# LVI Олимпиада Эстонии по математике

31 января 2009 г. Региональный тур **10 класс**

*Время, отводимое для решения: 5 часов.*
*Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.*
*Пользоваться калькулятором не разрешается.*

**1.** Периметр и площадь прямоугольника такие же как и у четвёртой части круга с радиусом 1. Найти размеры прямоугольника.

**2.** Найти все решения системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} - \dfrac{1}{xy} = 2 \\ \dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x} + \dfrac{1}{xy} = 1 \end{cases}$$

в действительных числах.

**3.** Чтобы настроиться на рабочий лад математик до начала рабочего для умножает все простые числа, которые не превышают его возраст в пересчёте на дни, и прибавляет к полученному произведению 1. Возможно ли, что в результате он получит квадрат целого числа?

**4.** Доказать неравенство

$$\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{2009^2}\right) > \frac{2}{3}.$$

**5.** Внутри квадрата $ABCD$ выбраны точки $E$ и $F$ так, что

$$\angle EAB = \angle EBA = \angle FBC = \angle FCB = 15^\circ.$$

Найти величину угла $FAE$.

**6.** Каждое целое число на числовой оси покрашено либо в синий, либо в красный цвет. Доказать, что найдутся три целых числа одного цвета, которые лежат на числовой оси через равные промежутки.

# LVI Олимпиада Эстонии по математике

31 января 2009 г. Региональный тур **11 класс**

*Время, отводимое для решения: 5 часов.*
*Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.*
*Пользоваться калькулятором не разрешается.*

**1.** Длина стороны ромба равна 1 и величина одного внутреннего угла равна $45^\circ$. Найти длины диагоналей этого ромба и радиус вписанной окружности.

**2.** Найти все такие углы $\alpha$, что $0^\circ \leqslant \alpha < 360^\circ$ и $\sin\alpha + \cos\alpha = 1$.

**3.** Найдутся ли такие целые числа $a$, $b$, $c$ и $d$, что $a+b$, $a+c$, $a+d$, $b+c$, $b+d$ и $c+d$ являются шестью различными простыми числами?

**4.** Найти все такие действительные числа $x$, при которых $\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} = 2x$.

**5.** На плоскости даны четыре горизонтальные прямые, причём расстояние между двумя верхними и расстояние между двумя нижними прямыми различны. Можно ли выбрать на каждой прямой одну точку так, чтобы при соединении этих точек отрезками образовался параллелограмм?

**6.** Натуральные числа от 1 до 100 записаны на клетчатой доске размером $10 \times 10$ так, что в каждом квадрате одно число и в каждом ряду числа расположены в возрастающем порядке. Каково наибольшее возможное значение суммы чисел шестого столбца?

# LVI Олимпиада Эстонии по математике

31 января 2009 г. Региональный тур **12 класс**

*Время, отводимое для решения: 5 часов.*
*Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.*
*Пользоваться калькулятором не разрешается.*

**1.** Центр описанной окружности равнобедренного треугольника находится в точке начала координат, а конечные точки одной из боковых сторон имеют координаты $(-3, -1)$ и $(1, -3)$. Найти возможные координаты третьей вершины этого треугольника.

**2.** График квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ симметричен относительно оси $y$. Если отобразить её график относительно оси $x$ и сдвинуть его на 2 единицы в положительном направлении оси $x$, то полученный в результате график и первоначальный график пересекут ось $x$ в одной и той же точке, а их общая касательная в этой точке образует с осью $x$ угол $45^\circ$. Найти все такие комплекты чисел $(a, b, c)$.

**3.** Найти наименьшее положительное целое число, половина которого является квадратом некоторого целого числа и треть которого является кубом некоторого целого числа.

**4.** Общим членом последовательности $a_1, a_2, \ldots$ является $a_k = 2^k - 1$. Доказать, что если от произвольно выбранного члена этой последовательности вычесть сумму всех предыдущих членов, то в результате получится порядковый номер выбранного члена последовательности.

**5.** Доказать, что если гипотенуза прямоугольного треугольника в четыре раза длиннее опущенной на неё высоты, то один из углов этого треугольника равен $15^\circ$.

**6.** На координатной плоскости в каждую точку с целочисленными координатами записано одно число, причём не все эти числа равны между собой и каждое из этих чисел является средним арифметическим чисел, записанных в четырёх ближайших соседних точках. Возможно ли, что

а) все записанные числа являются целыми;

б) все записанные числа являются натуральными?