ ja $\vec{d}$ pikkused on võrdsed. Leia vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ vahelise nurga suurus.

5. Tähistagu $\lfloor a \rfloor$ reaalarvu a täisosa, st suurimat sellist täisarvu, mis ei ole suurem arvust a.

a) Leia võrrandi $\lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 3x \rfloor + \lfloor 4x \rfloor + \lfloor 5x \rfloor + \lfloor 6x \rfloor = 2010$ kõik lahendid.

b) Tõesta, et võrrandil $\lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 3x \rfloor + \lfloor 4x \rfloor + \lfloor 5x \rfloor + \lfloor 6x \rfloor + \lfloor 7x \rfloor = 2010$ ei ole lahendeid.

6. Arvteljel märgitakse n erinevat täisarvu. Seejärel valitakse selline komplekt arvtelje täisarvuliste otspunktidega lõike, et iga märgitud täisarv kuulub vähemalt ühele valitud lõigule (sh võib olla selle lõigu otspunkt). Tõesta, et valitud lõikude pikkuste summa on vähemalt $\frac{n}{2}$.

LVII Олимпиада Эстонии по математике

6 февраля 2010 г. Региональный тур **7 класс**

I часть. *Время, отводимое для решения: 40 минут.*
На этом листке написать только ответы, для решения можно использовать дополнительную бумагу.
Верный ответ каждой задачи даёт 2 балла.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Число a составляет 2000% от числа b. Найти частное $b : a$.

. . . .

2. Числа $-\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$, $-\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ и $-\frac{1}{3}$ упорядочивают по величине. Какое из этих чисел в полученном ряду находится посередине?

. . . .

3. Число 20, образованное из двух первых цифр текущего года 2010, ровно в два раза больше числа 10, образованного из его двух последних цифр. Найти следующий год, имеющий такое же свойство.

. . . .

4. Найти наименьшее положительное целое число, при умножении которого на число 600 получится квадрат некоторого целого числа.

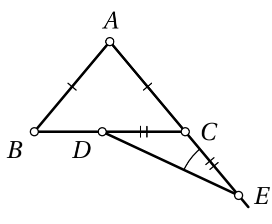
. . . .

5. На клетчатой доске записывают натуральные числа от 1 до 10 так, как показано на рисунке. Сколько на клетчатой доске таких прямоугольников, в которых содержится ровно одно чётное число?

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10

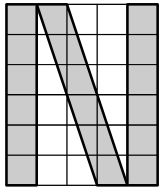
. . . .

6. На основании BC равнобедренного треугольника ABC выбирают точку D, а на продолжении ребра AC через точку C выбирают точку E так, что $|CD| = |CE|$. Найти величину угла BAC, если $\angle CED = 25°$.



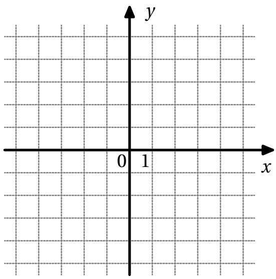
. . . .

7. Найти площадь буквы N, если площадь одной клетки равна 1 единице площади.

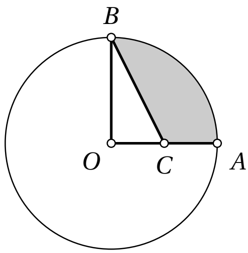


. . . .

8. Координаты вершины A прямоугольного треугольника ABC равны $(-3; 1)$, координаты при вершине B прямого угла равны $(-2; -2)$, а вершина C лежит на оси x. Нарисовать треугольник ABC на координатной плоскости.

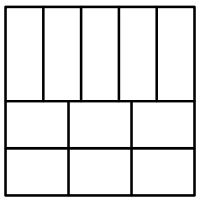


9. Радиусы OA и OB данного круга перпендикулярны, а точка C делит пополам радиус OA. Найти точную площадь закрашенной тёмным цветом фигуры, если $|OB| = 2$ см.



. . . .

10. Квадрат поделен горизонтальной линией пополам. Каждая полученная половинка в свою очередь поделена на равные прямоугольники так, как показано на рисунке. Найти наименьшую возможную длину стороны квадрата, если длины сторон всех прямоугольников равны целому числу сантиметров.



. . . .

LVII Олимпиада Эстонии по математике

6 февраля 2010 г. Региональный тур **8 класс**

I часть. *Время, отводимое для решения: 40 минут.*
На этом листке написать только ответы, для решения можно использовать дополнительную бумагу.
Верный ответ каждой задачи даёт 2 балла.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Какое из чисел a, b, c, d, e является наибольшим, если $a = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$, $b = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$, $c = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}$, $d = \frac{1}{3} : \frac{1}{4}$ и $e = \frac{1}{4} : \frac{1}{3}$?

. . . .

2. Текущий год 2010 имеет следующее свойство: его первая цифра больше второй, вторая цифра меньше третьей, а третья цифра больше четвёртой. Найти предыдущий год, имевший такое же свойство.

. . . .

3. Найти наименьшее положительное целое число, на которое не делится число 2520.

. . . .

4. На клетчатой доске записывают натуральные числа от 1 до 9 так, как показано на рисунке. Сколько на клетчатой доске таких прямоугольников, в которых содержится ровно один квадрат целого числа?

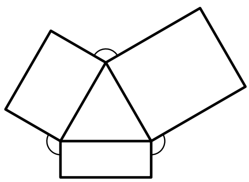
1	2	3
4	5	6
7	8	9

. . . .

5. Чему равняется величина угла, составляющего 25% от своего смежного угла?

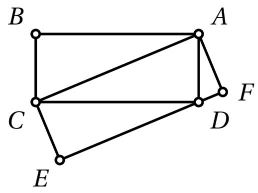
. . . .

6. На сторонах равностороннего треугольника построены прямоугольники. Найти сумму величин углов, обозначенных дугами.



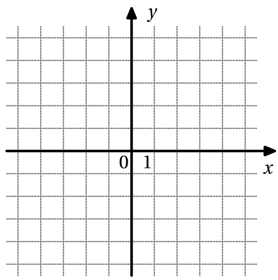
. . . .

7. Диагональ прямоугольника $ABCD$ является стороной прямоугольника $ACEF$, а точка D лежит на стороне EF. Найти площадь пятиугольника $ABCEF$, если $|AB| = 12$ см и $|BC| = 5$ см.

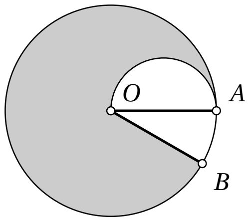


. . . .

8. Конечные точки основания AB равнобедренной трапеции $ABCD$ имеют координаты $A(-3; -1)$ и $B(1; 3)$, а основание CD проходит через точку $E(3; 1)$ и в два раза длиннее основания AB. Нарисовать трапецию $ABCD$ на координатной плоскости.

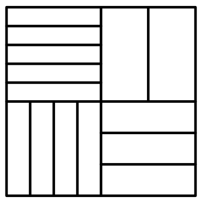


9. На радиусе OA данного круга построен полукруг. Найти точный периметр закрашенной тёмным цветом фигуры, если величина угла между радиусами OA и OB равен 30° и $|OA| = 6$ см.



. . . .

10. Квадрат поделен на четыре равных квадрата, каждый из которых в свою очередь поделен на равные прямоугольники так, как показано на рисунке. Найти наименьшую возможную длину стороны большого квадрата, если длины сторон всех прямоугольников равны целому числу сантиметров.



. . . .

LVII Олимпиада Эстонии по математике

6 февраля 2010 г. Региональный тур **9 класс**

I часть. *Время, отводимое для решения: 40 минут.*
На этом листке написать только ответы, для решения можно использовать дополнительную бумагу.
Верный ответ каждой задачи даёт 2 балла.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. По крайней мере сколько раз подряд нужно записать число 2010, чтобы полученное число делилось на 18?

. . . .

2. Найти наибольший общий делитель чисел $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$ и 6^3.

. . . .

3. Найти положительное число n, при котором $2009 \cdot 2011 + 1 = n^2$.

. . . .

4. На клетчатой доске записывают натуральные числа от 1 до 10 так, как показано на рисунке. Сколько на клетчатой доске таких прямоугольников, в которых содержится ровно одно число, делящееся на 3?

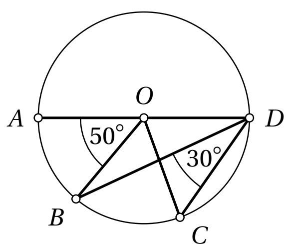
1	2	3	4	5
6	7	8	9	10

. . . .

5. Чему равняется угол при вершине равнобедренного треугольника, если он составляет 1600% от угла при основании этого треугольника?

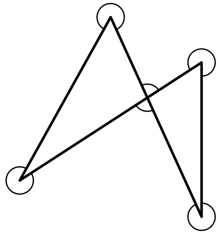
. . . .

6. На окружности с центром O лежат точки A, B, C и D, причём AD является диаметром окружности. Найти величину угла COD, если $\angle AOB = 50^\circ$ и $\angle BDC = 30^\circ$.



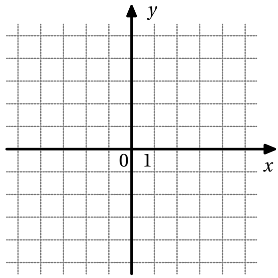
. . . .

7. Найти сумму величин шести углов, обозначенных дугами.



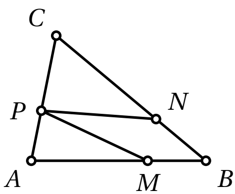
. . . .

8. Три вершины ромба имеют координаты $(-1;0)$, $(1;2)$ и $(2;-1)$. Записать координаты возможных положений четвёртой вершины ромба.



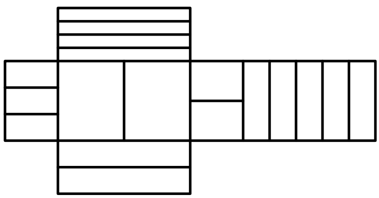
. . . .

9. На сторонах AB и BC треугольника ABC берут точки M и N так, что $|AM| = 2|MB|$ и $|CN| = 2|NB|$. На стороне AC выбирают некоторую точку P. Найти площадь треугольника ABC, если площадь четырёхугольника $PMBN$ равна 12 см^2.



. . . .

10. На рисунке показана развёртка прямоугольного параллелепипеда, каждая грань которого поделена на равные прямоугольники так, как показано на рисунке. Найти наименьший возможный объём прямоугольного параллелепипеда, если длины сторон всех прямоугольников равны целому числу сантиметров.



. . . .

LVII Олимпиада Эстонии по математике

6 февраля 2010 г. Региональный тур **7 класс**

II часть. *Время, отводимое для решения: 2 часа.*
Решения задач написать на отдельном листе.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов. Написать только ответ недостаточно!
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. К двузначному числу прибавили трёхзначное число и в результате получили четырёхзначное число. Все эти три числа имеют следующее свойство: при прочтении их как слева направо, так и справа налево получаем одно и то же число. Найти все такие тройки чисел.

2. Имеется бак для воды в форме прямоугольного параллелепипеда, основание которого имеет ширину 2 м и длину 3 м. Для перевозки воды используют цистерны, вмещающие 2 тонны воды. Три полные цистерны воды заполняют 80% от вместимости всего бака. Известно, что 1 дм^3 воды весит 1 кг.

а) Найти высоту бака.

б) Сколько процентов воды от четвёртой полной цистерны нужно добавить, чтобы наполнить бак?

3. Четверо одноклассников Антон, Петя, Юра и Толик предсказали результаты предстоящей контрольной работы.

Антон: „Результат Пети будет в числе двух лучших среди нас четверых.“
Петя: „Среди нас Юра не получит меньше всех баллов.“
Юра: „Толик получит больше баллов, чем Антон.“
Толик: „Мой результат будет хуже результата Антона.“

После контрольной выяснилось, что все полученные мальчиками баллы различны, и что только одно предсказание оказалось правдивым, причём предсказание мальчика, получившего самый низкий результат, оказалось ложным. Найти, в каком порядке расположились результаты мальчиков в этой контрольной работе.

LVII Олимпиада Эстонии по математике

6 февраля 2010 г. Региональный тур **8 класс**

II часть. *Время, отводимое для решения: 2 часа.*
Решения задач написать на отдельном листе.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов. Написать только ответ недостаточно!
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. При стирании одной цифры трёхзначного числа получают двузначное число, которое в сумме с первоначальным трёхзначным числом даёт 221. Найти все такие трёхзначные числа.

2. Биссектриса, проведённая из вершины A острого угла прямоугольного треугольника ABC, пересекает катет BC в точке K. Биссектриса угла AKC пересекает гипотенузу AC в точке L. Найти величины острых углов треугольника ABC, если $|AB| = |AL|$.

3. В ремонтной мастерской было 35 сломанных сапог. Из них у 16-ти нужно было поменять молнию, у 17-ти заменить набойки, а у 18-ти подклеить подошву, причём каждый сапог имел хотя бы один из перечисленных недостатков. Сапог, у которых нужно было только поменять молнию и набойки, среди них было 4. Сапог, у которых нужно было только поменять молнию и подклеить подошву, было 3, а сапог, у которых нужно было только поменять набойки и подклеить подошву, было 5. Сколько в ремонтной мастерской было таких сапог, у которых нужно было поменять молнию и набойки, а также подклеить подошву?

LVII Олимпиада Эстонии по математике

6 февраля 2010 г. Региональный тур **9 класс**

II часть. *Время, отводимое для решения: 4 часа.*
Решения задач написать на отдельном листе.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов. Написать только ответ недостаточно!
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Свою новую книгу учёный писал со средней скоростью 6 страниц в день. Затем книгу нужно было также редактировать, из-за чего средняя скорость изготовления книги упала до 4,5 страниц в день. Найти среднюю скорость редактирования книги, если известно, что в ходе редактирования число страниц книги не изменилось.

2. Высота, проведённая к гипотенузе прямоугольного треугольника, делит гипотенузу на две части, разность длин которых равна длине одного из катетов. Найти величины острых углов этого прямоугольного треугольника.

3. Найти все остатки, которые при делении на число 32 может дать квадрат чётного числа, не делящегося на 4.

4. Белоснежка вернулась домой и увидела, что у камина сидит злая мачеха и кушает яблоко. Белоснежка спросила у гномов, кто открыл мачехе дверь, и кто дал ей яблоко. На этот вопрос гномы дали следующие ответы.

Весельчак: „Дверь открыл Ворчун, а яблоко дал Засоня.“
Ворчун: „Дверь открыл Простак, а яблоко дал я.“
Простак: „Я дверь не открывал, яблоко дал Засоня.“
Засоня: „Дверь открыл Весельчак и он же дал яблоко.“

Известно, что в ответе одного гнома оба высказывания правдивы, в ответе другого гнома оба высказывания ложны, а в ответах остальных двух гномов одно высказывание правдиво, а другое ложно.

Кто в действительности открыл мачехе дверь и кто дал ей яблоко?

LVII Олимпиада Эстонии по математике

6 февраля 2010 г. Региональный тур **10 класс**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Объём прямоугольного параллелепипеда равен 72 см^3, а площади его граней различной величины относятся друг к другу как $2:3:4$. Найти длины рёбер этого параллелепипеда.

2. Найти действительные решения уравнения

$$\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+1}=\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}.$$

3. Доказать, что для любых действительных чисел x и y имеет место неравенство

$$x^2+y^2\geqslant\frac{3}{2}xy\,.$$

Для каких пар $(x,\ y)$ имеет место равенство?

4. Пусть C – середина отрезка AB. Отрезок AB является основанием равнобедренного треугольника ADB, а отрезки AC и BC являются соответственно основаниями равнобедренных треугольников AEC и BFC, причём $|AD|=|BD|=|AE|=|EC|=|BF|=|FC|$. Доказать, что сумма величин углов AEC и BFC меньше величины угла ADB.

5. Доказать, что для каждого целого числа $n\geqslant 3$ найдётся такое n-значное число, которое является квадратом целого числа и при добавлении в его начало цифры 1 также получится квадрат некоторого целого числа.

6. На игровом поле размером $n\times n$ клеток Юра и Миша играют по следующим правилам. Первоначально все клетки игрового поля пусты. За один ход игрок добавляет на игровое поле 1, 2 или 4 фишки, причём на каждой клетке может быть только одна фишка. Ходят поочереди, начинает Юра. Выигрывает тот игрок, кто поставит фишку на последнюю пустую клетку игрового поля. Кто из игроков может выиграть независимо от игры противника, если

а) $n=6$;

б) $n=8$?

LVII Олимпиада Эстонии по математике

6 февраля 2010 г. Региональный тур **11 класс**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Число $\sqrt{5} \cdot \sqrt[4]{6}$ больше или меньше числа 3,5?

2. Походная тропа является кругом длиной 6 км. Одновременно два туриста из одного и того же начального пункта, но в разных направлениях, пошли по тропе. Пройдя 2 км, один из туристов остановился на полчаса, чтобы перекусить, и через 4 минуты после продолжения похода встретился со вторым туристом. Больше ни один из туристов остановок не делал, и всё время своего движения оба шли с постоянной скоростью. Найти скорости туристов, если они одновременно вернулись в начальный пункт.

3. Доказать, что для каждого натурального числа $n > 2$ найдётся такое простое число $p < n$, на которое число n не делится.

4. а) Найдётся ли для каждого треугольника такая окружность, которая пересечёт каждую из его сторон в двух точках так, что образующиеся три хорды будут равной длины?

б) Найдётся ли для каждого четырёхугольника такая окружность, которая пересечёт каждую из его сторон в двух точках так, что образующиеся четыре хорды будут равной длины?

5. Пусть x и y такие положительные действительные числа, что $x + y = 1$. Доказать, что имеет место неравенство

$$\left(\frac{1}{x^2} - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{y^2} - 1\right) \geqslant 9 .$$

6. Победители телеигр „Кто хочет стать суперзвездой“, „Фабрика суперзвёзд“ и „Отчаянные суперзвёзды“ стали соревноваться друг с другом в передаче „Испытание суперзвёзд“. В каждом конкурсе этой передачи все три суперзвезды упорядочили по результатам, причём равных результатов в одном конкурсе быть не могло. Итоговым результатом участника стала разница между количеством занятых им первых мест и последних мест во всех конкурсах. Оказалось, что победитель передачи „Кто хочет стать суперзвездой“ опередил победителя „Фабрики суперзвёзд“ в 20 конкурсах, а победителя „Отчаянных суперзвёзд“ в 10 конкурсах, но при этом итоговый результат всех суперзвёзд оказался одинаковым. Сколько конкурсов было всего проведено?

LVII Олимпиада Эстонии по математике

6 февраля 2010 г. Региональный тур **12 класс**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Найти действительные решения уравнения

$$4^x + 1 = 2^{x-1} + 2^{x+1}.$$

2. Пусть a такое положительное действительное число, при котором точки пересечения с осями координат касательных, проведённых к графику функции $y = \frac{1}{x}$ в точке $x = a$ и к графику функции $y = -\frac{1}{x}$ в точке $x = -a$, являются вершинами равностороннего треугольника. Найти a.

3. Для положительного целого числа n обозначим $S(n) = n + n^2 + n^3 + n^4 + n^5 + n^6$.

а) Доказать, что $S(n)$ делится на 6 при любом положительном целом числе n.

б) При каких положительных целых числах n число $S(n)$ делится на 12?

4. Пусть $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ ja $\vec{d} = \vec{b} + \vec{c}$, причём длины векторов $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$ равны. Найти величину угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

5. Обозначим через $\lfloor a \rfloor$ целую часть действительного числа a, то есть наибольшее целое число, не превышающее число a.

а) Найти все решения уравнения $\lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 3x \rfloor + \lfloor 4x \rfloor + \lfloor 5x \rfloor + \lfloor 6x \rfloor = 2010$.

б) Доказать, что уравнение $\lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 3x \rfloor + \lfloor 4x \rfloor + \lfloor 5x \rfloor + \lfloor 6x \rfloor + \lfloor 7x \rfloor = 2010$ не имеет решений.

6. На числовой оси обозначают n различных целых чисел. Затем выбирают такой комплект отрезков числовой оси с целочисленными конечными точками, чтобы каждое обозначенное целое число принадлежало хотя бы одному выбранному отрезку (в том числе оно может быть конечной точкой этого отрезка). Доказать, что сумма длин выбранных отрезков не меньше $\frac{n}{2}$.

Eesti LVII matemaatikaolümpiaad

6. veebruar 2010 Piirkonnavoor **7. klass**

I osa vastused

1. $1:20$
2. $-\frac{1}{6}$
3. 2211
4. 6
5. 21
6. 80°
7. 18 pindalaühikut
8. kolmnurga tipud on punktides $(-3;1)$, $(-2;-2)$ ja $(4;0)$
9. $(\pi - 1)\ \mathrm{cm}^2$
10. 60 cm

Lahendused

1. Arv a on $\frac{2000\%}{100\%} = 20$ korda suurem arvust b, seega $b:a = 1:20$.

2. Et $-\frac{1}{3} < -\frac{1}{4} < -\frac{1}{6} < \frac{1}{7} < \frac{1}{5}$, siis suuruse järjestuses keskmisel kohal on arv $-\frac{1}{6}$.

3. Aastaarvu kahest esimesest numbrist moodustuv arv peab olema paaris ja suurem kui 20 (sest kahe esimese numbriga on ka kaks viimast numbrit üheselt määratud, mistõttu 20 korral on 2010 ainus sellise omadusega aastaarv). Vähim selline arv on 22, mis annab aastaarvuks 2211.

4. Et $600 = 6 \cdot 100$ ja $100 = 10^2$, siis tuleb arvu 600 korrutada niisuguse arvuga k, et $k \cdot 6 = m^2$, kus m on mingi täisarv. Lihtne kontroll näitab, et $1 \cdot 6 = 6$, $2 \cdot 6 = 12$, $3 \cdot 6 = 18$, $4 \cdot 6 = 24$ ja $5 \cdot 6 = 30$ ei ole täisarvude ruudud, ent $6 \cdot 6 = 36 = 6^2$ ja $6 \cdot 600 = 3600 = 60^2$.

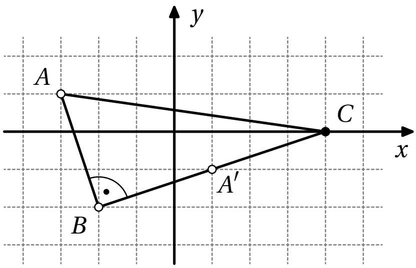
5. Iga otsitav ristkülik peab sisaldama täpselt üht arvudest 2, 4, 6, 8 ja 10. Järgmises tabelis on näidatud eri suurusega sobivate ristkülikute arvud igaühe jaoks neist.

Arv	1 × 1	1 × 2	1 × 3	Kokku
2	1	3	1	5
4	1	3	1	5
6	1	2	0	3
8	1	3	1	5
10	1	2	0	3
Kokku	5	13	3	21

6. Võrdhaarsest kolmnurgast DCE saame, et $\angle DCE = 180^\circ - 2\angle CED = 130^\circ$, kust $\angle BCA = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$. Võrdhaarsest kolmnurgast BAC saame nüüd, et $\angle BAC = 180^\circ - 2\angle BCA = 80^\circ$.

7. Kogu ruudustiku pindala on $5 \cdot 6 = 30$ ja kummagi värvimata kolmnurga pindala on $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 6 = 6$, kust tumedaks värvitud tähe N pindala on $30 - 2 \cdot 6 = 18$ pindalaühikut.

8. Pöörates punkti A 90° võrra ümber keskpunkti B, saame punkti $A'(1;-1)$. Kolmnurga tipp C peab niisiis paiknema sirge BA' lõikepunktis x-teljega, kust leiame, et $C(4;0)$.



Joonis 1

9. Ringi pindala on $\pi \cdot 2^2 = 4\pi$ ruutsentimeetrit ja kõõlude OA ja OB vahele jääva veerandringi pindala seega π cm^2. Et kolmnurga BOC pindala on $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 = 1$ ruutsentimeetrit, siis värvitud kujundi pindala on $(\pi - 1)$ cm^2.

10. Olgu ruudu küljepikkus x sentimeetrit. Horisontaalsetest külgedest näeme, et x peab jaguma arvudega 5 ja 3; vertikaalsetest külgedest näeme, et x peab jaguma ka 4-ga. Et arvud 3, 4 ja 5 on paarikaupa ühistegurita, peab x jaguma nende korrutisega $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$, st $x \geqslant 60$.

Eesti LVII matemaatikaolümpiaad

6. veebruar 2010 Piirkonnavoor **8. klass**

I osa vastused

1. d

2. 1098

3. 11

4. 15

5. 36°

6. 360°

7. $90\ \mathrm{cm}^2$

8. trapetsi tipud on punktides $(-3;-1)$, $(1;3)$, $(5;3)$, $(-3;-5)$

9. $(14\pi + 6)$ cm

10. 120 cm

Lahendused

1. Et arvud a, b, c ja e on kõik väiksemad kui 1, kuid $d = \dfrac{4}{3} > 1$, siis d on neist arvudest suurim.

2. Kui otsitava 2010-st väiksema aastaarvu esimene number oleks 2, siis saaks teine number olla ainult 0 ja kolmas number peaks olema vähemalt 1, seega sellist 2010-st väiksemat aastaarvu ei leidu. Otsitava arvu esimene number on seega 1 ja teine number saab olla ainult 0. Et arv oleks võimalikult suur, võtame kolmandaks numbriks 9, siis neljas number saab olla ülimalt 8.

3. Et arvu 2520 viimane number on 0, siis jagub ta 5 ja 10-ga. Et tema numbrite summa on 9, siis jagub ta ka 3 ja 9-ga. Paneme veel tähele, et $2520 = 8 \cdot 315 = 7 \cdot 360$ ning jaguvusest 8-ga järeldub ka jaguvus 2 ja 4-ga, jaguvusest 2-ga ja 3-ga aga järeldub jaguvus 6-ga. Seega jagub arv 2520 kõigi 11-st väiksemate positiivsete täisarvudega; arvuga 11 ta aga ei jagu, sest $2520 = 229 \cdot 11 + 1$.

4. Iga otsitav ristkülik peab sisaldama täpselt üht arvudest 1, 4 ja 9. Järgmises tabelis on näidatud eri suurusega sobivate ristkülikute arvud igaühe jaoks neist.

Arv	1×1	1×2	1×3	2×2	2×3	Kokku
1	1	1	1	0	0	3
4	1	2	1	1	0	5
9	1	2	2	1	1	7
Kokku	3	5	4	2	1	15

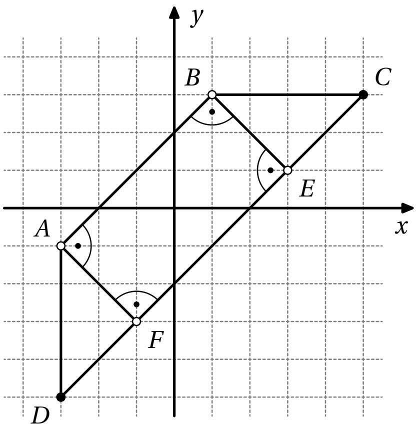
5. Olgu otsitav nurk x, siis tema kõrvunurk on $4x$ ja võrdusest $x + 4x = 180^\circ$ leiame, et $x = 36^\circ$.

6. Iga kaarekesega märgitud nurga suurus on $360^\circ - 60^\circ - 2 \cdot 90^\circ = 120^\circ$ ning nende summa on seega $3 \cdot 120^\circ = 360^\circ$.

7. Kolmnurga ACD pindala moodustab poole sama aluse ja kõrgusega ristküliku $ACEF$ pindalast. Viisnurga $ABCEF$ pindala on niisiis

$$S_{ABC} + S_{ACEF} = S_{ABC} + 2 \cdot S_{ACD} = 3 \cdot S_{ABC} = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |BC| = 90 \text{ cm}^2 .$$

8. Paneme tähele, et $\angle ABE = 90^\circ$, ja leiame punkti F nii, et $ABEF$ on ristkülik. Siis $F(-1;-3)$ (vt joonist 2) ning trapetsi tippude C ja D leidmiseks tuleb pikendada lõiku EF poole tema pikkuse võrra vastavalt üle otspunkti E ja üle otspunkti F. Niiviisi leiame, et $C(5;3)$ ja $D(-3;-5)$.



Joonis 2

9. Suure ringi ümbermõõt on $2\pi \cdot 6 = 12\pi$ sentimeetrit. Et kõõlude OA ja OB vahele jääva sektori kaar moodustab $\frac{30^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{12}$ kogu ringjoonest, siis ringjoone ülejäänud osa pikkus on $\frac{11}{12} \cdot 12\pi = 11\pi$ sentimeetrit. Väikese poolringjoone pikkus on $\frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot 3 = 3\pi$ sentimeetrit ja raadiuse OB pikkus on 6 cm, seega värvitud kujundi koguümbermõõt on $11\pi + 3\pi + 6 = 14\pi + 6$ sentimeetrit.

10. Olgu ruudu küljepikkus x sentimeetrit. Horisontaalsetest külgedest näeme, et $\frac{x}{2}$ peab jaguma arvudega 2 ja 4; vertikaalsetest külgedest näeme, et $\frac{x}{2}$ peab jaguma ka 3-ga ja 5-ga. Et arvud 3, 4 ja 5 on paarikaupa ühistegurita, peab $\frac{x}{2}$ jaguma nende korrutisega $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$, kust $x \geqslant 120$.

Eesti LVII matemaatikaolümpiaad

6. veebruar 2010 Piirkonnavoor **9. klass**

I osa vastused

1. 3
2. 72
3. 2010
4. 24
5. 160°
6. 70°
7. 1440°
8. $(-2; 3)$
9. $36\ \mathrm{cm}^2$
10. $240\ \mathrm{cm}^3$

Lahendused

1. Et iga numbriga 0 lõppev arv jagub 2-ga, siis piisab leida, millal saadav arv jagub 9-ga. Selleks peab tema numbrite summa jaguma 9-ga, st arv 2010, mille numbrite summa on 3, tuleb järjest kirjutada vähemalt 3 korda.

2. Et $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 2 \cdot 5 \cdot 72$ ja $6^3 = 6 \cdot 36 = 3 \cdot 72$, siis jaguvad mõlemad antud arvud 72-ga. Kuna ülejäävad kordajad $2 \cdot 5 = 10$ ja 3 on ühistegurita, siis ongi 72 antud arvude suurim ühistegur.

3. Et $2009 \cdot 2011 = (2010-1) \cdot (2010+1) = 2010^2 - 1$, siis $n = 2010$.

4. Iga otsitav ristkülik peab sisaldama täpselt üht arvudest 3, 6 ja 9. Järgmises tabelis on näidatud eri suurusega sobivate ristkülikute arvud igaühe jaoks neist.

Arv	1×1	1×2	1×3	1×4	1×5	2×2	Kokku
3	1	3	3	2	1	1	11
6	1	2	1	0	0	1	5
9	1	3	2	1	0	1	8
Kokku	3	8	6	3	1	3	24

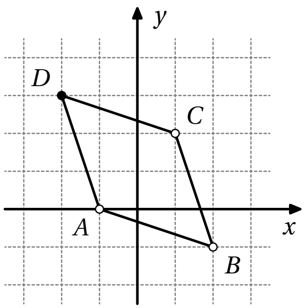
5. Olgu alusnurga suurus x, siis tipunurga suurus on $\frac{1600\%}{100\%} \cdot x = 16x$. Võrdusest $2x + 16x = 180^\circ$ leiame nüüd, et $x = 10^\circ$ ja tipunurga suuruseks saame $16x = 160^\circ$.

6. Et nurk BDC on kõõlule BC toetuv piirdenurk ja nurk BOC samale kõõlule toetuv kesknurk, siis $\angle BOC = 2\angle BDC = 60^\circ$ ning

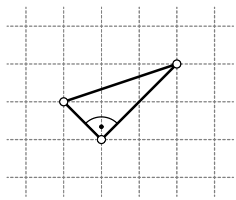
$$\angle COD = 180^\circ - \angle AOB - \angle BOC = 180^\circ - 50^\circ - 60^\circ = 70^\circ .$$

7. Liites kaarekesega märgitud nurkadele kahe joonisel oleva kolmnurga sisenurgad, saame kokku $5 \cdot 360^\circ = 1800^\circ$. Kaarekesega märgitud nurkade summa on niisiis $1800^\circ - 2 \cdot 180^\circ = 1440^\circ$.

8. Tähistame $A(-1;0)$, $B(2;-1)$ ja $C(1;2)$ (vt joonist 3), siis lõigud AB ja BC on ühepikkused ja lõik AC on neist lühem (viimase väite põhjenduseks vt joonisel 4 kujutatud täisnurkset kolmnurka, mille hüpotenuus ja kaatet on vaadeldavate lõikudega sama pikad). Seega peab rombi neljas tipp D paiknema tipu B vastas, st tema ainus võimalik asukoht on $D(-2;3)$.



Joonis 3



Joonis 4

9. Et $|CN| = 2|NB|$, siis kolmnurga CNP pindala on kaks korda suurem kolmnurga BNP pindalast (sest nende tipust P tõmmatud kõrgused on võrdsed). Analoogiliselt saame, et kolmnurga AMP pindala on kaks korda suurem kolmnurga BMP pindalast. Niisiis on kolmnurga ABC selle osa pindala, mis jääb nelinurgast $PMBN$ väljapoole, kaks korda suurem nelinurga $PMBN$ pindalast, ning kolmnurga ABC kogupindala on kolm korda suurem nelinurga $PMBN$ pindalast, st $3 \cdot 12 = 36$ ruutsentimeetrit.

10. Olgu risttahuka servapikkused joonisel kasvavas järjestuses x, y ja z sentimeetrit. Näeme, et x peab jaguma 2-ga ja 4-ga, y peab jaguma 2-ga ja 3-ga ning z peab jaguma 2-ga ja 5-ga. Et $\text{VÜK}(2,4) = 4$, $\text{VÜK}(2,3) = 6$ ja $\text{VÜK}(2,5) = 10$, siis on vähim võimalik ruumala $4 \cdot 6 \cdot 10 = 240$ kuupsentimeetrit.

Eesti LVII matemaatikaolümpiaad

6. veebruar 2010 Piirkonnavoor **7. klass**

II osa lahendused

1. *Vastus:* ainus selline kolmik on 22, 979 ja 1001.

Lahendus 1. Et kolmekohaline arv on väiksem kui 1000 ja kahekohaline arv on väiksem kui 100, siis nende summa on väiksem kui 1100, st neljakohaline arv peab algama numbritega 1 ja 0. Sümmeetriatingimuse tõttu on see arv siis 1001. Samuti näeme siit, et kolmekohalise arvu esimene (ja järelikult ka viimane) number peab olema 9. Seega peab kahekohalise arvu viimane number olema 2, st sümmeetriatingimuse tõttu peab see arv olema 22. Lõpuks leiame, et kolmekohaline arv saab olla vaid $1001 - 22 = 979$.

Lahendus 2. Sümmeetriatingimuse tõttu peavad otsitavad arvud olema vastavalt kujul $\overline{aa}$, $\overline{bcb}$ ja $\overline{deed}$, kus a, b, c, d, e on mingid numbrid. Vastavalt ülesandes antule $\overline{aa} + \overline{bcb} = \overline{deed}$. Et kahekohaline arv on väiksem kui 100 ja kolmekohaline arv on väiksem kui 1000, siis nende summa on väiksem kui 1100, st ainus võimalus on $d = 1$ ja $e = 0$. Samuti näeme siit, et peab olema $b = 9$. Nüüd leiame, et $a = 2$, sest talle 9 liitmisel on summa viimaseks numbriks 1. Tehtest $1001 - 22 = 979$ saame lõpuks, et $c = 7$.

2. *Vastus:* a) 1,25 m; b) 75%.

a) Et 1 dm^3 vett kaalub 1 kg ja 2 t = 2000 kg, siis ühe tsisternitäie maht on $2000\ dm^3 = 2\ m^3$. Kolm tsisternitäit on niisiis kokku 6 m^3 vett ning veepaagi ruumala on seega $6 \cdot \frac{100\%}{80\%} = 7{,}5$ kuupmeetrit ja tema kõrgus on $\frac{7{,}5}{2 \cdot 3} = 1{,}25$ meetrit.

b) Kolme tsisternitäie järel jäi veepaagist täitmata $7{,}5 - 6 = 1{,}5$ kuupmeetrit, seega neljandast tsisternitäiest on vaja lisada 1,5 m^3 vett, mis moodustab tsisterni mahust $\frac{1{,}5}{2} \cdot 100\% = 75\%$.

3. *Vastus:* parimast alustades on järjestus Ants, Toomas, Peeter ja Jüri.

Et Jüri ja Toomase ennustused on teineteist eitavad, siis üks neist on tõene ja teine väär. Kuna tõeseid ennustusi on täpselt üks, siis on Peetri ennustus kindlasti väär, mis tähendab, et Jüri sai neist neljast kõige vähem punkte. Seega on ülesande tingimuse kohaselt Jüri ennustus väär ja Toomase oma järelikult tõene, st Toomas sai vähem punkte kui Ants. Et samuti peab olema väär Antsu ennustus, siis Peeter ei ole kahe parema hulgas, st kaks paremat peavad olema Ants ja Toomas ning Peetri punktisumma on seega kolmandal kohal.

II osa lahendused

1. *Vastus:* ainus selline arv on 201.

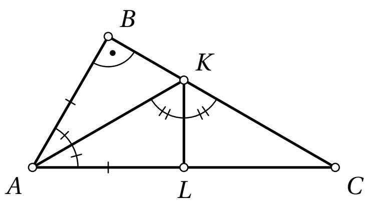
Olgu vaadeldav kolmekohaline arv $\overline{abc} = 100a + 10b + c$. Olenevalt sellest, milline number sellest kustutati, saame kolm võimalust: $\overline{abc} + \overline{ab} = 221$, $\overline{abc} + \overline{ac} = 221$ või $\overline{abc} + \overline{bc} = 221$. Kahel viimasel juhul oleks summa üheliste numbriks arvu $c + c = 2c$ viimane number, st paarisnumber — seega ei ole need juhud võimalikud. Niisiis ainsa võimalusena

$$221 = \overline{abc} + \overline{ab} = (100 + 10)a + (10 + 1)b + c = 11 \cdot (10a + b) + c\,,$$

kus $0 \leqslant c \leqslant 9$. Et $221 = 11 \cdot 20 + 1$, siis ainsaks võimaluseks on $c = 1$ ja $10a + b = 20$, kust $a = 2$, $b = 0$ ja otsitav kolmekohaline arv on 201.

2. *Vastus:* 30° ja 60°.

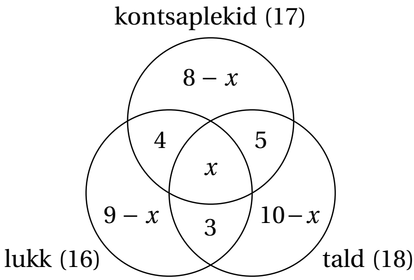
Lahendus 1. Et kolmnurkadel ABK ja ALK on ühine külg AK ning kehtivad võrdused $|AB| = |AL|$ ja $\angle BAK = \angle LAK$ (vt joonist 5), siis on need kolmnurgad võrdsed ning $\angle ALK = \angle ABK = 90^\circ$. Niisiis on kolmnurgas AKC tipust K tõmmatud nurgapoolitaja ühtlasi kõrguseks, st kolmnurk AKC on võrdhaarne ja $\angle ACB = \angle ACK = \angle CAK = \frac{1}{2}\angle CAB$. Seega $3\angle ACB = \angle ACB + \angle CAB = 90^\circ$, kust $\angle ACB = 30^\circ$ ja $\angle CAB = 60^\circ$.



Joonis 5

Lahendus 2. Samuti nagu eelmises lahenduses näitame, et kolmnurgad ABK ja ALK on võrdsed ning $\angle ALK = 90^\circ$. Kolmnurkade ABK ja ALK võrdsusest saame, et $\angle BKA = \angle AKL = \angle LKC$, kust $\angle LKC = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$. Täisnurksest kolmnurgast KLC saame nüüd, et $\angle LCK = 90^\circ - \angle LKC = 30^\circ$, ning seega $\angle CAB = 90^\circ - \angle ACB = 90^\circ - \angle LCK = 60^\circ$.

3. *Vastus:* 2.



Joonis 6

Olgu x otsitav saabaste arv, millel tuli vahetada lukk ja kontsaplekid ja ka talda liimida. Siis 16 saapa hulgas, millel tuli vahetada lukk, sisalduvad nii need x saabast kui ka need 4 saabast, millel oli vaja ainult vahetada lukk ja kontsaplekid, ning need 3 saabast, millel oli vaja ainult vahetada lukk ja talda liimida. Seega saapaid, millel oli vaja ainult vahetada lukk, oli $16 - x - 4 - 3 = 9 - x$. Analoogiliselt arutledes leiame, et saapaid, millel oli vaja ainult vahetada kontsaplekid, oli $17 - x - 4 - 5 = 8 - x$ ning saapaid, millel oli vaja ainult talda liimida, oli $18 - x - 3 - 5 = 10 - x$ (vt joonist 6). Et igal paranduses oleval saapal oli vaja teha vähemalt üht kolmest, siis saame võrrandi

$$35 = x + 4 + 3 + 5 + (9 - x) + (8 - x) + (10 - x)$$

ehk $35 = 39 - 2x$, kust leiame, et $x = 2$.

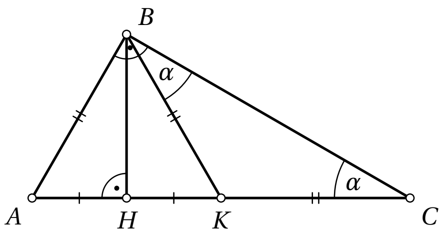
II osa lahendused

1. *Vastus:* 18 lehekülge päevas.

   Lahendus 1. Olgu raamatu lehekülgede arv L. Siis kirjutamisele kulus $\frac{L}{6}$ päeva ning kirjutamisele ja toimetamisele kokku $\frac{L}{4{,}5}$ päeva. Järelikult toimetamine võttis aega $\frac{L}{4{,}5} - \frac{L}{6} = \frac{4L-3L}{18} = \frac{L}{18}$ päeva, st toimetamise keskmine kiirus oli 18 lehekülge päevas.

   Lahendus 2. Olgu raamatu lehekülgede arv L ning kirjutamisele ja toimetamisele kulunud aeg vastavalt k ja t päeva. Siis ülesande tingimustest saame, et $6k = L = 4{,}5(k+t)$, kust $1{,}5k = 4{,}5t$ ehk $k = 3t$. Seega kulus kirjutamisele 3 korda rohkem aega kui toimetamisele, ehk teisisõnu, toimetamise keskmine kiirus oli kirjutamise keskmisest kiirusest 3 korda suurem. Toimetamise keskmine kiirus oli niisiis $3 \cdot 6 = 18$ lehekülge päevas.

2. *Vastus:* 30° ja 60°.



Joonis 7

Olgu ABC täisnurkne kolmnurk täisnurgaga tipu B juures ja BH selle kolmnurga kõrgus. Üldisust kitsendamata olgu $|AB| \leqslant |BC|$. Valime hüpotenuusil AC punkti $K \neq A$ nii, et $|AH| = |HK|$ (vt joonist 7), siis vastavalt ülesande tingimusele $|AB| = |HC| - |AH|$, ehk $|AB| = |HC| - |HK| = |KC|$ (võrdus $|BC| = |HC| - |AH|$ ei ole võimalik, sest $|BC| > |HC|$). Kuna kolmnurga ABK kõrgus BH on ühtlasi ka mediaaniks, siis kolmnurk ABK on võrdhaarne ja $|AB| = |BK|$. Seega ka kolmnurk BKC on võrdhaarne. Olgu $\angle KCB = \angle KBC = \alpha$, siis $\angle BKA = \angle BAK = 90^\circ - \alpha$ ja $\angle ABK = \angle ABC - \angle KBC = 90^\circ - \alpha$. Seega on ABK võrdkülgne kolmnurk, kust $\angle BAC = 60^\circ$ ja järelikult $\angle BCA = 30^\circ$.

3. *Vastus:* ainus võimalik jääk on 4.

Lahendus 1. Iga paarisarv x, mis ei jagu 4-ga, annab 4-ga jagamisel jäägi 2, st esitub kujul $4k+2$ mingi täisarvu k korral. Siis

$$x^2 = (4k+2)^2 = 16k^2 + 16k + 4 = 16k(k+1) + 4\ .$$

Et arvudest k ja $k+1$ on üks paaris, siis $k(k+1)$ jagub 2-ga ning $16k(k+1)$ jagub arvuga $16 \cdot 2 = 32$. Seega arv x^2 annab 32-ga jagamisel jäägi 4.

Lahendus 2. Olgu x suvaline 4-ga mittejaguv paarisarv, siis nii $x-2$ kui ka $x+2$ jaguvad 4-ga. Et need on järjestikused 4-ga jaguvad arvud, siis üks neist jagub 8-ga. Seega arv $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$ jagub arvuga $4 \cdot 8 = 32$, ehk x^2 annab 32-ga jagamisel jäägi 4.

Lahendus 3. Olgu x suvaline 4-ga mittejaguv paarisarv, siis $\frac{x}{2}$ on paaritu täisarv. Seega arv $\frac{x^2}{4} = \left(\frac{x}{2}\right)^2$ annab 8-ga jagamisel jäägi 1 ning järelikult x^2 annab arvuga $4 \cdot 8 = 32$ jagamisel jäägi 4.

Lahendus 4. Et 4-ga mittejaguvad paarisarvud on parajasti arvud kujul $4k+2$, kus k on mingi täisarv. siis on nad kõik üksteisest saadavad 4 korduva liitmise-lahutamise teel. Olgu x üks selline arv, siis $(x+4)^2 = x^2+8x+16$. Et x jagub 2-ga, kuid mitte 4-ga, siis $8x$ jagub 16-ga, kuid mitte 32-ga, st annab 32-ga jagades jäägi 16, ning arv $8x+16$ jagub 32-ga. Seega $(x+4)^2$ annab 32-ga jagades sama jäägi nagu arv x^2. Järelikult annavad kõigi 4-ga mittejaguvate paarisarvude ruudud 32-ga jagades ühe ja sama jäägi. See jääk on 4, sest arv $2^2 = 4$ annab 32-ga jagades jäägi 4.

4. *Vastus:* ukse avas Õnneseen ja õuna andis Unimüts.

Esitame pöialpoiste väited tabelina.

Vastaja	Ukse avas	Õuna andis
Õnneseen	Toriseja	Unimüts
Toriseja	Ninatark	Toriseja
Ninatark	mitte Ninatark	Unimüts
Unimüts	Õnneseen	Õnneseen

Lahendus 1. Paneme tähele, et kui Õnneseene mõlemad vastused oleksid tõesed, siis nii Toriseja kui ka Unimütsi mõlemad vastused oleksid väärad, mis on vastuolus ülesande tingimustega. Samuti näeme, et kui Toriseja mõlemad vastused oleksid tõesed, siis oleksid Õnneseenel ja Unimütsil mõlemad vastused väärad, ning kui Unimütsi mõlemad vastused oleksid tõesed, siis oleksid Õnneseenel ja Torisejal mõlemad vastused väärad.

Järelikult andis kaks tõest vastust Ninatark, st õuna andis Unimüts ja Ninatark ust ei avanud. Seega Toriseja mõlemad vastused on väärad ning Õnneseenel ja Unimütsil peab nüüd olema kummalgi üks tõene ja teine väär vastus. Kuna Unimütsi vastus õuna kohta on väär, siis peab tema vastus ukse kohta olema tõene, st ukse avas Õnneseen.

Lahendus 2. Näeme, et kummaski vastuste veerus ei saa kolm vastust olla tõesed. Et kahe veeru peale kokku on tõeseid vastuseid neli, siis peab neid kummaski veerus olema kaks — siit näeme, et õuna andis Unimüts. Kui ukse avanuks Ninatark, siis oleks selle veeru vastustest ainult üks tõene — järelikult Ninatark ust ei avanud ning tema vastused on mõlemad tõesed.

Teist tõest vastust ukse kohta ei saanud anda Toriseja. Kui selle oleks andnud Õnneseen, siis oleks kahel pöialpoisil mõlemad vastused tõesed, mis on vastuolus ülesande tingimustega. Järelikult teise tõese vastuse ukse kohta andis Unimüts, st ukse avas Õnneseen.

Lahendused

1. *Vastus:* 3 cm, 4 cm ja 6 cm.

Lahendus 1. Olgu risttahuka servade pikkused sentimeetrites a, b ja c, siis eri suurusega tahkude pindalad ruutsentimeetrites on ab, bc ja ca. Üldisust kitsendamata olgu $ab : bc : ca = 2 : 3 : 4$, siis $bc = \frac{3}{2} \cdot ab$ ja $ca = 2ab$, kust saame, et $c = \frac{3}{2} \cdot a$ ja $b = \frac{1}{2} \cdot c = \frac{3}{4} \cdot a$. Risttahuka ruumala kuupsentimeetrites on siis

$$72 = abc = \frac{9}{8} \cdot a^3 ,$$

kust $a^3 = 64$ ja $a = 4$. Eespool leitud seostest saame nüüd, et $c = 6$ ja $b = 3$.

Lahendus 2. Samuti nagu esimeses lahenduses olgu risttahuka servade pikkused sentimeetrites a, b ja c, nii et $ab : bc : ca = 2 : 3 : 4$. Siis eri suurusega tahkude pindalad ruutsentimeetrites on ab, bc ja ca ning nende korrutis (ehk risttahuka ruumala ruut) on

$$72^2 = (abc)^2 = ab \cdot bc \cdot ca = ab \cdot \frac{3}{2}ab \cdot 2ab = 3(ab)^3 ,$$

kust $(ab)^3 = 1728 = 12^3$ ja $ab = 12$. Nüüd $bc = \frac{3}{2}ab = 18$ ja $ca = 2ab = 24$, millest $c = \frac{abc}{ab} = \frac{72}{12} = 6$ ning analoogiliselt $a = \frac{72}{18} = 4$ ja $b = \frac{72}{24} = 3$.

2. *Vastus:* ainus lahend on $\frac{1}{2}$.

Lahendus 1. Liites võrduse kummalgi pool murrud, saame

$$\frac{(x+1)+(x-2)}{(x-2)(x+1)} = \frac{(x-1)+x}{x(x-1)} ,$$

ehk

$$\frac{2x-1}{(x-2)(x+1)} = \frac{2x-1}{x(x-1)} .$$

Kui $2x - 1 = 0$, siis $x = \frac{1}{2}$ ning kontrollimisel veendume, et see on tõepoolest lahend. Kui $2x-1 \neq 0$, siis peab kehtima võrdus $(x-2)(x+1) = x(x-1)$, millest lihtsustades saame ilmselt vastuolulise võrduse $-2 = 0$. Seega rohkem lahendeid ei ole.

Lahendus 2. Viies kõik liikmed vasakule poole ja liites murrud, saame

$$\frac{x(x^2-1)+x(x-1)(x-2)-(x-2)(x^2-1)-x(x-2)(x+1)}{x(x-2)(x^2-1)}=0\,. \qquad (1)$$

Selle murru lugeja saame esitada kujul

$$\big(x-(x-2)\big)(x^2-1)+\big((x-1)-(x+1)\big)x(x-2)=$$
$$=2(x^2-1-x^2+2x)=2(2x-1)\,,$$

kust näeme, et ainsaks lahendiks on $x=\frac{1}{2}$ (see on tõepoolest lahend, sest ei ole võrrandi (1) vasakul pool oleva murru nimetaja nullkoht).

3. *Vastus:* võrdus kehtib, kui $x=y=0$.

Lahendus 1. Tõestatav võrratus on samaväärne võrratusega

$$x^2-\frac{3}{2}xy+y^2\geqslant 0\,. \qquad (2)$$

mille saame esitada kujul

$$\left(x-\frac{3}{4}y\right)^2+\frac{7}{16}y^2\geqslant 0\,.$$

See võrratus kehtib alati, sest iga reaalarvu ruut on mittenegatiivne. Võrdus kehtib siin juhul, kui $x=\frac{3}{4}y$ ja $y=0$, ehk $x=y=0$.

Lahendus 2. Lahenduses 1 saadud võrratuse (2) võime kirjutada ka nii:

$$\frac{3}{4}(x-y)^2+\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}y^2\geqslant 0\,.$$

Ka see võrratus kehtib alati, sest iga reaalarvu ruut on mittenegatiivne. Võrdus kehtib siin juhul, kui $x-y=0$, $x=0$ ja $y=0$, st $x=y=0$.

Lahendus 3. Vaatleme võrratust

$$x^2-\frac{3}{2}xy+y^2\geqslant 0$$

ruutvõrratusena muutuja x suhtes, siis vastava ruutvõrrandi

$$x^2-\frac{3}{2}xy+y^2=0$$

diskriminant on $D=\frac{9}{16}y^2-4y^2=-\frac{55}{16}y^2$. Kui $y=0$, siis $D=0$ ja vaadeldaval ruutvõrrandil on üks lahend $x=0$. Kui aga $y\neq 0$, siis $D<0$ ja ruutvõrrandil lahendid puuduvad, st $x^2-\frac{3}{2}xy+y^2>0$ iga reaalarvu x korral. Seega tõestatav võrratus kehtib mis tahes reaalarvude x ja y korral. Võrdus kehtib, kui $y=0$ ja $x=0$.

Lahendus 4. Vaatleme eraldi juhte, kus $xy \geqslant 0$ ja $xy < 0$. Kui $xy \geqslant 0$, siis võrratusest $(x-y)^2 \geqslant 0$ saame, et

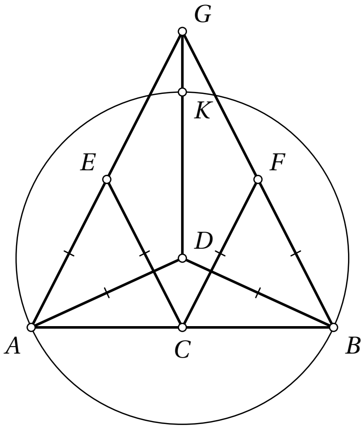
$$x^2 + y^2 \geqslant 2xy \geqslant \frac{3}{2}xy\,.$$

Kui aga $xy < 0$, siis

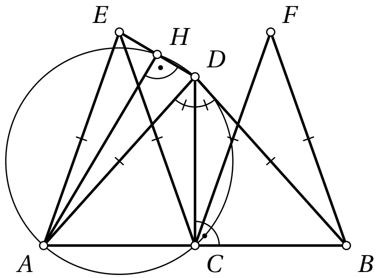
$$x^2 + y^2 > 0 > \frac{3}{2}xy\,.$$

Siit on näha, et võrdus saab kehtida ainult juhul, kui $xy \geqslant 0$ ja lisaks $x^2 + y^2 = 2xy = \frac{3}{2}xy$. Viimase ahela teine võrdus annab $xy = 0$, kust esimesse võrdusse asendades saame, et $x^2 + y^2 = 0$ ehk $x = y = 0$.

4. *Lahendus 1.* Üldisust kitsendamata eeldame, et punktid D, E ja F on ühel pool sirget AB. Olgu G kiirte AE ja BF lõikepunkt (vt joonist 8). Et kolmnurgad AEC ja CFB on võrdhaarsed ja võrdsed, siis AGB on nendega sarnane kaks korda suurem võrdhaarne kolmnurk ja $\angle AGB = \angle AEC = \angle CFB$ ning piisab tõestada, et $\angle AGB < \frac{1}{2}\angle ADB$. Selleks vaatleme ringjoont keskpunktiga D, mis läbib punkte A ja B, ning veendume, et punkt G asub väljaspool seda ringjoont — tõepoolest, kolmnurgast ADG saame, et $|AD| + |DG| > |AG| = 2|AE| = 2|AD|$, ehk $|DG| > |AD|$, kus $|AD|$ on vaadeldava ringjoone raadius. Olgu nüüd K lõigu DG lõikepunkt ringjoonega, siis $\angle AGB < \angle AKB = \frac{1}{2}\angle ADB$.



Joonis 8



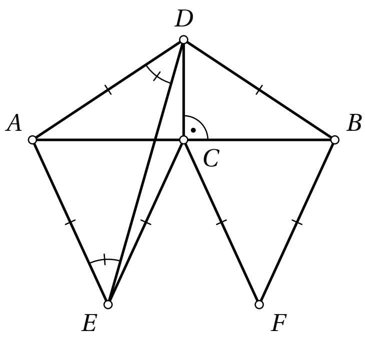
Joonis 9

Lahendus 2. Et kolmnurgad AEC ja CFB on võrdsed, siis $\angle AEC = \angle CFB$ ning piisab tõestada, et $\angle AEC < \frac{1}{2}\angle ADB$. Üldisust kitsendamata eeldame, et punktid D ja E on ühel pool sirget AB. Olgu c ringjoon diameetriga

AD. Et võrdhaarse kolmnurga alusele tõmmatud mediaan on ühtlasi kõrgus, siis $\angle ACD = 90^\circ$, mistõttu ringjoon c läbib punkti C. Analoogiliselt veendume, et ringjoon c läbib kolmnurga ADE tipust A tõmmatud kõrguse aluspunkti H (vt joonist 9). Et $|AD| = |AE|$, siis punkt H asub küljel DE (täpsemalt, on selle keskpunkt). See tähendab, et punkt E asub kõõlu DH pikendusel, ehk ringjoonest c väljaspool. Kuna punktid A, C, D on kõik ringjoonel c, siis $\angle AEC < \angle ADC$. Et võrdhaarse kolmnurga alusele tõmmatud mediaan poolitab tipunurga, siis $\angle ADC = \frac{1}{2}\angle ADB$, kust saamegi vajaliku väite.

Lahendus 3. Samuti nagu eelmises lahenduses veendume, et piisab tõestada võrratus $\angle AEC < \frac{1}{2}\angle ADB$. Üldisust kitsendamata eeldame, et punktid D ja E on erineval pool sirget AB (vt joonist 10). Et võrdhaarse kolmnurga alusele tõmmatud mediaan on ühtlasi tipunurga poolitaja ja kõrgus, siis $\frac{1}{2}\angle ADB = \angle ADC$ ning AD ja CD on vastavalt hüpotenuus ja kaatet täisnurkses kolmnurgas ACD, mistõttu $|CD| < |AD| = |CE|$. Kuna kolmnurga pikema külje vastas on suurem nurk, siis $\angle CDE > \angle CED$. Et $|AE| = |AD|$, siis $\angle ADE = \angle AED$ ning

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\angle ADB = \angle ADC = \angle ADE + \angle EDC = \angle AED + \angle EDC >\\ > \angle AED + \angle DEC = \angle AEC\,.\end{aligned}$$



Joonis 10

5. Iga täisarv $n \geqslant 3$ esitub kujul $n = 2k + 3$ või $n = 2k + 4$, kus $k \geqslant 0$ on mingi täisarv.

Paaritute arvude $n = 2k + 3$ jaoks paneme tähele, et $225 = 15^2$ ja $1225 = 35^2$.

Seega sobivad arvud kujul $225\underbrace{0\ldots0}_{2k}$, sest

$$225\underbrace{0\ldots0}_{2k} = 225\cdot10^{2k} = (15\cdot10^k)^2\ ,$$

ja

$$1225\underbrace{0\ldots0}_{2k} = 1225\cdot10^{2k} = (35\cdot10^k)^2\ .$$

Paarisarvude $n = 2k+4$ jaoks paneme tähele, et $5625=75^2$ ja $15625=125^2$. Seega sobivad arvud kujul $5625\underbrace{0\ldots0}_{2k}$, sest

$$5625\underbrace{0\ldots0}_{2k} = 5625\cdot10^{2k} = (75\cdot10^k)^2\ ,$$

ja

$$15625\underbrace{0\ldots0}_{2k} = 15625\cdot10^{2k} = (125\cdot10^k)^2\ .$$

Märkus. Lahenduses kasutatud arvude leidmiseks võib kasutada järgmist mõttekäiku. Olgu n-kohaline täisruut x^2 ja tema ette numbri 1 lisamisel saadud täisruut y^2; siis $y^2 - x^2 = 10^n$, kust $10^n = (y-x)(y+x)$. Proovides astendaja $n = 3$ jaoks järjest arvu 1000 tegurdusi, leiame sobivana $1000 = 20\cdot50$, sest süsteem võrranditest $y - x = 20$ ja $y + x = 50$ annab $x = 15$ ja $y = 35$. Proovides sarnaselt arvu 10000 tegurdusi astendaja $n = 4$ jaoks, leiame $10000 = 50\cdot200$ — süsteem võrranditest $y - x = 50$ ja $y + x = 200$ annab $x = 75$ ja $y = 125$.

6. *Vastus:* a) Miku; b) Juku.

a) Paneme tähele, et mängulaua ruutude arv $6^2 = 36$ (mis on ühtlasi vabade ruutude arv mängu algul) jagub 3-ga, aga ühel käigul lisatavate nuppude lubatud arvudest 1, 2, 4 ükski ei jagu 3-ga. Seega piisab Mikul tagada, et iga tema käigu järel vabade ruutude arv jagub 3-ga — siis Juku ei saa oma järgmisel käigul täita kõiki vabu ruute ning kuna vabade ruutude arv väheneb igal käigul, siis varem või hiljem Miku võidab. Selleks peab Miku käima nii, et Juku eelneva käigu ja tema käigu peale kokku lisatakse lauale 3-ga jaguv arv nuppe: kui Juku lisab 1 või 4 nuppu, siis Miku lisab 2 nuppu (see on võimalik, sest Juku käigu eel jagus vabade ruutude arv 3-ga ning Juku käigu järel on see järelikult kujul $3k+2$), ning kui Juku lisab 2 nuppu, siis Miku lisab 1 nupu.

b) Et $8^2 = 64 = 3\cdot21+1$, siis saab Juku võita, asetades avakäigul lauale 1 või 4 nuppu. Seejärel jagub vabade ruutude arv 3-ga ning edasi saab Juku kasutada a) osa lahenduses Miku jaoks kirjeldatud võitvat strateegiat.

Eesti LVII matemaatikaolümpiaad

6. veebruar 2010 Piirkonnavoor **11. klass**

Lahendused

1. *Vastus:* väiksem.

Küsimus on samaväärne sellega, kas $2 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt[4]{6}$ on suurem või väiksem arvust 7. Et $7^4 = 2401$ ja

$$\left(2 \cdot \sqrt[2]{5} \cdot \sqrt[4]{6}\right)^4 = 2^4 \cdot 5^2 \cdot 6 = 2400 < 2401\,,$$

siis $2 \cdot \sqrt[2]{5} \cdot \sqrt[4]{6} < 7$.

Märkus. Täpsemalt $\sqrt{5} \cdot \sqrt[4]{6} = 3{,}4996\ldots$.

2. *Vastus:* $6\,\dfrac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ ja $4\,\dfrac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$.

Olgu esimese matkaja kiirus x ja teisel y kilomeetrit tunnis. Siis kogu raja läbimiseks kulus esimesel matkajal $\dfrac{6}{x} + \dfrac{1}{2}$ tundi ja teisel $\dfrac{6}{y}$ tundi. Et alguspunkti tagasi jõudsid nad korraga, siis $\dfrac{6}{x} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{6}{y}$ ehk

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{y} - \frac{1}{12}\,. \tag{3}$$

Kohtumiskohani jõudmiseks kulus esimesel matkajal $\dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{15} = \dfrac{2}{x} + \dfrac{17}{30}$ tundi ja sinnamaani läbis ta $2 + \dfrac{x}{15}$ kilomeetrit. Teine matkaja läbis kuni kohtumiseni seega $6 - \left(2 + \dfrac{x}{15}\right) = 4 - \dfrac{x}{15}$ kilomeetrit ja kulutas selleks järelikult $\dfrac{4}{y} - \dfrac{x}{15y}$ tundi. Niisiis

$$\frac{2}{x} + \frac{17}{30} = \frac{4}{y} - \frac{x}{15y}\,. \tag{4}$$

Avaldades võrrandist (3) $\dfrac{2}{x} = \dfrac{2}{y} - \dfrac{1}{6}$ ja asendades selle võrrandisse (4) saame

$$\frac{2}{y} - \frac{1}{6} + \frac{17}{30} = \frac{4}{y} - \frac{x}{15y}\,,$$

ehk

$$\frac{2}{y} - \frac{x}{15y} = \frac{6}{15}.$$

Korrutades selle võrrandi pooli arvuga $15y$ leiame, et $30 - x = 6y$, ehk $x = 30 - 6y$. Asendades selle võrrandisse (3) saame

$$\frac{1}{30-6y} = \frac{1}{y} - \frac{1}{12} = \frac{12-y}{12y},$$

ehk $(5-y)(12-y) = 2y$, kust saame ruutvõrrandi $y^2 - 19y + 60 = 0$. Selle ruutvõrrandi lahenditeks on $y_1 = 4$ ja $y_2 = 15$, kust eespool leitud võrduse $x = 30 - 6y$ abil saame vastavalt $x_2 = 6$ ja $x_2 = -60$. Et kiirused peavad olema positiivsed, on ainsaks lahendiks $x = 6$ ja $y = 4$.

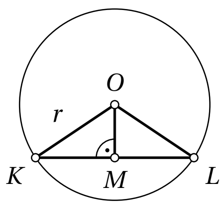
3. Olgu p arvu $n-1$ mingi algarvuline tegur (selline tegur p on olemas, sest $n-1 > 1$). Siis $1 < p < n$. Kui n jaguks arvuga p, siis ka vahe $n-(n-1) = 1$ jaguks arvuga p, mis ilmselt ei ole võimalik. Seega p on selline n-st väiksem algarv, millega n ei jagu.

4. *Vastus:* a) jah; b) ei.

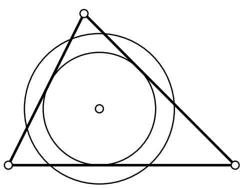
Vaatleme suvalist ringjoont keskpunktiga O ja raadiusega r. Olgu KL selle ringjoone mingi kõõl ja M kõõlu KL keskpunkt (vt joonist 11), siis täisnurksest kolmnurgast OMK leiame, et

$$|KL| = 2|KM| = 2\sqrt{|OK|^2 - |OM|^2} = 2\sqrt{r^2 - |OM|^2}.$$

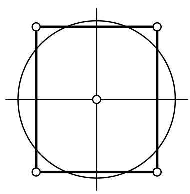
Seega kõõlu pikkus on määratud ringjoone keskpunkti kaugusega sellest kõõlust, mistõttu ülesandes kirjeldatud omadusega ringjoone keskpunkt peab asuma võrdsel kaugusel vaadeldava hulknurga kõigist külgedest.



Joonis 11



Joonis 12



Joonis 13

a) Kolmnurga korral on selline punkt kolmnurga siseringjoone keskpunkt ning seega on nõutava omadusega iga ringjoon, mille keskpunkt on kolmnurga siseringjoone keskpunktis ja raadius on suurem siseringjoone raadiusest, kuid väiksem kui siseringjoone keskpunkti kaugus kolmnurga lähimast tipust (vt joonist 12).

b) Näiteks ristküliku korral, mis ei ole ruut, sellist punkti ei leidu, sest iga punkt, mis on võrdsel kaugusel ristküliku kahest vastasküljest, paikneb ristküliku nende külgedega paralleelsel sümmeetriateljel — seega punkt, mis on võrdsel kaugusel ristküliku kõigist neljast küljest, saab olla üksnes ristküliku sümmeetriakeskpunkt. On aga ilmne, et ruudust erineva ristküliku sümmeetriakeskpunkt on selle ristküliku eri pikkusega külgedest erineval kaugusel (vt joonist 13).

5. *Lahendus 1.* Korrutades tõestatava võrratuse mõlemaid pooli positiivse arvuga x^2y^2, saame samaväärse võrratuse $(1-x^2)(1-y^2) \geqslant 9x^2y^2$, ehk $8x^2y^2 \leqslant 1-x^2-y^2$. Reaalarvu ruudu mittenegatiivsusest ja tingimusest $x+y=1$ saame, et

$$1=(x+y)^2=(x-y)^2+4xy \geqslant 4xy\,,$$

mistõttu

$$8x^2y^2=2xy\cdot 4xy \leqslant 2xy=(x+y)^2-x^2-y^2=1-x^2-y^2\,,$$

mida oligi tarvis tõestada.

Lahendus 2. Sarnaselt lahendusega 1 veendume, et tõestatav võrratus on samaväärne võrratusega $x^2+y^2+8x^2y^2 \leqslant 1$. Aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vahelisest võrratusest ja tingimusest $x+y=1$ saame, et $xy \leqslant \left(\frac{x+y}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$, ehk $4xy-1 \leqslant 0$. Seega tõepoolest

$$x^2+y^2+8x^2y^2=(x+y)^2+8x^2y^2-2xy=1+2xy\cdot(4xy-1) \leqslant 1\,.$$

Lahendus 3. Samuti nagu lahenduses 1 saame, et tõestatav võrratus on samaväärne võrratusega $(1-x^2)(1-y^2) \geqslant 9x^2y^2$. Vasakut poolt tegurdades ja asendades $1-x=y$ ja $1-y=x$, saame selle võrratuse kirjutada kujul $xy(1+x)(1+y) \geqslant 9x^2y^2$, mis x, y positiivsuse tõttu on omakorda samaväärne võrratusega

$$(1+x)(1+y) \geqslant 9xy\,. \tag{5}$$

Asendades siin mõlemal pool $y=1-x$, saame selle võrratuse esitada kujul $(1+x)(2-x) \geqslant 9x(1-x)$, milles sulgude avamisel ja sarnaste liikmete koondamisel saame $2-8x+8x^2 \geqslant 0$ ehk $2(1-2x)^2 \geqslant 0$, mis ilmselt kehtib.

Lahendus 4. Samuti nagu lahenduses 3 jõuame tõestatavaga samaväärse võrratuseni (5). Asendades selle võrratuse vasakul pool kahes kohas 1 asemele $x+y$, saame selle kirjutada kujul $(2x+y)(x+2y) \geqslant 9xy$. Kolme arvu aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vahelisest võrratusest saame $2x+y=x+x+y \geqslant 3\sqrt[3]{x^2y}$ ja analoogiliselt $x+2y \geqslant 3\sqrt[3]{xy^2}$, seega

$$(2x+y)(x+2y) \geqslant 3\sqrt[3]{x^2y}\cdot 3\sqrt[3]{xy^2}=9\sqrt[3]{x^3y^3}=9xy\,.$$

6. *Vastus:* 30.

Arvestades igas voorus võitjale 1 punkti, teise koha saanule 0 ja viimaseks jäänule −1 punkti, on iga superstaari lõpptulemuseks tema kogutud punktide arv. Et igas voorus väljaantavate punktide summa on 0, siis on kõigis voorudes kokku väljaantavate punktide kogusumma, mis on võrdne kolme superstaari lõpptulemuste summaga, samuti 0. Et ülesande tingimuse kohaselt jäid superstaarid lõpptulemuse poolest viiki, siis on neist igaühe lõpptulemus 0, st iga superstaar tuli esimeseks sama paljudes voorudes, kui oli neid voore, kus ta jäi viimaseks.

Olgu k nende voorude arv, kus mängu „Kes tahab saada superstaariks" võitja edestas nii „Superstaarijahi" võitjat kui ka „Meeleheitel superstaaride" võitjat, ehk sai voorus esimese koha. Siis nende voorude arv, kus ta edestas vähemalt üht neist (ehk ei jäänud viimaseks), on $20+10-k = 30-k$. Et vastavalt eespool tõestatule pidi ta viimaseks jääma täpselt k voorus, siis kõigi voorude koguarv on $(30 - k) + k = 30$.

Märkus. Ülesandes kirjeldatud olukord on võimalik. Olgu superstaarid A, B ja C, siis on ülesande tingimused täidetud, kui paremusjärjestustest ABC, BCA ja CAB igaüks esines täpselt 10 voorus ja muid paremusjärjestusi ei esinenud. Arvude 20 ja 10 korral on see ka ainus viis ülesande tingimuste täitmiseks, aga võttes nende asemele mingid muud arvud, võib selleks olla ka mitu võimalust või siis mitte ühtegi. Samas voorude arv on aga igal juhul võrdne nende kahe arvu summaga, nagu lahenduses toodud mõttekäik näitab.

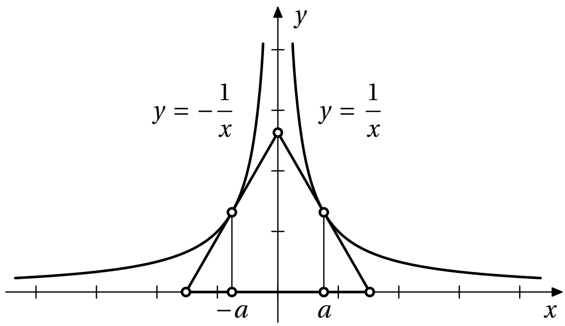
Lahendused

1. *Vastus:* 1 ja -1.

Tähistame $2^{x-1} = y$, siis $2^{x+1} = 4y$ ja $4^x = (2^x)^2 = 4y^2$. Asendades saame võrrandi $4y^2 + 1 = y + 4y$, ehk $4y^2 - 5y + 1 = 0$, mille lahendid on $y_1 = 1$ ja $y_2 = \frac{1}{4}$, kust vastavalt $x_1 = 1$ ja $x_2 = -1$. Vahetu kontroll näitab, et mõlemad lahendid sobivad.

2. *Vastus:* $\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$.

Sümmeetria tõttu lõikavad mõlemad vaadeldavad puutujad y-telge ühes ja samas punktis ning x-telge punktides, mis on sümmeetrilised koordinaatide alguspunkti suhtes. Seega on vaja leida niisugune arv $a > 0$, et funktsiooni $f(x) = \frac{1}{x}$ graafikule punktis $x = a$ tõmmatud puutuja lõikaks x-telge 60° nurga all, st selle funktsiooni tuletise väärtus kohal $x = a$ oleks $f'(a) = -\tan 60^\circ = -\sqrt{3}$ (vt joonist 14).



Joonis 14

Funktsiooni $f(x) = \frac{1}{x}$ tuletis on $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, seega saame a leidmiseks võrrandi $-\frac{1}{a^2} = -\sqrt{3}$, kust $a^2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ja $a = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$.

3. *Vastus:* b) $n = 4k$ või $n = 4k - 1$.

Lahendus 1. a) Piisab näidata, et $S(n)$ jagub 2-ga ja 3-ga. Et $S(n)$ avaldises kõik liidetavad on sama paarsusega nagu n ja neid liidetavaid on paarisarv, siis $S(n)$ on paarisarv, st jagub 2-ga. Kui $n = 3k$, siis $S(n)$ avaldises kõik liidetavad jaguvad 3-ga, mistõttu $S(n)$ jagub 3-ga. Kui $n = 3k + 1$, siis $S(n)$ avaldises kõik liidetavad on kujul $3k_i + 1$, mistõttu $S(n) = 3(k_1 + \ldots + k_6) + 6$ jagub 3-ga. Kui $n = 3k - 1$, siis $S(n)$ avaldises paaritu astendajaga liidetavad on kujul $3k_i - 1$ ja paarisastmega liidetavad on kujul $3k_i + 1$, mistõttu $S(n) = 3(k_1 + \ldots + k_6) + 0$ jagub 3-ga.

b) Et vastavalt eespool tõestatule $S(n)$ jagub alati 3-ga, siis piisab uurida, milliste arvude n korral $S(n)$ jagub 4-ga. Kui $n = 4k$, siis $S(n)$ avaldises kõik liidetavad jaguvad 4-ga, mistõttu $S(n)$ jagub 4-ga. Kui $n = 4k + 2$, siis $S(n)$ avaldises kõik liidetavad peale esimese jaguvad 4-ga, mistõttu $S(n)$ ei jagu 4-ga. Kui $n = 4k+1$, siis $S(n)$ avaldises kõik liidetavad on kujul $4k_i+1$, mistõttu $S(n) = 4(k_1 + \ldots + k_6) + 6$ ei jagu 4-ga. Kui $n = 4k - 1$, siis $S(n)$ avaldises paaritu astendajaga liidetavad on kujul $4k_i - 1$ ja paarisastmega liidetavad on kujul $4k_i + 1$, mistõttu $S(n) = 4(k_1 + \ldots + k_6) + 0$ jagub 4-ga.

Lahendus 2. Paneme tähele, et

$$\begin{aligned} S(n) &= n + n^2 + n^3 + n^4 + n^5 + n^6 = \\ &= n((1 + n^3) + (n + n^4) + (n^2 + n^5)) = \\ &= n(1 + n^3)(1 + n + n^2) = \\ &= n(n + 1)(n^2 - n + 1)(n^2 + n + 1)\ . \end{aligned}$$

a) Et tegurid n ja $n + 1$ on järjestikused täisarvud, siis $n(n + 1)$ jagub alati 2-ga. Kui n annab 3-ga jagamisel jäägi 0 või 2, siis vastavalt n või $n + 1$ jagub 3-ga ning $n(n+1)$ jagub ka 3-ga. Kui n annab 3-ga jagamisel jäägi 1, siis ka n^2 annab 3-ga jagamisel jäägi 1, mistõttu n^2+n+1 jagub 3-ga. Seega $S(n)$ jagub alati 2-ga ja 3-ga ning järelikult ka 6-ga.

b) Samuti nagu eelmises lahenduses paneme tähele, et piisab uurida, milliste arvude n korral $S(n)$ jagub 4-ga. Et arvud n ja n^2 on alati sama paarsusega, siis tegurid $n^2 - n + 1$ ja $n^2 + n + 1$ on alati paaritud, mistõttu $S(n)$ jagub 4-ga parajasti siis, kui korrutis $n(n + 1)$ jagub 4-ga. Kuna üks tegureist n ja $n + 1$ on alati paaritu, siis juhtub see parajasti siis, kui teine tegur jagub 4-ga, ehk kui n annab 4-ga jagamisel jäägi 0 või 3.

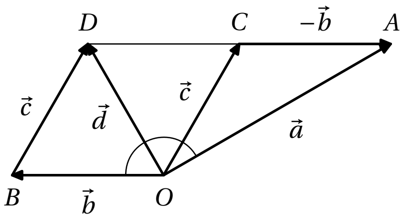
4. *Vastus:* b) 150°.

Olgu $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ ja $\vec{c} = \overrightarrow{BD}$, siis võrdusest $\vec{d} = \vec{b} + \vec{c}$ saame, et $\vec{d} = \overrightarrow{OD}$ (vt joonist 15). Et vektorid $\vec{b}$, $\vec{c}$ ja $\vec{d}$ on ühepikkused, siis kolmnurk OBD on võrdkülgne. Valime nüüd punkti C nii, et $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$, siis nelinurk $OBDC$ on romb, mille sisenurgad on suurusega 60° ja 120°. Lõpuks valime punkti A nii, et $\overrightarrow{CA} = -\vec{b}$, siis $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CA} = \vec{c} - \vec{b} = \vec{a}$. Et

$$\angle OCA = 180^\circ - \angle OCD = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

ning kolmnurk OCA on võrdhaarne, siis vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ vaheline nurk on

$$\angle BOA = \angle BOC + \angle COA = \angle BOC + \frac{1}{2}(180^\circ - \angle OCA) =$$
$$= 120^\circ + 30^\circ = 150^\circ.$$



Joonis 15

5. *Vastus:* a) reaalarvud x, kus $95\frac{5}{6} \leqslant x < 96$.

Olgu $\lfloor x \rfloor = n$, st $x = n + a$, kus $0 \leqslant a < 1$. Siis iga naturaalarvu k korral $kn \leqslant kx = kn + ka < kn + k$, st $kn \leqslant \lfloor kx \rfloor \leqslant kn + (k-1)$.

a) Olgu $S = \lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 3x \rfloor + \lfloor 4x \rfloor + \lfloor 5x \rfloor + \lfloor 6x \rfloor$, siis vastavalt eespool tõestatule

$$S \geqslant n + 2n + 3n + 4n + 5n + 6n = 21n$$

ja

$$S \leqslant n + (2n+1) + (3n+2) + (4n+3) + (5n+4) + (6n+5) =$$
$$= 21n + 15\ .$$

Et $2010 = 95 \cdot 21 + 15$, siis ainsa võimalusena $n = 95$ ja viimases võrratuses peab tegelikult kehtima võrdus. Niisiis iga $k = 2, 3, 4, 5, 6$ korral peab kehtima võrdus $\lfloor kx \rfloor = kn + (k-1)$, ehk $\lfloor ka \rfloor = (k-1)$, st $ka \geqslant k-1$ ehk $a \geqslant \frac{k-1}{k}$. Seega võrrandi lahenditeks on sellised reaalarvud x, kus $95\frac{5}{6} \leqslant x < 96$.

b) Olgu nüüd $S = \lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 3x \rfloor + \lfloor 4x \rfloor + \lfloor 5x \rfloor + \lfloor 6x \rfloor + \lfloor 7x \rfloor$, siis

$$S \geqslant n + 2n + 3n + 4n + 5n + 6n + 7n = 28n\ ,$$

teiselt poolt aga

$$S \leqslant n + (2n+1) + (3n+2) + (4n+3) + (5n+4) + (6n+5) + (7n+6) =$$
$$= 28n + 21\ .$$

Kuna arv 2010 annab 28-ga jagamisel jäägi 22, siis vaadeldaval võrrandil ei saa lahendeid olla.

6. Paneme tähele, et kui mingi valitud lõik $[a, a+k]$ on pikkusega $k > 1$, siis võime selle asendada k lõiguga $[a, a+1], \ldots, [a+(k-1), a+k]$, millest igaüks on pikkusega 1, kusjuures lõikude pikkuste summa ei muutu ning iga märgitud arv kuulub endiselt vähemalt ühele valitud lõigule. Seega võime üldisust kitsendamata piirduda juhuga, kus kõik valitud lõigud on pikkusega 1. Kuna aga igale sellisele lõigule saab kuuluda maksimaalselt 2 märgitud arvu, siis n arvu jaoks on vaja vähemalt $\frac{n}{2}$ lõiku, seega on valitud lõikude pikkuste summa vähemalt $\frac{n}{2}$.

Märkus. Pikkusega $k > 1$ lõigu asendamisel pikkusega 1 lõikudega võime need võtta ka „üle ühe“ (jättes otsmised kindlasti alles). Seejuures lõikude pikkuste summa küll muutub, ent üksnes vähenemise suunas, ja sellest edaspidises arutluses piisab.

Lp hindaja!

Käesolevas esitame kõigepealt hindamise üldised põhimõtted ning seejärel järjekorras konkreetsed hindamisjuhised iga ülesande kohta eraldi.

1. Õpilase lahenduseks tuleb esmajoones lugeda see, mida õpilane on ülesande kohta vormistanud puhtandina (sh mustandipaberile selgesti arusaadavalt kirja pandud mõttekäigud, kui need on ametlikult puhtandipaberilt viidatud). Töö mustandi arvestamine või mittearvestamine ülesande lahenduse hulka on hindaja otsustada (või piirkonna hindamiskomisjoni ühine otsus kõigi ülesannete suhtes), kuid see peab toimuma kõigis töödes ühtmoodi.

2. Alljärgnevas on 7.–9. klassi olümpiaadi I osa (testi) ning kõikide ülejäänud ülesannete hindamisjuhised esitatud erinevalt.

   Testi iga küsimuse jaoks on eraldi loetletud või kirjeldatud vastused, mille eest tuleks anda vastavalt kaks punkti või üks punkt (st vastavaid punkte ühe küsimuse piires *ei tule* liita). Testiülesannete lahendusi õpilased ei pea esitama, vaid kirjutavad ülesannete lehel vastavale punktiirile või ülesande tekstis viidatud kohta ainult vastuse.

   Seevastu kõigi teiste ülesannete kohta tuleb esitada täielikud lahendused, ainult vastustest ei piisa. Nende ülesannete lahendused on hindamisjuhistes jaotatud võimalust mööda osadeks (etappideks) ning näidatud lahenduse iga osa eest antav punktide arv (st ühe ülesande eest antava punktisumma saamiseks *tuleb* lahenduse erinevate osade eest antud punktid liita).

3. Žürii lahendustes ja käesolevates hindamisjuhistes on ülesannete arvulised vastused esitatud enamasti ainult ühel, lihtsaimal või kõige tõenäolisemalt esineval kujul. Hindamisel (sh testid!) tuleb võrdselt õigeks lugeda ka sama vastuse teised mõistlikud esitusviisid – sh taandatud hariliku murruna, segaarvuna, kümnendmurruna, sõnadega välja kirjutatuna –, seejuures ka osana pikemalt (nt täislausega, koos sobiva liigisõnaga või koos selgitustega) antud vastusest. Juhud, kus ülesande sisu tingib erandeid sellest üldreeglist, on eraldi mainitud vastava ülesande hindamisjuhises.

Ühik arvu järel on vastuses vajalik juhul, kui ülesandes on küsitud suurust, mis teatud ühikutes avaldub. Näiteks küsimusele „Kui suur pindala …?“ saab õige vastus olla „120 cm^2“, kuid mitte „120“ (kui ülesande tekstis pole kasutatud ühikuta pikkusi/pindalasid). Seejuures on vastused „120 cm^2“ ja „1,2 dm^2“ samaväärsed. Ühik vastuses ei ole nõutav, kui ülesandes on küsitud kindlate ühikute arvu. Näiteks küsimusele „Mitu ruutsentimeetrit …?“ antud vastused „120“ ja „120 cm^2“ tuleb võrdväärseks lugeda samal alusel nagu küsimusele „Mitu karu …?“ antud vastused „3“ ja „3 karu“ (vastus koos liigisõnaga). Niisuguse küsimuse vastuseks on arv ning ühikul või liigisõnal on vaid puhtkeeleline roll. Küsimusele „Mitu ruutsentimeetrit …?“ antud vastused „120 cm^2“ ja „1,2 dm^2“ ei ole samaväärsed.

4. Mõnede ülesannete kohta, mida saab lahendada mitmel oluliselt erineval viisil, anname eraldi hindamisskeemid erinevate lahendusviiside jaoks. Rõhutame, et iga konkreetset mittetäielikku lahendust tuleb hinnata ainult *ühe* sellise skeemi järgi (selle järgi, mille kohaselt ta saaks kõige rohkem punkte).

5. Enamiku ülesannete korral (v.a testid ja tõestusülesanded) on hindamisjuhiste lõpus eraldi näidatud, mitu punkti anda ainult õige vastuse eest. See hinne on mõeldud juhuks, kui puhtandis on antud ainult ülesande vastus ning mustand selle ülesande kohta puudub või on selle ülesande hindaja otsustanud mustandit mitte arvestada.

6. Kahtlemata esineb õpilaste töödes ka mõttekäike, mis ei mahu meie poolt pakutud skeemidesse. Selliste lahenduste hindamisel tuleb lähtuda sellest, *kui suur osa* antud ülesandest on õpilasel lahendatud, kasutades lahenduse üksikute osade kaalu määramisel võimaluse korral võrdluseks punktide jaotust meie pakutud hindamisskeemides.

7. *Mis tahes* täieliku ja matemaatiliselt korrektse lahenduse eest tuleb igal juhul anda maksimumpunktid, sõltumata selle lahenduse pikkusest või otstarbekusest võrreldes teiste lahendusviisidega.

Eesti LVII matemaatikaolümpiaad

6. veebruar 2010 | Piirkonnavoor | **7. klass**

I osa hindamisjuhised

1.
- Antud õige vastus 1 : 20 või $\frac{1}{20}$ või 0,05: 2 p
- Antud vastus 20 : 1 või mõni muu vale vastus: 0 p

2.
- Antud õige vastus $-\frac{1}{6}$: 2 p

3.
- Antud õige vastus 2211: 2 p

4.
- Antud õige vastus 6: 2 p

5.
- Antud õige vastus 21: 2 p

6.
- Antud õige vastus 80°: 2 p
- Antud vastuseks arv 80 ilma kraadimärgita: 1 p

7.
- Antud õige vastus 18 ilma ühikuta või koos sõnaga „pindalaühikut“ või “ühikut“: 2 p
- Antud vastuseks arv 18 koos vale ühikuga (nt cm^2): 1 p

8.
- Märgitud õigesti täpselt kolm tippu ja ühendatud need lõikudega: 2 p
- Märgitud õigesti täpselt kolm tippu, aga lõikudega ühendamata: 1 p
- Märgitud valesti vähemalt üks tipp: 0 p

Kui tipud on õigesti märgitud, aga tähed juurde kirjutamata või kirjutatud vales järjekorras, siis punkte mitte maha võtta. Selgesti abipunktideks klassifitseeruvaid punkte tippude hulka mitte arvata.

9.
- Antud õige vastus $(\pi - 1)$ cm^2: 2 p
- Antud vastuseks $\pi - 1$ ilma ühikuta või vale ühikuga: 1 p
- Antud vastuseks 2,14 cm^2 või 2,14 või täpsem ligikaudne väärtus õige ühikuga või ilma ühikuta: 1 p

Kui õiges vastuses koos ühikuga on $\pi - 1$ ümber sulud lisamata, siis selle eest punkte mitte maha võtta.

10.
- Antud õige vastus 60 cm: 2 p
- Antud vastuseks arv 60 ilma ühikuta või vale ühikuga: 1 p

Eesti LVII matemaatikaolümpiaad

6. veebruar 2010 | Piirkonnavoor | **8. klass**

I osa hindamisjuhised

1.
- Antud õige vastus d või õige väärtus $\frac{1}{3} : \frac{1}{4}$: 2 p

2.
- Antud õige vastus 1098: 2 p

3.
- Antud õige vastus 11: 2 p

4.
- Antud õige vastus 15: 2 p

5.
- Antud õige vastus 36°: 2 p
- Antud vastuseks arv 36 ilma kraadimärgita: 1 p

6.
- Antud õige vastus 360°: 2 p
- Antud vastuseks arv 360 ilma kraadimärgita: 1 p

7.
- Antud õige vastus 90 cm^2: 2 p
- Antud vastuseks arv 90 ilma ühikuta või vale ühikuga: 1 p

8.
- Märgitud õigesti täpselt neli trapetsi tippu ja ühendatud need õigesti lõikudega: 2 p
- Märgitud õigesti täpselt neli trapetsi tippu, aga lõikudega ühendamata: 1 p
- Märgitud valesti vähemalt üks tipp: 0 p

Kui tipud on õigesti märgitud, aga tähed juurde kirjutamata või kirjutatud vales järjekorras, siis punkte mitte maha võtta. Selgesti abipunktideks klassifitseeruvaid punkte tippude hulka mitte arvata.

9.
- Antud õige vastus $(14\pi + 6)$ cm: 2 p
- Antud vastuseks $14\pi + 6$ ilma ühikuta või vale ühikuga: 1 p
- Antud vastuseks 49,96 cm või 49,96 või täpsem ligikaudne väärtus õige ühikuga või ilma ühikuta: 1 p

Kui õiges vastuses koos ühikuga on $14\pi + 6$ ümber sulud lisamata, siis selle eest punkte mitte maha võtta.

10.
- Antud õige vastus 120 cm: 2 p
- Antud vastuseks arv 120 ilma ühikuta või vale ühikuga: 1 p

Eesti LVII matemaatikaolümpiaad

6. veebruar 2010 | Piirkonnavoor | **9. klass**

I osa hindamisjuhised

1.
- Antud õige vastus 3: 2 p

2.
- Antud õige vastus 72: 2 p

3.
- Antud õige vastus 2010 või $n = 2010$: 2 p

4.
- Antud õige vastus 24: 2 p

5.
- Antud õige vastus 160°: 2 p
- Antud vastuseks arv 160 ilma kraadimärgita: 1 p

6.
- Antud õige vastus 70°: 2 p
- Antud vastuseks arv 70 ilma kraadimärgita: 1 p

7.
- Antud õige vastus 1440°: 2 p
- Antud vastuseks arv 1440 ilma kraadimärgita: 1 p

8.
- Antud õige vastus $(-2; 3)$: 2 p
- Antud vähemalt üks vale vastus: 0 p
- Vastus andmata, kuid joonisel kujutatud õige romb koos oma tippude ja külgedega, aga ilma muude punktideta: 1 p
- Vastus andmata, kuid joonisel kujutatud õige romb ja lisaks sellele veel mõni punkt: 0 p

9.
- Antud õige vastus 36 cm^2: 2 p
- Antud vastuseks 36 ilma ühikuta või vale ühikuga: 1 p

10.
- Antud õige vastus 240 cm^3: 2 p
- Antud vastuseks arv 240 ilma ühikuta või vale ühikuga: 1 p

Eesti LVII matemaatikaolümpiaad

6. veebruar 2010 Piirkonnavoor **7. klass**

II osa hindamisjuhised

1. *Lahendus algebralist kuju kasutamata.*

- Saadud, et arvude summa on 1001: 3 p
- Saadud, et kolmekohaline liidetav algab ja lõpeb 9-ga: 1 p
- Saadud, et kahekohaline liidetav on 22: 2 p
- Leitud kolmekohalise arvu keskmine number 7: 1 p

Lahendus algebralist kuju kasutades.

- Ülesande arvud pandud kirja kujul $\overline{aa}$, $\overline{bcb}$, $\overline{deed}$ või mõnel muul sobival algebralisel kujul: 1 p
- Leitud $d = 1$ ja $e = 0$: 2 p
- Leitud, et $b = 9$: 1 p
- Leitud, et $a = 2$: 2 p
- Leitud, et $c = 7$: 1 p

Kui on antud ainult vastus (3 arvu), siis anda 2 punkti (sealhulgas ühe õige arvu eest 1 punkt ja kahe õige arvu eest 2 punkti).

2.

- a)-osa: 5 p

  Sealhulgas
  - leitud kolme tsisternitäie vee koguruumala: *1 p*
  - leitud veepaagi ruumala: *2 p*
  - ruumala kaudu leitud veepaagi kõrgus: *2 p*
- b)-osa: 2 p

  Sealhulgas
  - leitud neljandast tsisternitäiest lisatava vee ruumala: *1 p*
  - avaldatud see ruumala protsendina tsisterni ruumalast: *1 p*

Ainult mõlema osa õige vastuse eest ilma selgitusteta anda 2 punkti. Ainult ühe osa õige vastuse eest (teine puudub või on vale) anda 1 punkt.

3.

- Märgitud, et kahe viimase väite põhjal peab tõene ennustus kuuluma kas Jürile või Toomasele: 2 p
- Järeldatud, et Peetri ennustus oli väär: 1 p
- Järeldatud, et Jüri ennustus oli väär: 1 p
- Järeldatud, et Toomase ennustus oli tõene: 1 p

- Tehtud kindlaks tulemuste paremusjärjestus: 2 p

Kui vastuseks on antud õige paremusjärjestus ümberpööratud kujul (halvim esimesena), kusjuures lahendusest on järjekord tuletatav, siis punkte mitte maha võtta.

Ainult õige vastuse eest (järjestus koos suunaga) ilma selgitusteta anda 2 punkti. Kui seejuures pole selge, kas on mõeldud järjestust parimast halvimani või vastupidi, siis anda 1 punkt.

II osa hindamisjuhised

1.
- Järeldatud, et esialgsest arvust kustutati viimane number: 2 p
- Saadud, et ülesande tingimusi rahuldab ainult arv 201: 5 p

Ainult vastuse 201 eest ilma selgitusteta anda 1 punkt. Ainult vastuse 201 eest koos märkusega, et see on ainuke sobiv arv, anda 2 punkti. Ainult vastuste rea eest, kus esineb vähemalt üks vale vastus, anda 0 punkti.

2.
- Tõestatud, et kolmnurgad ABK ja ALK on võrdsed: 2 p
- Sellest järeldatud, et $\angle ALK = 90°$: 1 p
- Kasutatud ülesande tingimust $\angle AKL = \angle CKL$ seoste ülekandmiseks kolmnurkadest ABK või ALK kolmnurka CLK: 1 p
- Leitud kolmnurga ABC ühe teravnurga suurus: 2 p
- Leitud kolmnurga ABC teise teravnurga suurus: 1 p

Ainult õige vastuse $30°$ ja $60°$ eest ilma selgitusteta anda 2 punkt.

3.
- Võetud kasutusele tähis (žürii lahenduses x) otsitava saabaste arvu jaoks: 1 p
- Avaldatud nende saabaste arvud, mille puhul tuleb teha täpselt ühte antud kolmest tegevusest, selle tähise kaudu: 4 p
- Koostatud võrrand otsitava saabaste arvu leidmiseks ja saadud lõppvastus: 2 p

Ainult õige vastuse eest ilma selgitusteta anda 2 punkti.

II osa hindamisjuhised

1. Vastavalt žürii lahendustele 1 ja 2 anname kaks hindamisskeemi.

Lahendus päevade arvude kokkulugemise teel.

- Võetud kasutusele tähis (žürii lahenduses L) raamatu lehekülgede arvu märkimiseks: 1 p
- Avaldatud kirjutamisele kulunud päevade arv ja kirjutamisele ning toimetamisele kokku kulunud päevade arv selle tähise kaudu ülesande andmete põhjal: 2 p
- Leitud toimetamisele kulunud päevade arv ning toimetamise keskmine kiirus: 4 p

  Sealhulgas
  - avaldatud toimetamisele kulunud päevade arv: *1 p*
  - avaldatud toimetamise keskmine kiirus: *1 p*
  - avaldis(ed) lihtsustatud: *2 p*

Lahendus keskmiste kiiruste võrdlemise teel.

- Võetud kasutusele sobivad tähised: 1 p
- Ülesande tingimuste põhjal koostatud võrdused, mis seovad kirjutamiseks kulunud aega lehekülgede arvuga ning kirjutamiseks ja toimetamiseks kulunud aega lehekülgede arvuga: 2 p
- Leitud seos kirjutamiseks kulunud aja ja toimetamiseks kulunud aja vahel: 2 p
- Leitud toimetamise keskmine kiirus: 2 p

Ainult õige vastuse eest ilma selgitusteta anda 1 punkt.

2.
- Valitud hüpotenuusil AC punkt K nii, et $|AH| = |HK|$: 2 p
- Tõestatud, et $|KB| = |KC|$: 2 p
- Tõestatud, et kolmnurk ABK on võrdkülgne või leitud mõni muu seos teravnurkade määramiseks: 2 p
- Leitud esialgse kolmnurga nurkade suurused: 1 p

Ainult õige vastuse eest ilma selgitusteta anda 1 punkt.

3. Seda ülesannet on ilmselt võimalik lahendada mitmel erineval viisil, järgnevas anname hindamisskeemid, mis vastavad žürii lahendustele 1, 2 ja 4.

Lahendus arvu $4k+2$ uurimise abil (žürii lahendus 1).

- Ülesande tingimustele vastavad arvud pandud kirja üldkujul $4k+2$: 2 p
- Esitatud arv $(4k+2)^2$ kahe liidetava summana, kus üks liidetav on 4, nt kujul $16k(k+1)+4$: 2 p
- Tõestatud, et teine liidetav, nt $16k(k+1)$, jagub 32-ga: 2 p
- Tehtud lõppjäreldus: 1 p

Lahendus naaberpaarisarvude uurimise teel (žürii lahendus 2.)

- Idee lahutada x^2-4 teguriteks $(x-2)(x+2)$: 2 p
- Järeldatud, et $x-2$ ja $x+2$ jaguvad 4-ga: 1 p
- Järeldatud, et üks arvudest $x-2$ ja $x+2$ jagub 8-ga: 2 p
- Järeldatud, et arv $x^2-4=(x-2)(x+2)$ jagub 32-ga: 1 p
- Antud lõppvastus: 1 p

Lahendus arvu 4 korduva liitmise abil (žürii lahendus 4).

- Märgitud, et arv 2 annab ühe võimaliku jäägi 4: 1 p
- Märgitud kas otseselt või kaudselt, et iga 4-ga mittejaguv paarisarv saadakse arvule 2 korduvalt arvu 4 liites: 1 p
- Tõestatud, et kui 4-ga mittejaguva paarisarvu x ruut annab 32-ga jagamisel mingi jäägi, siis ka arvu $x+4$ ruut annab 32-ga jagamisel sama jäägi: 4 p
- Tehtud lõppjäreldus, et kõik ülesande tingimustele vastavad arvud annavad 32-ga jagamisel sama jäägi: 1 p

Ainult õige vastuse („ainus võimalik jääk on 4“) eest ilma selgitusteta anda 1 punkt.

4. Vastavalt žürii lahendustele 1 ja 2 anname kaks hindamisskeemi.

Lahendus andmete tabeli ridade järgi.

- Tõestatud, et kaks tõest vastust andis Ninatark: 3 p
- Järeldatud, et õuna andis Unimüts: 1 p
- Järeldatud, et kaks väära vastust andis Toriseja: 1 p
- Järeldatud, et Õnneseene ja Unimütsi vastustes on üks pool tõene ja teine väär: 1 p
- Järeldatud, et Unimütsi vastuse esimene pool on tõene (ja et seega ukse avas Õnneseen): 1 p

Lahendus andmete tabeli veergude järgi.

- Märgitud, et nii ukse avamise kui ka õuna andmise kohta ei saa olla antud rohkem kui kaks tõest vastust: 2 p
- Järeldatud, et kummagi tegevuse kohta peab olema antud täpselt kaks tõest vastust: 1 p

- Saadud, et õuna andis Unimüts: 1 p
- Järeldatud, et ühe tõese vastuse ukse avamise kohta andis Ninatark: 1 p
- Järeldatud, et teise tõese vastuse ukse avamise kohta andis Unimüts ja et ukse avas Õnneseen: 2 p

Ainult täieliku õige vastuse eest (ukse avaja ja õuna andja) ilma selgitusteta anda 1 punkt. Kui lisaks on kontrollitud vastuse vastavust ülesande tingimustele, siis anda 2 punkti.

Eesti LVII matemaatikaolümpiaad

6. veebruar 2010 Piirkonnavoor **10. klass**

Hindamisjuhised

1.
- Avaldatud kahe eri suurusega tahu pindalad kolmanda tahu pindala kaudu: 2 p
- Risttahuka ruumala valemi abil leitud ühe serva pikkus: 3 p
- Leitud risttahuka teise ja kolmanda serva pikkused: 2 p

Ainult õige vastuse eest ilma selgituseta anda 1 punkt.

2. Vastavalt žürii lahendustele 1 ja 2 toome kaks hindamisskeemi.

Lahendus, kus murrud viiakse ühisele nimetajale vasakul ja paremal eraldi.

- Viidud murrud vasakul ja paremal ühisele nimetajale ning lihtsustatud lugejad: 3 p
- Leitud, et esialgse võrrandi lahendiks sobib $x = \frac{1}{2}$: 2 p
- Tõestatud, et esialgsel võrrandil teisi lahendeid ei ole: 2 p

Lahendus, kus murrud viiakse ühisele nimetajale pärast ühele poole toomist.

- Toodud liikmed ühele poole ja viidud kõik murrud ühisele nimetajale: 2 p
- Lihtsustatud lugeja kujule $2(2x-1)$: 3 p
- Leitud lahend $x = \frac{1}{2}$: 1 p
- Põhjendatud, et $x = \frac{1}{2}$ sobib esialgse võrrandi lahendiks: 1 p

Ainult õige vastuse eest ilma selgitusteta anda 1 punkt.

3. Seda ülesannet saab lahendada ilmselt paljudel erinevatel viisidel. Toome hindamisskeemid nende lähenemiste jaoks, mida on kasutatud žürii lahendustes.

Lahendus mittenegatiivsete arvude summaks teisendamise teel (žürii lahendused 1 ja 2).

- Teisendatud võrratus kujule, kus ühel pool on kahe või enama täisruudu summa ja teisel pool 0: 4 p
- Tehtud järeldus, et selline võrratus kehtib alati täisruutude mittenegatiivsuse tõttu: 1 p
- Tehtud kindlaks kõik juhud, millal võrratuses kehtib võrdus: 2 p

Lahendus ruutfunktsiooni uurimise teel (žürii lahendus 3).

- Leitud ruutvõrrandi $x^2 - \frac{3}{2}xy + y^2 = 0$ diskriminant $D = -\frac{55}{16}y^2$: 3 p
- Analüüsitud juht $y = 0$: 2 p
- Analüüsitud juht $y \neq 0$: 2 p

Lahendus juhtude läbivaatamise teel vastavalt arvude x ja y märkidele (žürii lahendus 4).

- Ülesande väide tõestatud juhul, kui korrutis xy on mittenegatiivne: 3 p
- Ülesande väide tõestatud juhul, kui korrutis xy on negatiivne: 2 p
- Analüüsitud võrduse juht: 2 p

Kui võrratus on tõestatud ainult positiivsete või mittenegatiivsete reaalarvude x ja y korral, siis anda skeemi esimese rea alusel ikkagi 3 punkti.

4. Ülesande lahendamiseks tuleb viia nurgad $\angle AEC$ ja $\frac{1}{2}\angle ADB$ teatavale ühisele alusele, et neid saaks omavahel võrrelda. Seda võib teha ühisele ringjoone kaarele kandmise teel nagu žürii lahendustes 1 ja 2 või nurkade kõrvutipaigutamise teel nagu lahenduses 3.

- Idee võrrelda sobivaid ühise alusega nurki (nagu näiteks $\angle AGB$ ja $\angle ADB$ lahenduses 1, $\angle AEC$ ja $\angle ADC$ lahendustes 2 ja 3): 2 p
- Tõestatud nurkade võrdlemiseks kasutatav abiväide (nagu näiteks see, et punkt G asub väljaspool ringjoont lahenduses 1, või punkt E asub väljaspool ringjoont lahenduses 2, või võrratus $\angle CDE > \angle CED$ lahenduses 3): 4 p
- Järeldatud ülesande väide: 1 p

5.
- Leitud sobiv arv $n = 3$ korral: 2 p
- Leitud sobiv arv $n = 4$ korral: 3 p
- Esitatud konstruktsioon, kuidas väite kehtivusest arvu n korral järeldada väite kehtivus kõigi n-st suuremate sama paarsusega arvude korral: 2 p

6.
- Kirjeldatud Miku sobivat strateegiat juhul $n = 6$: 3 p
- Tõestatud, et seda strateegiat järgides Miku tõepoolest alati võidab: 2 p
- Tõestatud, et $n = 8$ korral võidab Juku: 2 p

Ainult vastuse eest ilma selgitusteta anda 0 punkti.

Eesti LVII matemaatikaolümpiaad

6. veebruar 2010 | Piirkonnavoor | **11. klass**

Hindamisjuhised

1.
- Õigesti välja arvutatud avaldise $\sqrt{5}\cdot\sqrt[4]{6}$ või selle avaldise kordse neljas aste: 4 p
- Õigesti välja arvutatud arvu 3,5 või selle vastava kordse neljas aste: 2 p
- Võrreldud tulemusi ja tehtud lõppjäreldus: 1 p

Skeemi kolmanda rea järgi anda punkte ainult siis, kui võrreldavad tulemused on õiged.

Ainult vastuse eest ilma selgitusteta anda 0 punkti.

2.
- Avaldatud kummagi matkaja puhul raja läbimiseks kulunud aeg matkajate kiiruste kaudu ja koostatud vastav võrrand: 2 p
- Avaldatud kummagi matkaja puhul kohtumispaigani jõudmiseks kulunud aeg ja koostatud vastav võrrand: 3 p
- Lahendatud nendest kahest võrrandist koosnev süsteem ja leitud matkajate kiirused: 2 p

Võrrandite koostamise ja võrrandisüsteemi lahendamise etapid võivad olla ka üksteisega läbi põimunud nagu žürii lahenduses.

Ainult õige vastuse eest ilma selgitusteta anda 1 punkt.

3.
- Esitatud konstruktsioon sobiva algarvu leidmiseks: 3 p
- Tõestatud, et see algarv rahuldab ülesande tingimusi: 4 p

4.
- Tõestatud, et iga kolmnurga puhul selline ringjoon leidub: 3 p
- Tõestatud, et nelinurga puhul sellist ringjoont ei tarvitse leiduda: 4 p

Žürii lahenduse alguses formuleeritud abitulemuse „kõõlu pikkus on määratud ringjoone keskpunkti kaugusega sellest kõõlust“ tõestamata jätmise eest punkte mitte maha võtta.

Ainult vastuse eest ilma selgitusteta anda 0 punkti.

5.
- Võrratust teisendatud (vabanemine nimetajatest, sulgude avamine), kuid ei ole kasutatud tingimust $x + y = 1$ ega tuntud võrratusi: 1 p
- Võrratuse poole teisendamisel on kasutatud tingimust $x+y = 1$: 1 p

- Võrratuse poole teisendamisel on kasutatud aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vahelist võrratust või reaalarvu ruudu mittenegatiivsuse omadust nii, et tulemuseks saadakse kehtiv võrratus (juhul $x = y = \frac{1}{2}$ kehtib võrdus ja ülejäänud juhtudel range võrratus): 2 p
- Eeltoodud elemendid on kokku pandud korrektseks tõestuseks: 3 p

6.

- Järeldatud, et iga võistleja tuli esimeseks sama paljudes voorudes kui paljudes ta jäi viimaseks: 2 p
- Leitud, et voorude arv, milles mängu „Kes tahab saada superstaariks“ võitja ei jäänud viimaseks, on $30-k$, kus k on voorude arv, milles ta tuli esimeseks: 4 p
- Leitud voorude koguarv: 1 p

Ainult vastuse eest ilma selgitusteta anda 1 punkt.

Hindamisjuhised

1.
- Idee tuua sisse uus tundmatu y tähenduses 2^x või 2^{x-1} vms: 2 p
- Teisendatud antud võrrand ruutvõrrandiks y suhtes: 1 p
- Leitud ruutvõrrandi lahendid y_1 ja y_2: 2 p
- Leitud esialgse võrrandi lahendid x_1 ja x_2: 2 p

Kui uut tundmatut pole sisse toodud, kuid võrrand on teisendatud ruutvõrrandiks 2^x (või 2^{x-1} vms) suhtes, siis anda skeemi esimese kahe rea põhjal 3 p ja edasi vastavalt skeemis toodud etappidele.

Ainult õige vastuse eest ilma selgitusteta anda 1 punkt.

2.
- Sümmeetriakaalutluste abil taandatud ülesanne sellise väärtuse $x = a$ leidmisele, kus funktsiooni $f(x) = \frac{1}{x}$ graafiku puutuja moodustab x-teljega nurga 60°: 1 p
- Leitud, et tuletise väärtus kohal a peab olema $-\sqrt{3}$: 1 p
- Leitud, et $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$: 1 p
- Koostatud võrrand a leidmiseks: 1 p
- Lahendatud see võrrand ja leitud ainuke sobiv arv a: 3 p

Funktsiooni $f(x) = \frac{1}{x}$ (parem haru) asemel võib olla lähtutud funktsioonist $f(x) = -\frac{1}{x}$ (vasak haru), eeltoodud skeemis asenduvad siis miinusmärgid plussmärkidega.

Ainult õige vastuse eest ilma selgitusteta anda 1 punkt.

3.
- Märgitud, et $S(n)$ jagub 6-ga, kui ta jagub 2-ga ja 3-ga: 1 p
- Tõestatud, et $S(n)$ jagub 2-ga: 1 p
- Tõestatud, et $S(n)$ jagub 3-ga: 3 p
- Tehtud kindlaks, millal $S(n)$ jagub 4-ga (12-ga): 2 p

Kui ülesanne on lahendatud avaldise $S(n)$ tegurdamise teel nagu žürii lahenduses 2, siis anda tegurdamise eest 2 punkti, millest üks võtta eelneva skeemi realt 3 ja teine realt 4.

Kui b)-osas on antud ainult vastus ilma selgitusteta, siis anda selle osa eest 0 punkti.

4.

- Tõestatud, et kolmnurk OBD on võrdkülgne: 2 p
- Tõestatud, et kolmnurk OCD on võrdkülgne või et nelinurk $OBDC$ on kahest võrdkülgsest kolmnurgast koosnev romb: 1 p
- Tõestatud, et kolmnurk OCA on võrdhaarne alusnurgaga 30°: 3 p
- Leitud nurga BOA suurus: 1 p

Kui vektorid $\vec{b}$, $\vec{c}$ ja $\vec{d}$ on kohe rakendatud ühte punkti, siis anda selle tõestamise eest, et nende vektorite lõpp-punktid ja ühine alguspunkt on kahest võrdkülgsest kolmnurgast koosneva rombi tippudeks, 3 punkti vastavalt skeemi kahele esimesele reale.

Ainult õige vastuse eest ilma selgitusteta anda 1 punkt.

5.

- Esitatud arv x kujul $x = n + a$, kus n on täisarv ja a selline reaalarv, et $0 \leqslant a < 1$: 1 p
- Leitud summa S alumine tõke n kaudu: 1 p
- Leitud summa S ülemine tõke n kaudu: 2 p
- Leitud a)-osa võrrandi lahendid: 2 p
- Tõestatud, et b)-osa võrrandil lahendeid pole: 1 p

Kui on a)-osa võrrandis täisosa märgid ära jäetud ja leitud tekkinud võrrandi lahend $x = 95\frac{5}{7}$, siis anda 1 punkt (vastab skeemi teisele reale).

Ainult a)-osa õige vastuse eest ilma selgitusteta anda 1 punkt.

6.

- Tõestatud, et esialgsed lõigud võib asendada lõikudega, mille pikkus on 1, nii, et lõikude kogupikkus ei suurene: 4 p
- Tõestatud, et uute lõikude pikkuste summa on vähemalt $\frac{n}{2}$: 3 p