

Eesti LVI matemaatikaolümpiaad

31. jaanuar 2009

Piirkonnavoore

10. klass

Lahendamisaega on 5 tundi.

Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.

Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Ristküliku ümbermõõt ja pindala on samad nagu veerandringil raadiusega 1. Leia ristküliku mõõtmed.
2. Leia võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} - \frac{1}{xy} = 2 \\ \frac{x}{y} - \frac{y}{x} + \frac{1}{xy} = 1 \end{cases}$$

kõik reaalarvulised lahendid.

3. Matemaatik korrutab enne tööpäeva algust soojenduseks kõik algarvud, mis ei ületa tema vanust päevades, ja liidab saadud korrutisele 1. Kas on võimalik, et ta saab tulemuseks täisarvu ruudu?
4. Tõesta võrratus

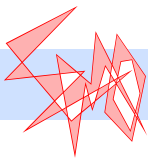
$$\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{2009^2}\right) > \frac{2}{3}.$$

5. Ruudu $ABCD$ sees võetakse punktid E ja F nii, et

$$\angle EAB = \angle EBA = \angle FBC = \angle FCB = 15^\circ.$$

Leia nurga FAE suurus.

6. Iga täisarv arvteljel on värvitud kas siniseks või punaseks. Tõesta, et leiduvad kolm sama värvi täisarvu, mis paiknevad arvteljel võrdsete vahede tagant.



Eesti LVI matemaatikaolümpiaad

31. jaanuar 2009

Piirkonnavoore

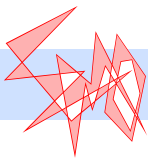
11. klass

Lahendamisaega on 5 tundi.

Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.

Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Rombi küljepikkus on 1 ja ühe sisenurga suurus on 45° . Leia selle rombi diagonaalide pikkused ja siseringjoone raadius.
2. Leia kõik sellised nurgad α , et $0^\circ \leq \alpha < 360^\circ$ ja $\sin \alpha + \cos \alpha = 1$.
3. Kas saab valida täisarvud a, b, c ja d nii, et $a + b, a + c, a + d, b + c, b + d$ ja $c + d$ on kuus erinevat algarvu?
4. Leia kõik sellised reaalarvud x , mille korral $\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} = 2x$.
5. Tasandil on antud neli horisontaalset sirget, kusjuures kahe ülemise vaheline kaugus ja kahe alumise vaheline kaugus on erinevad. Kas saab valida igal sirgel ühe punkti selliselt, et nende punktide ühendamisel sirglõikudega tekib rööpkülik?
6. Naturaalarvud 1 kuni 100 kirjutatakse ruudustikku mõõtmetega 10×10 nii, et igas ruudus asub üks arv ja igas reas on arvud kasvavalt järjestatud. Milline on kuuenda veeru arvude summa suurim võimalik väärtus?



Eesti LVI matemaatikaolümpiaad

31. jaanuar 2009

Piirkonnavoore

12. klass

Lahendamisaega on 5 tundi.

Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.

Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Võrdhaarse kolmnurga ümberringjoone keskpunkt paikneb koordinaatide alguspunktis ning ühe haara otspunktid on koordinaatidega $(-3, -1)$ ja $(1, -3)$. Leia selle kolmnurga kolmanda tipu võimalikud koordinaadid.
2. Ruutfunktsiooni $y = ax^2 + bx + c$ graafik on sümmeetriline y -telje suhtes. Kui peegeldada seda graafikut x -telje suhtes ja nihutada 2 ühiku võrra x -telje positiivses suunas, siis tulemuseks saadav graafik ja esialgne graafik lõikavad x -telge ühes ja samas punktis ning nende ühine puutuja selles punktis moodustab x -teljega nurga 45° . Leia kõik sellised arvukomplektid (a, b, c) .
3. Leia vähim positiivne täisarv, millest pool on mingi täisarvu ruut ja kolmandik on mingi täisarvu kuup.
4. Jada a_1, a_2, \dots üldliige on $a_k = 2^k - 1$. Tõesta, et kui selle jada suvaliselt valitud liikmest lahutada kõigi temale eelnevate liikmete summa, on tulemuseks valitud liikme järjekorranumber.
5. Tõesta, et kui täisnurkse kolmnurga hüpotenuus on neli korda pikem temale tõmmatud kõrgusest, siis selle kolmnurga üks nurkadest on 15° .
6. Koordinaattasandi igasse täisarvuliste koordinaatidega punkti kirjutatakse üks arv, kusjuures need arvud ei ole kõik võrdsed ning igaüks neist arvudest on oma nelja lähima naaberpunkti arvude aritmeetiline keskmine. Kas on võimalik, et
 - a) kõik kirjutatud arvud on täisarvud;
 - b) kõik kirjutatud arvud on naturaalarvud?