

## LVI Олимпиада Эстонии по математике

31 января 2009 г.

Региональный тур

10 класс

*Время, отводимое для решения: 5 часов.*

*Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.*

*Пользоваться калькулятором не разрешается.*

1. Периметр и площадь прямоугольника такие же как и у четвёртой части круга с радиусом 1. Найти размеры прямоугольника.
2. Найти все решения системы уравнений

$$\begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} - \frac{1}{xy} = 2 \\ \frac{x}{y} - \frac{y}{x} + \frac{1}{xy} = 1 \end{cases}$$

в действительных числах.

3. Чтобы настроиться на рабочий лад математик до начала рабочего дня умножает все простые числа, которые не превышают его возраст в пересчёте на дни, и прибавляет к полученному произведению 1. Возможно ли, что в результате он получит квадрат целого числа?
4. Доказать неравенство

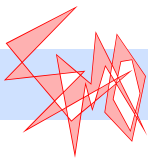
$$\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{2009^2}\right) > \frac{2}{3}.$$

5. Внутри квадрата  $ABCD$  выбраны точки  $E$  и  $F$  так, что

$$\angle EAB = \angle EBA = \angle FBC = \angle FCB = 15^\circ.$$

Найти величину угла  $FAE$ .

6. Каждое целое число на числовой оси покрашено либо в синий, либо в красный цвет. Доказать, что найдутся три целых числа одного цвета, которые лежат на числовой оси через равные промежутки.



## LVI Олимпиада Эстонии по математике

31 января 2009 г.

Региональный тур

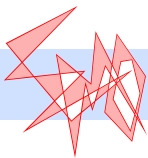
**11 класс**

*Время, отводимое для решения: 5 часов.*

*Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.*

*Пользоваться калькулятором не разрешается.*

1. Длина стороны ромба равна 1 и величина одного внутреннего угла равна  $45^\circ$ . Найти длины диагоналей этого ромба и радиус вписанной окружности.
2. Найти все такие углы  $\alpha$ , что  $0^\circ \leq \alpha < 360^\circ$  и  $\sin \alpha + \cos \alpha = 1$ .
3. Найдутся ли такие целые числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$ , что  $a + b$ ,  $a + c$ ,  $a + d$ ,  $b + c$ ,  $b + d$  и  $c + d$  являются шестью различными простыми числами?
4. Найти все такие действительные числа  $x$ , при которых  $\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} = 2x$ .
5. На плоскости даны четыре горизонтальные прямые, причём расстояние между двумя верхними и расстояние между двумя нижними прямыми различны. Можно ли выбрать на каждой прямой одну точку так, чтобы при соединении этих точек отрезками образовался параллелограмм?
6. Натуральные числа от 1 до 100 записаны на клетчатой доске размером  $10 \times 10$  так, что в каждом квадрате одно число и в каждом ряду числа расположены в возрастающем порядке. Каково наибольшее возможное значение суммы чисел шестого столбца?



## LVI Олимпиада Эстонии по математике

31 января 2009 г.

Региональный тур

12 класс

*Время, отводимое для решения: 5 часов.*

*Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.*

*Пользоваться калькулятором не разрешается.*

1. Центр описанной окружности равнобедренного треугольника находится в точке начала координат, а конечные точки одной из боковых сторон имеют координаты  $(-3, -1)$  и  $(1, -3)$ . Найти возможные координаты третьей вершины этого треугольника.
2. График квадратичной функции  $y = ax^2 + bx + c$  симметричен относительно оси  $y$ . Если отобразить её график относительно оси  $x$  и сдвинуть его на 2 единицы в положительном направлении оси  $x$ , то полученный в результате график и первоначальный график пересекут ось  $x$  в одной и той же точке, а их общая касательная в этой точке образует с осью  $x$  угол  $45^\circ$ . Найти все такие комплекты чисел  $(a, b, c)$ .
3. Найти наименьшее положительное целое число, половина которого является квадратом некоторого целого числа и треть которого является кубом некоторого целого числа.
4. Общим членом последовательности  $a_1, a_2, \dots$  является  $a_k = 2^k - 1$ . Доказать, что если от произвольно выбранного члена этой последовательности вычесть сумму всех предыдущих членов, то в результате получится порядковый номер выбранного члена последовательности.
5. Доказать, что если гипотенуза прямоугольного треугольника в четыре раза длиннее опущенной на неё высоты, то один из углов этого треугольника равен  $15^\circ$ .
6. На координатной плоскости в каждую точку с целочисленными координатами записано одно число, причём не все эти числа равны между собой и каждое из этих чисел является средним арифметическим чисел, записанных в четырёх ближайших соседних точках. Возможно ли, что
  - а) все записанные числа являются целыми;
  - б) все записанные числа являются натуральными?