Piirkonnavoor 2009

I osa. *Lahendamisaega on 40 minutit.*
Sellele lehele kirjuta ainult vastused.
Iga ülesande õige vastus annab 2 punkti.
Lahendamiseks lubatakse kasutada kirjutus- ja joonistusvahendeid ning korraldajate poolt antavat lisapaberit. Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Arvuta:

$$\frac{2007 + 2 \cdot (2008 + 2009 + 2010) + 2011}{2009} = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

2. Paiguta sulud nii, et kehtiks võrdus:

$$1 \quad + \quad 2 \quad \cdot \quad 3 \quad - \quad 4 \quad : \quad 5 \quad = \quad 1.$$

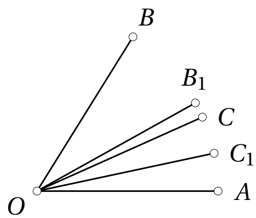
3. Arv 222000000999 jagatakse arvuga 111. Mitmekohaline on jagatis?

. . . .

4. Korrutatakse kõik paaritud arvud alates arvust 1 ja lõpetades arvuga 2009. Leia korrutise üheliste number.

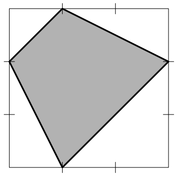
. . . .

5. Olgu $\angle AOB = 58^\circ$ ja $\angle AOC = 24^\circ$ (vt joonist). Olgu OB_1 nurga AOB poolitaja ja OC_1 nurga AOC poolitaja. Leia nurga B_1OC_1 suurus.



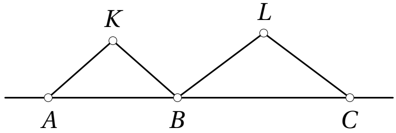
. . . .

6. Ruudu iga külg on jaotatud kolmeks võrdseks osaks. Tumedaks värvitud nelinurga tipud asuvad ruudu külgedel jaotuspunktides (vt joonist). Leia ruudu külje pikkus, kui tumedaks värvitud nelinurga pindala on 50 cm^2.



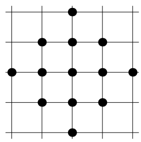
. . . .

7. Punktid A, B ja C asuvad ühel sirgel ning punktid K ja L asuvad väljaspool seda sirget (vt joonist). Lõikude AB ja BC pikkused on täisarvulised ning $|AK| = |KB| = 4$ ja $|BL| = |LC| = 5$. Leia lõigu AC suurim võimalik pikkus.



. . . .

8. Ruudulisel paberil on märgitud 13 punkti joonisel näidatud viisil. Kui palju leidub ruute, mille kõik tipud asuvad märgitud punktides? (Loendada tuleb ka need ruudud, mis ei lange kokku ruudulise paberi ruutudega.)

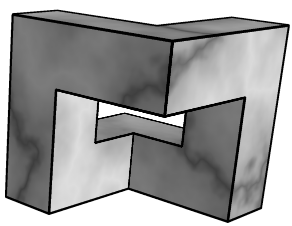


. . . .

9. Uuel CD-plaadil on laule nii eesti kui vene keeles. Rohkem kui 95% lauludest on eestikeelsed. Milline on vähim võimalik laulude arv sellel plaadil?

. . . .

10. Kuubist mõõtmetega $3 \times 3 \times 3$ on eemaldatud mõned ühikkuubid ja saadud joonisel olev keha. Mitu ühikkuupi on eemaldatud?



. . . .

Eesti LVI matemaatikaolümpiaad

31. jaanuar 2009 Piirkonnavoor **8. klass**

I osa. *Lahendamisaega on 40 minutit.*
Sellele lehele kirjuta ainult vastused.
Iga ülesande õige vastus annab 2 punkti.
Lahendamiseks lubatakse kasutada kirjutus- ja joonistusvahendeid ning korraldajate poolt antavat lisapaberit. Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Arvud A, B, C, D ja E on viis järjestikust naturaalarvu kasvavas järjekorras. Leia arvude A ja E summa, kui $B + C + D = 63$.

. . . .

2. Paiguta sulud nii, et kehtiks võrdus:

$$1 \quad : \quad 2 \quad + \quad 3 \quad : \quad 4 \quad : \quad 5 \quad = \quad 4.$$

3. Juku leidis riidekappi korrastades, et pooltel tema vasaku käe kinnastest ja kahel kolmandikul parema käe kinnastest puudub paariline. Mitu protsenti Juku kinnastest on ilma paariliseta?

. . . .

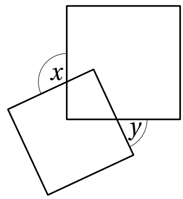
4. Kõik algarvud, mis pole suuremad kui 2009, korrutatakse omavahel. Leia korrutise üheliste number.

. . . .

5. Kui palju on selliseid naturaalarve m, et mingi naturaalarvu n korral $m^n = 16$?

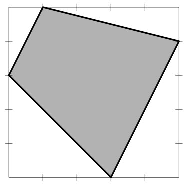
. . . .

6. Kaks ruutu kattuvad joonisel näidatud viisil. Leia nurkade x ja y summa.



....

7. Ruudu iga külg on jaotatud viieks võrdseks osaks. Tumedaks värvitud nelinurga tipud asuvad ruudu külgedel jaotuspunktides (vt joonist). Leia ruudu külje pikkus, kui tumedaks värvitud osa pindala on $8\ \mathrm{cm}^2$ võrra suurem ruudu värvimata osa pindalast.

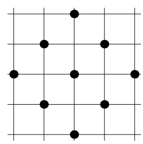


....

8. Lõik on jaotatud neljaks osaks nii, et esimese osa pikkus on võrdne teise ja kolmanda osa pikkuste summaga. Kaks pikimat osa on mõlemad pikkusega $4\ \mathrm{cm}$. Leia terve lõigu pikkus.

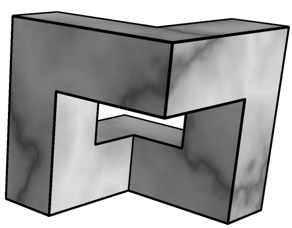
....

9. Ruudulisel paberil on märgitud 9 punkti joonisel näidatud viisil. Mitu sellist võrdhaarset täisnurkset kolmnurka leidub, mille kõik tipud asuvad märgitud punktides?



....

10. Kuubist mõõtmetega $3 \times 3 \times 3$ on eemaldatud mõned ühikkuubid ja saadud joonisel olev keha. Leia selle keha täispindala.



....

Eesti LVI matemaatikaolümpiaad

31. jaanuar 2009 Piirkonnavoor **9. klass**

I osa. *Lahendamisaega on 40 minutit.*
Sellele lehele kirjuta ainult vastused.
Iga ülesande õige vastus annab 2 punkti.
Lahendamiseks lubatakse kasutada kirjutus- ja joonistusvahendeid ning korraldajate poolt antavat lisapaberit. Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Arvud A, B, C, D ja E on viis järjestikust naturaalarvu kasvavas järjekorras. Leia arvude B ja D summa, kui $A + C + E = 63$.

. . . .

2. Leia esimese 2009 positiivse paaritu arvu aritmeetiline keskmine.

. . . .

3. Algarvude p ja q korral kehtib võrdus $4p + 11q = 66$. Leia arvude p ja q summa.

. . . .

4. Kui palju on selliseid täisarve m, et mingi täisarvu n korral $m^n = 81$?

. . . .

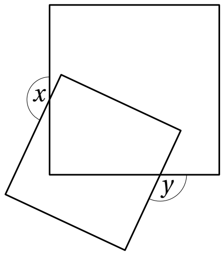
5. Avaldises $(a + b + c + d)(a + b - c - d)$ avatakse sulud ja koondatakse sarnased liikmed. Mitu liidetavat on tulemuses?

. . . .

6. Ühe reklaamipausi ajal näidatud klippidest vähem kui 50%, aga rohkem kui 40% reklaamisid toiduaineid. Leia vähim võimalik klippide arv selle pausi ajal.

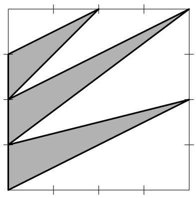
....

7. Kaks ruutu kattuvad joonisel näidatud viisil. Leia nurkade x ja y summa.



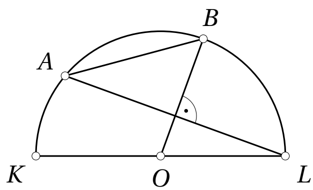
....

8. Ruudu iga külg on jaotatud neljaks võrdseks osaks. Tumedaks värvitud kolmnurkade tipud asuvad ruudu külgedel jaotuspunktides (vt joonist). Leia ruudu värvimata ja tumedaks värvitud osade pindalade suhe.



....

9. Poolringjoonel diameetriga KL ja keskpunktiga O asuvad punktid A ja B nii, et lõik AL on risti lõiguga OB. Leia nurga ABO suurus, kui $\angle KOB = 110^\circ$.



....

10. Mitu sellist täisnurkset kolmnurka leidub, mille kõik tipud asuvad etteantud kuubi tippudes?

....

Eesti LVI matemaatikaolümpiaad

31. jaanuar 2009 Piirkonnavoor **7. klass**

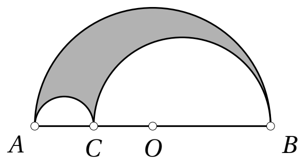
II osa. *Lahendamisaega on 2 tundi.*
Ülesannete lahendused kirjuta eraldi lehele.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti. Ainult vastusest ei piisa!
Lahendamiseks lubatakse kasutada kirjutus- ja joonistusvahendeid ning korraldajate poolt antavat lisapaberit. Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Ema, isa ja lapse eelmise kuu telefoniarved on kokku 550 krooni. Kui lapse telefoniarve oleks kaks korda suurem, ema oma kolmandiku võrra väiksem ning isa oma 50 krooni võrra suurem, siis oleksid need kolm telefoniarvet võrdsed. Kui suured on ema, isa ja lapse telefoniarved?

2. Neli kolmekohalist arvu kasvavas järjekorras on $\overline{ab4}$, $\overline{b03}$, $\overline{b3c}$ ja $\overline{ba1}$, kusjuures iga kahe järjestikuse arvu vahe on üks ja sama. Leia numbrid a, b ja c.

   Märkus. Kirjutis $\overline{xyz}$ tähistab arvu, mille numbrid vasakult paremale lugedes on x, y ja z.

3. Poolringi diameetrile AB pikkusega 16 cm toetuvad kaks poolringi diameetritega AC ja CB (vt joonist). Punkt O poolitab lõigu AB, punkt C poolitab lõigu AO.



   a) Leia tumedaks värvitud ala täpne pindala.
   b) Mitu protsenti moodustab poolringi tumedaks värvitud ala pindala selle poolringi ülejäänud osa pindalast?

Eesti LVI matemaatikaolümpiaad

31. jaanuar 2009 Piirkonnavoor **8. klass**

II osa. *Lahendamisaega on 2 tundi.*
Ülesannete lahendused kirjuta eraldi lehele.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti. Ainult vastusest ei piisa!
Lahendamiseks lubatakse kasutada kirjutus- ja joonistusvahendeid ning korraldajate poolt antavat lisapaberit. Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Markol, Ovel ja Kristjanil on igaühel täpselt üks arvutimängudest *Need for Speed*, *FIFA Soccer* ja *Counter-Strike*. Igal poisil on erinev arvutimäng. Poistest üks õpib 7. klassis, üks 8. klassis ja üks 9. klassis. Tee kindlaks, mitmenda klassi poiss on Ove ja milline arvutimäng tal on, kui järgnevad väited on tõesed.

a) Marko ei õpi 7. klassis.

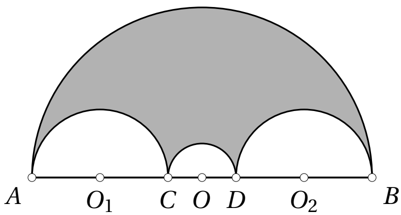
b) Kaheksanda klassi poisil on mäng *Need for Speed*.

c) Seitsmenda klassi poisil ei ole mängu *Counter-Strike*.

d) Kristjanil ei ole mängu *FIFA Soccer*.

2. Olgu a, b, c, d, e ja f erinevad arvud 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ja 9 seast. On teada, et $a \cdot b = c \cdot d \cdot e \cdot f$. Leia summa $a + b + c + d + e + f$ võimalikud väärtused.

3. Poolringi diameetrile AB pikkusega 20 cm toetuvad kaks võrdset poolringi diameetritega AC ja DB, mille keskpunktid on vastavalt O_1 ja O_2, ning kolmas poolring diameetriga CD, mille keskpunkt on O (vt joonist). Lõik CO on 4 korda lühem lõigust AC.



a) Leia tumedaks värvitud osa täpne pindala.

b) Kui suur on sellise poolringi raadius, mille pindala võrdub tumedaks värvitud osa pindalaga?

Eesti LVI matemaatikaolümpiaad

31. jaanuar 2009 Piirkonnavoor **9. klass**

II osa. *Lahendamisaega on 4 tundi.*
Ülesannete lahendused kirjuta eraldi lehele.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti. Ainult vastusest ei piisa!
Lahendamiseks lubatakse kasutada kirjutus- ja joonistusvahendeid ning korraldajate poolt antavat lisapaberit. Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Leia kõik kolmekohalised naturaalarvud, mille lisamisel arvu 2009 lõppu tekib 7-kohaline arv, mis jagub arvudega 2, 3, 4, 5, 6, 7 ja 8.

2. Kortermajas on kaht tüüpi kortereid: ühed on teistest kaks korda suurema pinnaga, kuid esimesi on teistest kaks korda vähem. Kui maja remondi maksumus jagataks korterite vahel võrdselt, tuleks iga korteri omanikul maksta 1000 krooni. Kui palju tuleks remondi eest maksta väiksema korteri omanikul, kui remondi maksumus jagataks võrdeliselt korterite pinnaga?

3. Võrdhaarse trapetsi diagonaal on niisama pikk kui pikem alus ja haar on niisama pikk kui lühem alus. Leia trapetsi nurkade suurused.

4. Banaanias on 2009 ärimeest, kes sooritavad äritehinguid ainult omavahel (iseendaga tehinguid sooritada ei saa). Lõppeval kuul oli igal Banaania ärimehel paarisarv tehingupartnereid (võib olla ka 0). Tõesta, et Banaanias leidub kolm ärimeest, kellel oli lõppeval kuul sama arv tehingupartnereid.

Eesti LVI matemaatikaolümpiaad

31. jaanuar 2009 Piirkonnavoor **10. klass**

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Ristküliku ümbermõõt ja pindala on samad nagu veerandringil raadiusega 1. Leia ristküliku mõõtmed.

2. Leia võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} - \dfrac{1}{xy} = 2 \\ \dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x} + \dfrac{1}{xy} = 1 \end{cases}$$

kõik reaalarvulised lahendid.

3. Matemaatik korrutab enne tööpäeva algust soojenduseks kõik algarvud, mis ei ületa tema vanust päevades, ja liidab saadud korrutisele 1. Kas on võimalik, et ta saab tulemuseks täisarvu ruudu?

4. Tõesta võrratus

$$\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{2009^2}\right) > \frac{2}{3}.$$

5. Ruudu $ABCD$ sees võetakse punktid E ja F nii, et

$$\angle EAB = \angle EBA = \angle FBC = \angle FCB = 15^\circ.$$

Leia nurga FAE suurus.

6. Iga täisarv arvteljel on värvitud kas siniseks või punaseks. Tõesta, et leiduvad kolm sama värvi täisarvu, mis paiknevad arvteljel võrdsete vahede tagant.

Eesti LVI matemaatikaolümpiaad

31. jaanuar 2009 Piirkonnavoor **11. klass**

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Rombi küljepikkus on 1 ja ühe sisenurga suurus on 45°. Leia selle rombi diagonaalide pikkused ja siseringjoone raadius.

2. Leia kõik sellised nurgad α, et $0^\circ \leqslant \alpha < 360^\circ$ ja $\sin\alpha + \cos\alpha = 1$.

3. Kas saab valida täisarvud a, b, c ja d nii, et $a+b$, $a+c$, $a+d$, $b+c$, $b+d$ ja $c+d$ on kuus erinevat algarvu?

4. Leia kõik sellised reaalarvud x, mille korral $\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} = 2x$.

5. Tasandil on antud neli horisontaalset sirget, kusjuures kahe ülemise vaheline kaugus ja kahe alumise vaheline kaugus on erinevad. Kas saab valida igal sirgel ühe punkti selliselt, et nende punktide ühendamisel sirglõikudega tekib rööpkülik?

6. Naturaalarvud 1 kuni 100 kirjutatakse ruudustikku mõõtmetega 10×10 nii, et igas ruudus asub üks arv ja igas reas on arvud kasvavalt järjestatud. Milline on kuuenda veeru arvude summa suurim võimalik väärtus?

Eesti LVI matemaatikaolümpiaad

31. jaanuar 2009 Piirkonnavoor **12. klass**

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Võrdhaarse kolmnurga ümberringjoone keskpunkt paikneb koordinaatide alguspunktis ning ühe haara otspunktid on koordinaatidega $(-3,-1)$ ja $(1,-3)$. Leia selle kolmnurga kolmanda tipu võimalikud koordinaadid.

2. Ruutfunktsiooni $y = ax^2 + bx + c$ graafik on sümmeetriline y-telje suhtes. Kui peegeldada seda graafikut x-telje suhtes ja nihutada 2 ühiku võrra x-telje positiivses suunas, siis tulemuseks saadav graafik ja esialgne graafik lõikavad x-telge ühes ja samas punktis ning nende ühine puutuja selles punktis moodustab x-teljega nurga 45°. Leia kõik sellised arvukomplektid (a, b, c).

3. Leia vähim positiivne täisarv, millest pool on mingi täisarvu ruut ja kolmandik on mingi täisarvu kuup.

4. Jada $a_1, a_2, \ldots$ üldliige on $a_k = 2^k - 1$. Tõesta, et kui selle jada suvaliselt valitud liikmest lahutada kõigi temale eelnevate liikmete summa, on tulemuseks valitud liikme järjekorranumber.

5. Tõesta, et kui täisnurkse kolmnurga hüpotenuus on neli korda pikem temale tõmmatud kõrgusest, siis selle kolmnurga üks nurkadest on 15°.

6. Koordinaattasandi igasse täisarvuliste koordinaatidega punkti kirjutatakse üks arv, kusjuures need arvud ei ole kõik võrdsed ning igaüks neist arvudest on oma nelja lähima naaberpunkti arvude aritmeetiline keskmine. Kas on võimalik, et
   a) kõik kirjutatud arvud on täisarvud;
   b) kõik kirjutatud arvud on naturaalarvud?

LVI Олимпиада Эстонии по математике

31 января 2009 г. Региональный тур **7 класс**

I часть. *Время, отводимое для решения: 40 минут.*
На этом листке написать только ответы.
Верный ответ каждой задачи даёт 2 балла.
Во время решения можно использовать письменные и чертёжные принадлежности, а также дополнительную бумагу, выданную организаторами совернования.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Вычислить:

$$\frac{2007 + 2 \cdot (2008 + 2009 + 2010) + 2011}{2009} = \;\ldots\ldots\ldots\ldots$$

2. Поставить скобки так, чтобы действовало равенство

$$1 \quad + \quad 2 \quad \cdot \quad 3 \quad - \quad 4 \quad : \quad 5 \quad = \quad 1.$$

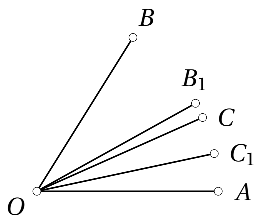
3. Число 222000000999 поделили на число 111. Сколькозначное частное получили?

. . . .

4. Перемножены все нечётные числа, начиная с числа 1 и заканчивая числом 2009. Найти цифру единиц произведения.

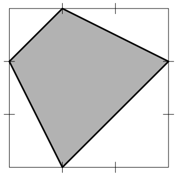
. . . .

5. Пусть $\angle AOB = 58^\circ$ и $\angle AOC = 24^\circ$ (см рисунок). Пусть OB_1 биссектриса угла AOB и OC_1 биссектриса угла AOC. Найти величину угла B_1OC_1.



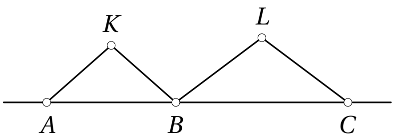
. . . .

6. Каждая сторона квадрата поделена на три равные части. Вершины закрашенного тёмным цветом четырёхугольника находятся в точках разделения сторон квадрата (см рисунок). Найти длину стороны квадрата, если площадь закрашенного тёмным цветом четырёхугольника равна 50 см^2.



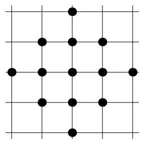
. . . .

7. Точки A, B и C лежат на одной прямой, а точки K и L лежат вне этой прямой (см рисунок). Длины отрезков AB и BC являются целочисленными, $|AK| = |KB| = 4$ и $|BL| = |LC| = 5$. Найти наибольшую возможную длину отрезка AC.



. . . .

8. На клетчатой бумаге обозначены 13 точек так, как показано на рисунке. Сколько найдётся таких квадратов, все вершины которых находятся в обозначенных точках? (Посчитать нужно и те квадраты, которые не совпадают с квадратами клетчатой бумаги.)

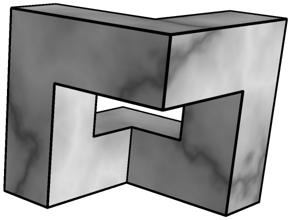


. . . .

9. На новом CD-диске есть песни как на эстонском, так и на русском языке. Более 95% песен эстоноязычные. Каково наименьшее возможное число песен на этом диске?

. . . .

10. Из куба размером $3 \times 3 \times 3$ вырезали несколько единичных кубов и получили изображённое на рисунке тело. Сколько единичных кубов вырезали?



. . . .

LVI Олимпиада Эстонии по математике

31 января 2009 г. Региональный тур **8 класс**

I часть. *Время, отводимое для решения: 40 минут.*
На этом листке написать только ответы.
Верный ответ каждой задачи даёт 2 балла.
Во время решения можно использовать письменные и чертёжные принадлежности, а также дополнительную бумагу, выданную организаторами соверновавния.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Числа A, B, C, D и E являются пятью последовательными натуральными числами в возрастающем порядке. Найти сумму чисел A и E, если $B + C + D = 63$.

. . . .

2. Поставить скобки так, чтобы действовало равенство

$$1 \quad : \quad 2 \quad + \quad 3 \quad : \quad 4 \quad : \quad 5 \quad = \quad 4.$$

3. Разбирая свой шкаф, Юку обнаружил, что у половины из его перчаток на правую руку и у двух третьих из его перчаток на левую руку отсутствует парная перчатка. У скольки процентов перчаток Юку отсутствует парная перчатка?

. . . .

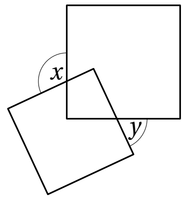
4. Перемножены все простые числа, которые не больше 2009. Найти цифру единиц произведения.

. . . .

5. Сколько найдётся таких натуральных чисел m, что при каком-либо натуральном числе n действует $m^n = 16$?

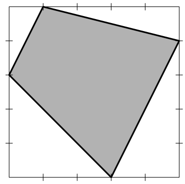
. . . .

6. Два квадрата расположены так, как показано на рисунке. Найти сумму углов x и y.



. . . .

7. Каждая сторона квадрата поделена на пять равных частей. Вершины закрашенного тёмным цветом четырёхугольника находятся в точках разделения сторон квадрата (см рисунок). Найти длину стороны квадрата, если площадь закрашенного тёмным цветом четырёхугольника на 8 см^2 больше площади незакрашенной части квадрата.

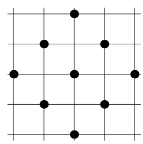


. . . .

8. Отрезок разделён на четыре части так, что длина его первой части равна сумме длин второй и третьей частей. Длина обеих частей наибольшей длины равна 4 см. Найти длину целого отрезка.

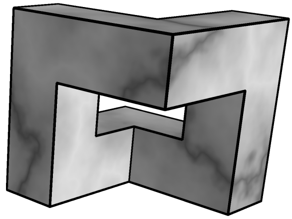
. . . .

9. На клетчатой бумаге обозначены 9 точек так, как показано на рисунке. Сколько найдётся таких равнобедренных прямоугольных треугольников, все вершины которых находятся в обозначенных точках?



. . . .

10. Из куба размером $3 \times 3 \times 3$ вырезали несколько единичных кубов и получили изображённое на рисунке тело. Найти площадь полной поверхности этого тела.



. . . .

LVI Олимпиада Эстонии по математике

31 января 2009 г. Региональный тур **9 класс**

I часть. *Время, отводимое для решения: 40 минут.*
На этом листке написать только ответы.
Верный ответ каждой задачи даёт 2 балла.
Во время решения можно использовать письменные и чертёжные принадлежности, а также дополнительную бумагу, выданную организаторами соревнования.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Числа A, B, C, D и E являются пятью последовательными натуральными числами в возрастающем порядке. Найти сумму чисел B и D, если $A + C + E = 63$.

. . . .

2. Найти арифметическое среднее первых 2009 положительных нечётных чисел.

. . . .

3. Для простых чисел p и q действует равенство $4p + 11q = 66$. Найти сумму чисел p и q.

. . . .

4. Сколько найдётся таких целых чисел m, что при каком-либо целом числе n действует $m^n = 81$?

. . . .

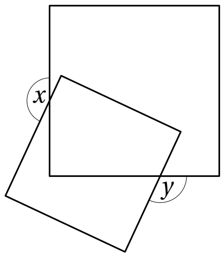
5. В выражении $(a + b + c + d)(a + b - c - d)$ раскрывают скобки и приводят подобные члены. Сколько слагаемых останется в результате?

. . . .

6. Из всех клипов, показанных во время одной рекламной паузы, менее 50%, но более 40% рекламировали продукты питания. Найти наименьшее возможное число клипов, показанных во время этой паузы.

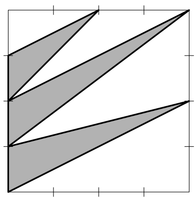
. . . .

7. Два квадрата расположены так, как показано на рисунке. Найти сумму углов x и y.



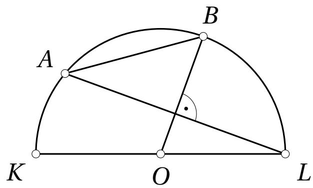
. . . .

8. Каждая сторона квадрата поделена на четыре равные части. Вершины закрашенных тёмным цветом треугольников находятся в точках разделения сторон квадрата (см рисунок). Найти отношение площадей незакрашенной и закрашенной тёмным цветом частей квадрата.



. . . .

9. Точки A и B лежат на полуокружности с диаметром KL и центром O так, что отрезок AL перпендикулярен отрезку OB. Найти величину угла ABO, если $\angle KOB = 110^\circ$.



. . . .

10. Сколько найдётся таких прямоугольных треугольников, все вершины которых находятся в вершинах заданного куба?

. . . .

LVI Олимпиада Эстонии по математике

31 января 2009 г. Региональный тур **7 класс**

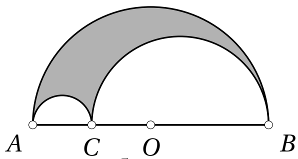
II часть. *Время, отводимое для решения: 2 часа.*
Решения задач написать на отдельном листе.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов. Написать только ответ недостаточно!
Во время решения можно использовать письменные и чертёжные принадлежности, а также дополнительную бумагу, выданную организаторами совернования.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Счета за телефон мамы, папы и ребёнка за предыдущий месяц составили в сумме 550 крон. Если бы счёт за телефон ребёнка был в два раза больше, мамин счёт на треть меньше, а папин счёт на 50 крон больше, то счета за телефон всех троих были бы равными. Каковы счета за телефон у мамы, папы и ребёнка?

2. Числа $\overline{ab4}$, $\overline{b03}$, $\overline{b3c}$ и $\overline{ba1}$ – четыре трёхзначных числа в возрастающем порядке, причём разность любых двух рядом стоящих чисел одна и та же. Найти цифры a, b и c.

Замечание. Запись $\overline{xyz}$ обозначает число, цифрами которого при прочтении слева направо являются x, y и z.

3. На диаметр AB, длина которого 16 см, полукруга опираются два полукруга с диаметрами AC и CB (см рисунок). Точка O делит пополам отрезок AB, точка C делит пополам отрезок AO.



а) Найти точную площадь закрашенной в тёмный цвет области.

б) Сколько процентов образует площадь закрашенной в тёмный цвет области полукруга от площади незакрашенной его области?

LVI Олимпиада Эстонии по математике

31 января 2009 г. Региональный тур **8 класс**

II часть. *Время, отводимое для решения: 2 часа.*
Решения задач написать на отдельном листе.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов. Написать только ответ недостаточно!
Во время решения можно использовать письменные и чертёжные принадлежности, а также дополнительную бумагу, выданную организаторами совернования.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. У Марко, Ове и Кристьяна ровно одна из компьютерных игр *Need for Speed*, *FIFA Soccer* и *Counter-Strike*. У каждого из мальчиков разная компьютерная игра. Один из мальчиков учится в 7-ом классе, один в 8-ом классе и один в 9-ом классе. Установить, из какого класса Ове и какая компьютерная игра у него есть, если следующие утверждения правдивы.

а) Марко не учится в 7-ом классе.

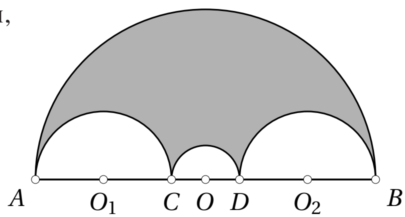
б) У мальчика из восьмого класса есть игра *Need for Speed*.

в) У мальчика из седьмого класса нет игры *Counter-Strike*.

г) У Кристьяна нет игры *FIFA Soccer*.

2. Пусть a, b, c, d, e и f различные числа из списка 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9. Известно, что $a \cdot b = c \cdot d \cdot e \cdot f$. Найти возможные значения суммы $a + b + c + d + e + f$.

3. На диаметр AB, длина которого 20 см, полукруга опираются два равных полукруга с диаметрами AC и DB, центрами которых являются соответственно точки O_1 и O_2, а также третий полукруг с диаметром CD, центром которого является точка O (см рисунок). Отрезок CO в 4 раза короче отрезка AC.



а) Найти точную площадь закрашенной в тёмный цвет части.

б) Чему равен радиус такого полукруга, площадь которого равна площади закрашенной в тёмный цвет части?

LVI Олимпиада Эстонии по математике

31 января 2009 г. Региональный тур **9 класс**

II часть. *Время, отводимое для решения: 4 часа.*
Решения задач написать на отдельном листе.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов. Написать только ответ недостаточно!
Во время решения можно использовать письменные и чертёжные принадлежности, а также дополнительную бумагу, выданную организаторами совернования.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Найти все трёхзначные натуральные числа, при добавлении которых в конец числа 2009 получится 7-значное число, которое делится на числа 2, 3, 4, 5, 6, 7 и 8.

2. В квартирном доме два вида квартир: площадь первого вида квартир в два раза больше площади второго вида квартир, зато первого вида квартир в два раза меньше, чем второго вида квартир. Если стоимость ремонта дома поделить между квартирами в равных долях, хозяева каждой квартиры заплатили бы 1000 крон. Сколько заплатили бы за ремонт хозяева меньших квартир, если стоимость ремонта поделить пропорционально площади квартир?

3. Диагональ равнобокой трапеции той же длины, что и большее основание, а боковая сторона трапеции той же длины, что и меньшее основание. Найти величины углов трапеции.

4. В стране Банании 2009 дельцов, которые совершают сделки только между собой (с самим собой сделку совершить невозможно). В завершающемся месяце у каждого дельца Банании было чётное число партнёров по сделке (их может быть и 0). Доказать, что в Банании найдётся три дельца, у которых в завершающемся месяце одно и то же число партнёров по сделке.

LVI Олимпиада Эстонии по математике

31 января 2009 г. Региональный тур **10 класс**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Периметр и площадь прямоугольника такие же как и у четвёртой части круга с радиусом 1. Найти размеры прямоугольника.

2. Найти все решения системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} - \dfrac{1}{xy} = 2 \\ \dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x} + \dfrac{1}{xy} = 1 \end{cases}$$

в действительных числах.

3. Чтобы настроиться на рабочий лад математик до начала рабочего для умножает все простые числа, которые не превышают его возраст в пересчёте на дни, и прибавляет к полученному произведению 1. Возможно ли, что в результате он получит квадрат целого числа?

4. Доказать неравенство

$$\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{2009^2}\right) > \frac{2}{3}.$$

5. Внутри квадрата $ABCD$ выбраны точки E и F так, что

$$\angle EAB = \angle EBA = \angle FBC = \angle FCB = 15^\circ.$$

Найти величину угла FAE.

6. Каждое целое число на числовой оси покрашено либо в синий, либо в красный цвет. Доказать, что найдутся три целых числа одного цвета, которые лежат на числовой оси через равные промежутки.

LVI Олимпиада Эстонии по математике

31 января 2009 г. Региональный тур **11 класс**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Длина стороны ромба равна 1 и величина одного внутреннего угла равна 45°. Найти длины диагоналей этого ромба и радиус вписанной окружности.

2. Найти все такие углы α, что $0^\circ \leqslant \alpha < 360^\circ$ и $\sin\alpha + \cos\alpha = 1$.

3. Найдутся ли такие целые числа a, b, c и d, что $a+b$, $a+c$, $a+d$, $b+c$, $b+d$ и $c+d$ являются шестью различными простыми числами?

4. Найти все такие действительные числа x, при которых $\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} = 2x$.

5. На плоскости даны четыре горизонтальные прямые, причём расстояние между двумя верхними и расстояние между двумя нижними прямыми различны. Можно ли выбрать на каждой прямой одну точку так, чтобы при соединении этих точек отрезками образовался параллелограмм?

6. Натуральные числа от 1 до 100 записаны на клетчатой доске размером 10×10 так, что в каждом квадрате одно число и в каждом ряду числа расположены в возрастающем порядке. Каково наибольшее возможное значение суммы чисел шестого столбца?

LVI Олимпиада Эстонии по математике

31 января 2009 г. Региональный тур **12 класс**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Центр описанной окружности равнобедренного треугольника находится в точке начала координат, а конечные точки одной из боковых сторон имеют координаты $(-3, -1)$ и $(1, -3)$. Найти возможные координаты третьей вершины этого треугольника.

2. График квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ симметричен относительно оси y. Если отобразить её график относительно оси x и сдвинуть его на 2 единицы в положительном направлении оси x, то полученный в результате график и первоначальный график пересекут ось x в одной и той же точке, а их общая касательная в этой точке образует с осью x угол 45°. Найти все такие комплекты чисел (a, b, c).

3. Найти наименьшее положительное целое число, половина которого является квадратом некоторого целого числа и треть которого является кубом некоторого целого числа.

4. Общим членом последовательности $a_1, a_2, \ldots$ является $a_k = 2^k - 1$. Доказать, что если от произвольно выбранного члена этой последовательности вычесть сумму всех предыдущих членов, то в результате получится порядковый номер выбранного члена последовательности.

5. Доказать, что если гипотенуза прямоугольного треугольника в четыре раза длиннее опущенной на неё высоты, то один из углов этого треугольника равен 15°.

6. На координатной плоскости в каждую точку с целочисленными координатами записано одно число, причём не все эти числа равны между собой и каждое из этих чисел является средним арифметическим чисел, записанных в четырёх ближайших соседних точках. Возможно ли, что

а) все записанные числа являются целыми;

б) все записанные числа являются натуральными?

Eesti LVI matemaatikaolümpiaad

31. jaanuar 2009 Piirkonnavoor **7. klass**

I osa vastused

1. 8.

2. $((1+2)\cdot 3-4):5=1$.

3. 10.

4. 5.

5. 17°.

6. 10 cm.

7. 16.

8. 11.

9. 21.

10. 15.

Lahendused

1. Võrduste $2007+2011=2\cdot 2009$ ja $2008+2010=2\cdot 2009$ abil saame, et

$$\frac{2007+2\cdot(2008+2009+2010)+2011}{2009}=\frac{2\cdot 2009+2\cdot(3\cdot 2009)}{2009}=\frac{8\cdot 2009}{2009}=8.$$

2. $((1+2)\cdot 3-4):5=(3\cdot 3-4):5=5:5=1$.

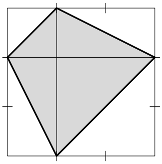
3. Kuna $222\,000\,000\,999:111=2\,000\,000\,009$, siis on jagatis 10-kohaline.

4. Paaritute arvude korrutis on alati paaritu arv. Antud arvude seas leidub arv 5. Kui korrutada mingi paaritu arv 5-ga, siis tulemuseks on alati 5-ga lõppev arv.

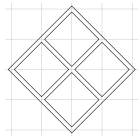
5. $\angle B_1OC_1=\frac{1}{2}\angle AOB-\frac{1}{2}\angle AOC=\frac{1}{2}\cdot 58^\circ-\frac{1}{2}\cdot 24^\circ=17^\circ$.

6. Tõmbame tumedaks värvitud nelinurga diagonaalid ja näeme, et tumedaks värvitud osa pindala on täpselt pool ruudu pindalast (joonis 1). Seega ruudu pindala on 100 cm^2, millest järeldub, et ruudu külje pikkus on 10 cm.

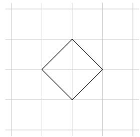
7. Teame, et $|AB|<|AK|+|KB|=4+4=8$ ja $|BC|<|BL|+|LC|=5+5=10$. Seega lõigu AB suurim võimalik täisarvuline pikkus on 7 ja lõigu BC suurim võimalik täisarvuline pikkus on 9. Järelikult lõigu AC suurim võimalik pikkus on 16.



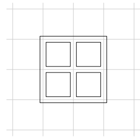
Joonis 1



Joonis 2



Joonis 3



Joonis 4

8. Ütleme, et ruudustik koosneb ühikruutudest. Siis leidub

- 1 ruut, mille küljepikkus võrdub ühikruudu diagonaali kahekordse pikkusega; 5 ruutu, mille küljepikkus võrdub ühikruudu diagonaali pikkusega (joonised 2 ja 3);
- 1 ruut, mille küljepikkus võrdub ühikruudu kahekordse küljepikkusega; 4 ruutu, mille küljepikkus võrdub ühikruudu küljepikkusega (joonis 4).

Seega leidub täpselt 11 ruutu.

9. Vastavalt ülesande tingimustele leidub vähemalt üks venekeelne laul. Kuna venekeelseid laule on vähem kui 5%, siis laulude arv peab olema suurem kui $1 : 0{,}05 = 20$. Laulude vähim võimalik arv on 21, sest kui plaadil on täpselt 20 eestikeelset ja 1 venekeelne laul, on ülesande tingimused rahuldatud.

10. Vahetu loendamise teel leiame, et alles on 12 ühikkuupi. Seega eemaldati $3 \cdot 3 \cdot 3 - 12 = 27 - 12 = 15$ ühikkuupi.

I osa vastused

1. 42.
2. $1 : ((2 + 3) : 4 : 5) = 4$
3. 60%.
4. 0.
5. 3.
6. 180°.
7. 10 cm.
8. 12 cm.
9. 28.
10. 48.

Lahendused

1. Kuna B, C ja D on kolm järjestikust naturaalarvu, siis saame, et $B+C+D = C-1+C+C+1 = 3C = 63$, millest $C = 21$. Seega $A+E = 21-2+21+2 = 42$.

2. $1 : ((2 + 3) : 4 : 5) = 1 : (5 : 4 : 5) = 1 : (1 : 4) = 4$.

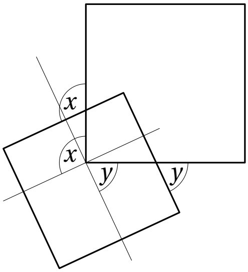
3. Olgu vasaku käe kinnaste arv $2x$, siis paariline on olemas x vasaku käe kindal. Järelikult on paariline olemas x parema käe kindal, mistõttu parema käe kindaid on $3x$. Kindaid on kokku $2x + 3x = 5x$ ja neist ilma paariliseta $x + 2x = 3x$. Niisiis on ilma paariliseta $\frac{3x}{5x} \cdot 100\% = 60\%$.

4. Korrutise tegurite seas on algarvud 2 ja 5 ning seega peab korrutis jaguma arvuga 10.

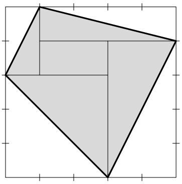
5. Võimalused on 16^1, 4^2 ja 2^4, seega kokku 3 võimalust.

6. *Lahendus 1.* Ruutude ühisosaks on nelinurk, mille kaks nurka on 90° ja kaks nurka on vastavalt võrdsed nurkadega x ja y. Et nelinurga sisenurkade summa on 360°, siis nurkade x ja y summa on 180°.

   Lahendus 2. Joonestame väiksema ruudu külgedega paralleelsed sirged, mis läbivad suure ruudu tippu, mis asub väiksema ruudu sees (joonis 5). Paralleelsete sirgete kolmanda sirgega lõikumisel tekkivad kaasnurgad on võrdsed, niisiis peab nurkade x ja y summa olema 180°.



Joonis 5



Joonis 6

7. *Lahendus 1.* Lugedes suure ruudu külje ühe jaotise pikkusühikuks, näeme, et suur ruut koosneb 25 ühikruudust. Paneme tähele, et tumedaks värvitud osa pindala on värvimata osa pindalast suurem 2 ühikruudu pindala võrra (joonis 6). Et see erinevus on $8\ \mathrm{cm}^2$, siis ühe ühikruudu külje pikkus on 2 cm ja järelikult suure ruudu külje pikkus on 10 cm.

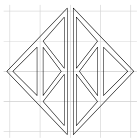
Lahendus 2. Olgu ruudu küljepikkus $5a$. Ruudu värvimata osa (neli täisnurkset kolmnurka) pindala on sel juhul

$$\frac{a\cdot 2a}{2}+\frac{a\cdot 4a}{2}+\frac{2a\cdot 4a}{2}+\frac{3a\cdot 3a}{2}=a^2+2a^2+4a^2+\frac{9}{2}a^2=\frac{23}{2}a^2.$$

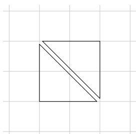
Värvitud osa pindala on seega $25a^2-\frac{23}{2}a^2=\frac{27}{2}a^2$ ning värvitud ja värvimata osa pindala vahe niisiis $\frac{27}{2}a^2-\frac{23}{2}a^2=2a^2$. Ülesande tingimuste põhjal $2a^2=8\ \mathrm{cm}^2$, millest $a=2$ cm. Seega ruudu küljepikkus on $5a=10$ cm.

8. Kuna esimene osa on ilmselt teisest ja kolmandast osast pikem ja kuna on öeldud, et kaks pikimat lõiku on mõlemad pikkusega 4 cm, siis esimese lõiguga saab sama pikk olla vaid neljas. Seega esimene ja neljas lõik on pikkusega 4 cm ning teise ja kolmanda pikkuste summa on ka 4 cm. Järelikult terve lõigu pikkus on 12 cm.

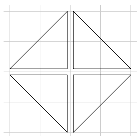
9. Loetleme ruudustikus olevad täisnurksed kolmnurgad hüpotenuusi pikkuse järgi:



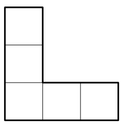
Joonis 7



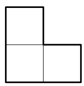
Joonis 8



Joonis 9



Joonis 10



Joonis 11

- kolmnurgad, mille hüpotenuusi pikkus on 2 ühikruudu külge – 16 tükki; kolmnurgad, mille hüpotenuusi pikkus on 4 ühikruudu külge – 4 tükki (joonis 7 ning selle 90° võrra pööratud variant).
- kolmnurgad, mille hüpotenuusi pikkus on 2 ühikruudu diagonaali – 8 tükki (joonised 8 ja 9 ning esimese joonise 90° võrra pööratud variant);

10. Vahetu loendamise teel selgub, et saadud kehal on joonisel 10 kujutatud tahkusid 6 ja joonisel 11 kujutatud tahkusid samuti 6. Kokkuvõttes on keha täispindala $6 \cdot 5 + 6 \cdot 3 = 30 + 18 = 48$.

Eesti LVI matemaatikaolümpiaad

31. jaanuar 2009 Piirkonnavoor **9. klass**

I osa vastused

1. 42.

2. 2009.

3. 13.

4. 5.

5. 6.

6. 7.

7. 270°.

8. $11:5$.

9. 55°.

10. 48.

Lahendused

1. Et $A + C + E = C - 2 + C + C + 2 = 3C = 63$, siis $C = 21$. Seega $B + D = 21 - 1 + 21 + 1 = 42$.

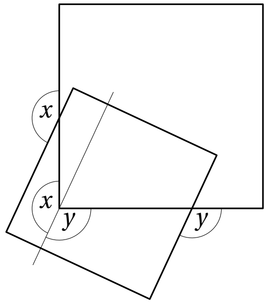
2. Esimesed 2009 positiivset paaritut arvu on: $1, 3, 5, \ldots, 4015, 4017$. Esimese ja viimase summa on 4018, teise ja eelviimase summa on 4018, jne. Selliseid paare moodustub 1004, lisaks jääb keskmine arv 2009. Seega nende arvude summa on $1004 \cdot 4018 + 2009 = (1004 \cdot 2 + 1) \cdot 2009$ ning nende aritmeetiline keskmine on $\dfrac{(1004 \cdot 2 + 1) \cdot 2009}{2009} = 2009$.

3. Et $4p$ ja 66 jaguvad arvuga 2, siis ka $11q$ peab jaguma arvuga 2 ja järelikult $q = 2$. Et $4p = 44$, siis $p = 11$ ja $p + q = 2 + 11 = 13$.

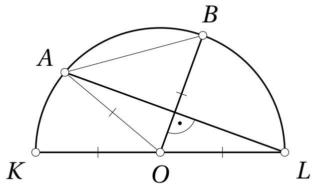
4. Võimalused on 81^1, 9^2, $(-9)^2$, 3^4 ja $(-3)^4$, seega kokku 5 võimalust.

5. $(a + b + c + d)(a + b - c - d) = (a + b)^2 - (c + d)^2$. Et kahe liidetava summa ruudus on kolm liidetavat, siis pärast sarnaste liikmete koondamist saadavas avaldises on 6 liidetavat.

6. Olgu pausi ajal näidatud reklaamiklippide arv x ja toiduainete reklaamiklippide arv y. Tarvis on leida x vähim võimalik väärtus, mille korral on võimalik, et $0{,}4 < \dfrac{y}{x} < 0{,}5$. Vahetu läbivaatus näitab, et taoline vähima nimetajaga murd on $\dfrac{3}{7}$.



Joonis 12



Joonis 13

7. *Lahendus 1.* Ruutude ühisosaks on viisnurk, mille kolm nurka on 90°. Nurkade x ja y summa on võrdne viisnurga kahe mittetäisnurkse nurga summaga: $x + y = (5-2) \cdot 180^\circ - 3 \cdot 90^\circ = 270^\circ$.

Lahendus 2. Joonestame väiksema ruudu küljega paralleelse sirge, mis läbib suure ruudu tippu, mis asub väiksema ruudu sees (joonis 12). Paralleelsete sirgete kolmanda sirgega lõikumisel tekkivad kaasnurgad on võrdsed, niisiis peab nurkade x ja y summa peab olema 270°.

8. Lugedes suure ruudu külje ühe jaotise pikkusühikuks, näeme, et suur ruut koosneb 16 ühikruudust. Kasutades kolmnurga pindala valemit aluse ja kõrguse kaudu, leiame, et värvitud osa pindala on $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 5$ ruutühikut. Seega moodustab tumedaks värvitud osa pindala $\frac{5}{16}$ kogu ruudu pindalast ja värvimata osa pindala $\frac{11}{16}$ kogu ruudu pindalast. Järelikult värvimata ja tumedaks värvitud osade pindalade suhe on $11 : 5$.

9. *Lahendus 1.* Nurk BAL on kaarele BL toetuv piirdenurk (joonis 13). Kuna $\angle BOL = 70^\circ$, siis $\angle BAL = 35^\circ$. Täisnurksest kolmnurgast saame, et $\angle ABO + \angle BAL = 90^\circ$ ja järelikult $\angle ABO = 55^\circ$.

Lahendus 2. Kuna $\angle BOL = 70^\circ$, siis täisnurksest kolmnurgast $\angle ALO = 20^\circ$. Võrdhaarsest kolmnurgast AOL leiame, et $\angle AOL = 180^\circ - 2 \cdot 20^\circ = 140^\circ$. Seega $\angle AOB = \angle AOL - \angle BOL = 70^\circ$, mis on ühtlasi võrdhaarse kolmnurga AOB tipunurk. Siit $\angle ABO = \dfrac{180^\circ - 70^\circ}{2} = 55^\circ$.

10. *Lahendus 1.* Paneme tähele, et kuubi iga tahu diagonaal saab olla hüpotenuusiks kahele täisnurksele kolmnurgale, mille kaatetiteks on siis selle tahu kaks serva. Selliseid täisnurkseid kolmnurki on võimalik saada 24.

Kuubi iga tahu diagonaal saab olla ka täisnurkse kolmnurga kaatetiks, kus hüpotenuusiks on kuubi diagonaal. Iga tahu iga diagonaal saab olla kaatetiks kahele täisnurksele kolmnurgale. Selliseid täisnurkseid kolmnurki on võimalik saada 24.

Niisiis täisnurkseid kolmnurki, mille kõik tipud asuvad kuubi tippudes, on 48.

Lahendus 2. Kuubi tippusid on 8 ning seega saab üleüldse nendest tippudest moodustada $\binom{8}{3} = 56$ kolmnurka. Sealjuures parajasti need kolmnurgad, mille kõik servad on tahkude diagonaalid, ei ole täisnurksed. Selliseid kolmnurki on 8 (kuubi iga tipu ümber üks), mistõttu täisnurkseid kolmnurki on $56 - 8 = 48$.

II osa lahendused

1. *Vastus:* lapse arve on 100 krooni, ema arve 300 krooni ja isa arve 150 krooni.

   Olgu x ülesande eelviimases lauses nimetatud telefoniarve, mis kõigil perioodidel oleks võrdne. Siis lapse telefoniarve on $\frac{1}{2}x$, ema oma on $\frac{3}{2}x$ ja isa oma on $x-50$. Ülesande tingimus annab, et

   $$\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}x+(x-50)=550.$$

   Lihtsustamisel saame võrrandi $3x=600$, millest $x=200$. Järelikult on lapse telefoniarve 100 krooni, ema oma 300 krooni ja isa oma 150 krooni.

2. *Vastus:* $a=6$, $b=7$ ja $c=2$.

   Kuna vahe $\overline{b03}-\overline{ab4}$ lõpeb numbriga 9, siis ka vahe $\overline{b3c}-\overline{b03}$ peaks lõppema numbriga 9, millest saame, et $c=2$. Kuna $c=2$, siis võime leida, mitme võrra on iga arv talle vahetult eelnevast arvust suurem:

   $$\overline{b3c}-\overline{b03}=\overline{b32}-\overline{b03}=32-3=29.$$

   Võrdusest $\overline{ba1}-\overline{b3c}=29$ saame, et $\overline{a1}=29+32=61$, millest järeldub, et $a=6$. Pidades silmas võrdust $\overline{b03}=\overline{ab4}+29$ ja asjaolu, et kolmekohalisele arvule kahekohalise liitmisel saab sajaliste number suureneda ülimalt ühe võrra, saame võrratuse $3<29$ tõttu, et $b=a+1=7$.

3. *Vastus:* a) 12π cm^2; b) 60%.

   Kuna $|AB|=16$ cm, siis $|AO|=|OB|=8$ cm ja $|AC|=|CO|=4$ cm. Väikese ja keskmise poolringi raadiused on siis 2 cm ja 6 cm. Nende poolringide pindalad on vastavalt $\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot 2^2=2\pi$ ja $\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot 6^2=18\pi$ ruutsentimeetrit, kokku 20π cm^2. Suure poolringi pindala on $\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot 8^2=32\pi$ ruutsentimeetrit.

   a) Tumedaks värvitud ala hõlmab $32\pi-20\pi=12\pi$ ruutsentimeetrit.

   b) Värvitud ja värvimata alade pindalade suhe on

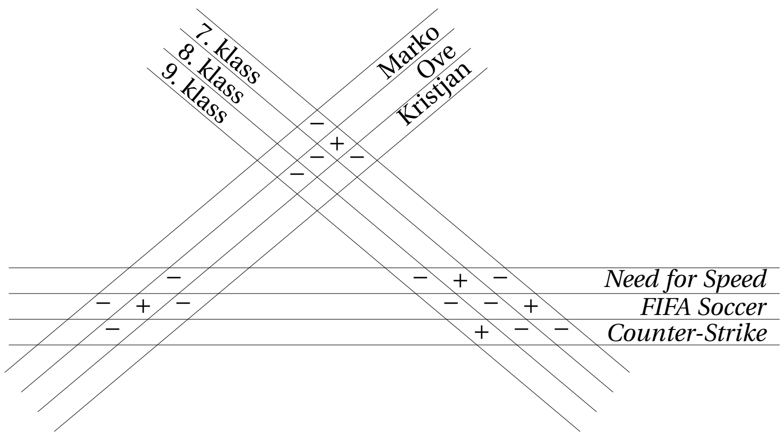
   $$\frac{12\pi}{20\pi}\cdot 100\%=60\%.$$

II osa lahendused

1. *Vastus:* Ove on 7. klassi poiss ja temal on arvutimäng *FIFA Soccer*.

Kuna mängu *Counter-Strike* ei ole 7. klassi õpilasel ja ka mitte 8. klassi õpilasel, sest 8. klassi õpilasel on mäng *Need for Speed*, siis mäng *Counter-Strike* on 9. klassi õpilasel. 7. klassi õpilasel on järelikult mäng *FIFA Soccer*. Et Marko ei ole 7. klassi õpilane ning Kristjan samuti mitte, sest temal pole mängu *FIFA Soccer*, siis 7. klassi õpilane ongi Ove ja talle kuulub mäng *FIFA Soccer*.

Märkus. Taolisi loogikaülesandeid saab hõlpsasti lahendada *vastavuste tabeli* koostamise teel (joonisel 14 on ülesandele vastav *kolme sisendiga* vastavuste tabel). Ülesande tingimuste kohaselt võib teadaolevad olukorrad märkida plussiga ning iga plussiga samas reas või veerus ülejäänud lahtrid märkida miinusega. Sedasi on võimalik tingimustest vahetult järeldatavad situatsioonid tabelis ära kirjeldada. Keerukamates ülesannetes on tarvis püstitada ka täiendavaid hüpoteese: olgu mingis tühjas lahtris pluss; kui õnnestub sellest järeldada vastuolu, siis selles lahtris tegelikult ei ole pluss.



Joonis 14

2. *Vastus:* 25 ja 31.

Vaatleme võrdust $a \cdot b = c \cdot d \cdot e \cdot f$, kus a, b, c, d, e ja f on erinevad ühekohalised arvud.

Kõigepealt näitame, et ükski arvudest ei saa olla 0, 5 ega 7:

- kui üks arvudest oleks 0, siis arvude erinevuse tõttu võrduse üks pooltest võrduks 0-ga, teine aga mitte;
- kui üks arvudest oleks 5 või 7, siis võrduse üks pooltest jaguks 5-ga või 7-ga, teine aga mitte.

Seega võimalikud arvud on 1, 2, 3, 4, 6, 8 ja 9. Täpselt üks arvudest ei saa võrduses $a \cdot b = c \cdot d \cdot e \cdot f$ esineda.

Vaatleme olukorda, kui 9 kindlasti esineb. Siis võrduse teisel pool peavad olema 3 ja 6. Ilmselt 3 ja 6 ei saa asuda vasakul poolel, sest vastasel korral parem pool jaguks 4-ga, vasak pool aga mitte. Niisiis on vasakul pool 9 ja veel mingi tegur. Vaatame, milline võib olla arv b.

- Kui $b = 1$, siis parem pool jagub 2-ga, vasak aga mitte, mis on võimatu.
- Kui $b = 2$, siis paremal muid tegureid peale 3 ja 6 olla ei saaks, mis on võimatu.
- Kui $b = 4$, siis oleme saanud võrduse $9 \cdot 4 = 3 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 1$ ning otsitav summa on $9 + 4 + 6 + 3 + 2 + 1 = 25$.
- Kui $b = 8$, siis oleme saanud võrduse $9 \cdot 8 = 3 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 1$ ning otsitav summa on $9 + 8 + 6 + 4 + 3 + 1 = 31$.

Kui arv 9 võrduses ei esine, siis peavad 3 ja 6 olema võrduse eri pooltel. Igal juhul arv 1 peab olema paremal, vastasel korral peaks 3 või 6 avalduma nelja 1-st erineva teguri korrutisena, mis on võimatu.

- Kui 3 oleks vasakul, siis arvudest 2, 4 ja 8 tuleks üks vasakule ja kaks paremale paigutada selliselt, et vasakul oleks täpselt üks tegur 2 rohkem. See pole aga võimalik.
- Kui 6 oleks vasakul, siis arvudest 2, 4 ja 8 tuleks üks vasakule ja kaks paremale paigutada selliselt, et paremal oleks täpselt üks tegur 2 rohkem. Ka see pole võimalik.

Märkus: Tähelepaneku, et 9 peab kindlasti võrduses esinema, saab teha ka vahetumalt. Kuna selle võrduse mõlemal poolel peab olema sama palju võrdseid algtegureid, siis see üks mitte esinev arv peab jaguma 2-ga: nimelt korrutis $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8$ sisaldab arvu 2 paaritul astmel ega ole seega jaotatav kaheks osaks nii, et kummalgi pool oleks sama kogus algtegurit 2.

3. *Vastus:* a) 32π cm^2; b) 8 cm.

Tingimustest ilmneb, et O on suure poolringi keskpunkt (asub diameetri otspunktidest ühekaugusel). Kuna $|AB| = 20$ cm, siis $|AO| = |OB| = 10$ cm. Et $|AC| = 4 \cdot |CO|$, siis $|AO| = |AC| + |CO| = 5 \cdot |CO|$, kust $|CO| = 2$ cm ja $|AO_1| = |O_1C| = |DO_2| = |O_2D| = 4$ cm. Väikse ja keskmise suurusega poolringide pindalad on siis vastavalt $\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 2^2 = 2\pi$ ja $\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 4^2 = 8\pi$ ruutsentimeetrit, kokku $2\pi + 2 \cdot 8\pi = 18\pi$ ruutsentimeetrit. Suure poolringi pindala on $\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 10^2 = 50\pi$ ruutsentimeetrit.

a) Tumedaks värvitud ala hõlmab $50\pi - 18\pi = 32\pi$ ruutsentimeetrit.

b) Olgu otsitava poolringi raadius x. Siis $\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot x^2 = 32\pi$ cm^2, kust $x^2 = 64$ cm^2. Järelikult $x = 8$ cm.

II osa lahendused

1. *Vastus:* 280.

Olgu saadud 7-kohalises arvus $N = \overline{2009xyz}$ x sajaliste, y kümneliste ja z üheliste number.

Arvu N jaguvusest 2 ja 5-ga järeldub, et $z = 0$. Nüüd N jagub 4-ga parajasti juhul, kui y on paarisnumber.

Kuna $2009 = 7 \cdot 287$, siis arv N jagub 7-ga parajasti siis, kui kolmekohaline arv $\overline{xy0}$ jagub 7-ga, kusjuures y on paarisnumber. Seega tuleb vaadelda kahekohalisi paarisarve $\overline{xy}$, mis jaguvad 7-ga. Need on 14, 28, 42, 56,70, 84 ja 98, millele lisandub võimalus $x = y = 0$. Et N jaguks ka 3-ga, peab summa $2 + x + y$ jaguma 3-ga. Siit sobivad $(x, y) = (7, 0)$ ja $(x, y) = (2, 8)$.

Jääb kontrollida, kumb leitud arvudest 2009700 ja 2009280 jagub 8-ga. Selgub, et viimane. Lõpuks, N jagub 6-ga, sest ta jagub 2 ja 3-ga.

2. *Vastus:* 750 krooni.

Lahendus 1. Olgu suurte korterite arv k, siis väikeste korterite arv on $2k$, korterite arv kokku $3k$ ning remondi kogumaksumus seega $3000k$ krooni. Paneme tähele, et suurte ja väikeste korterite kogupind on võrdne, seega jaotamisel võrdeliselt pinnaga maksavad väikesed korterid kokku $1500k$ krooni. Et väikesi kortereid on $2k$, siis iga korter maksab $\frac{1500k}{2k} = 750$ krooni.

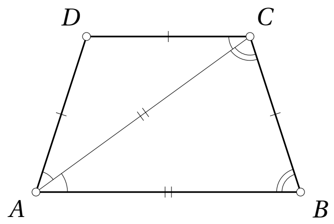
Lahendus 2. Vastavalt ülesande tingimustele on nii väiksemates kui suuremates korterites kokku ühepalju pinda. Seega väiksemad korterid kokku maksavad võrdeliselt pinnaga jagades poole remondi maksumusest. Selle poole remondi maksumusest võib niisama hästi jagada võrdselt väikeste korterite peale. Andmetest tuleneb, et 2 korda suurema rahasumma jagamisel $\frac{3}{2}$ korda suurema arvu korterite vahel, mis annab igale korterile $\frac{2}{\frac{3}{2}}$ ehk $\frac{4}{3}$ korda suurema osa, oleks maks korteri kohta 1000 krooni. Seega tegelikult maksab väiksem korter remondi eest $1000 : \frac{4}{3}$ ehk 750 krooni.

3. *Vastus:* 72° ja 108°.

Lahendus 1. Olgu trapets $ABCD$, kusjuures AB on pikem alus ja CD lühem alus (joonis 15). Olgu $\alpha = \angle DCA$ ja $\beta = \angle BCA$; võrdusest $|DA| = |DC|$ järeldub siis $\angle DAC = \alpha$ ja võrdusest $|AB| = |AC|$ järeldub $\angle ABC = \beta$. Trapetsi sisenurgad on niisiis β ja $\alpha+\beta$. Et trapetsi haara lähisnurkade summa on sirgnurk, siis $\alpha+2\beta = 180^\circ$. Kolmnurgast ACD leiame, et $3\alpha+\beta = 180^\circ$. Võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta & = & 180^\circ \\ 3\alpha + \beta & = & 180^\circ \end{cases}$$

lahendamiseks lahutame kahekordsest teisest võrrandist esimese, mis annab, et $5\alpha = 180^\circ$. Siit $\alpha = 36^\circ$ ning $\beta = 72^\circ$. Trapetsi nurgad on seega 72° ja 108°.



Joonis 15

Lahendus 2. Kasutame eelmise lahenduse tähistusi. Võrdusest $|AD| = |CD|$ järeldub võrdus $\angle DAC = \angle DCA$, võrdusest $|AC| = |AB|$ järeldub võrdus $\angle ACB = \angle ABC$. Aluste AB ja DC paralleelsusest saame, et $\angle DCA = \angle CAB$, millest $\angle BAD = 2\angle DAC$. Trapetsi võrdhaarsuse tõttu $\angle ABC = \angle BAD = 2\angle DAC$. Seega kolmnurga ABC sisenurgad on suurusega $\angle DAC$, $2\angle DAC$ ja $2\angle DAC$, kust $\angle DAC = \dfrac{180^\circ}{5} = 36^\circ$. Järelikult trapetsi nurgad on suurusega 72° ja 108°.

4. Igal Banaania ärimehel saab lõppeval kuul olla kas $0, 2, 4, \ldots, 2006$ või 2008 tehingupartnerit, seega kokku 1005 võimalust. Kui kellelgi on 2008 tehingupartnerit, on ta teinud tehinguid kõigi ülejäänud Banaania ärimeestega, mis tähendab, et igaühel ülejäänud ärimeestest on rohkem kui 0 tehingupartnerit. Järelikult ei saa Banaanias leiduda kaht ärimeest, kel oleks lõppeval kuul vastavalt 0 ja 2008 tehingupartnerit, nii et erinevaid võimalikke tehingupartnerite arvusid on 1004.

Oletades, et ülimalt kahel ärimehel on lõppeval kuul sama arv tehingupartnereid, saame Banaania ärimeeste arvuks ülimalt $2 \cdot 1004$ ehk 2008, mis on vastuolus eeldusega. Järelikult peab Banaanias leiduma vähemalt kolm ärimeest, kellel on lõppeval kuul sama arv tehingupartnereid.

Märkus 1. See ülesanne on rakendus Dirichlet' printsiibile: *kui on n pesa ja nendesse pesadesse paigutatakse $kn + 1$ objekti, siis leidub pesa, kus on vähemalt $k + 1$ objekti.* Siin olid pesade rollis võimalused, mitu tehingupartnerit võib lõppeval kuul olla, ja objektide rollis Banaania ärimehed, kusjuures $n = 1004$, $k = 2$.

Märkus 2. Selline riik, kus on 2009 ärimeest ja igaühel on lõppeval kuul paarisarv tehingupartnereid, on kindlasti võimalik – näiteks igaüks neist võib lõppeval kuul olla tehinguid mitte teinud.

Lahendused

1. *Vastus:* 1 ja $\frac{\pi}{4}$.

Ristküliku pindala on ab ja ümbermõõt $2(a+b)$. Veerandringi pindala on $\frac{1}{4}\cdot\pi\cdot 1^2 = \frac{\pi}{4}$ ja ümbermõõt $1+1+\frac{1}{4}\cdot(2\pi\cdot 1) = 2+\frac{\pi}{2}$. Saame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} ab &= \frac{\pi}{4}, \\ 2(a+b) &= 2+\frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Kui teist võrrandit jagada 2-ga ning asetada esimese võrrandi põhjal $\frac{\pi}{4}$ kohale ab, saame tingimuse $a+b = 1+ab$. Siit $(a-1)(b-1) = 0$, mis tähendab, et üks arvudest a või b on võrdne 1-ga. Teine arv on võrduse $ab = \frac{\pi}{4}$ tõttu järelikult $\frac{\pi}{4}$.

2. *Vastus:* $(x, y) = (3, 2)$ ja $(x, y) = (-3, -2)$.

Lahendus 1. Võrrandite liitmisel saame tingimuse $2\cdot\frac{x}{y} = 3$ ning esimesest võrrandist teise lahutamisel saame, et

$$2\cdot\frac{y}{x} - \frac{2}{xy} = 1. \tag{1}$$

Asetades saadud tulemuse $\frac{y}{x} = \frac{2}{3}$ seosesse (1) ning avaldades xy, saame, et $xy = 6$. Korrutades nüüd võrdused $\frac{y}{x} = \frac{2}{3}$ ja $xy = 6$, leiame, et $y^2 = 4$, mistõttu $y = \pm 2$. Võrdusest $xy = 6$ saame vastavalt, et $x = \pm 3$.

Lahendus 2. Korrutades esimese võrrandi xy-ga ja viies muutujatega liikmed ühele poole, saame $(x-y)^2 = 1$. Liites aga antud kaks võrrandit, saame $\frac{x}{y} = \frac{3}{2}$. Seega $y = \frac{2}{3}x$, kust $x - y = \frac{1}{3}x$. Järelikult $\frac{1}{3}x = 1$ või $\frac{1}{3}x = -1$, kust vastavalt $x = 3$ või $x = -3$ ning $y = 2$ või $y = -2$.

3. *Vastus:* ei.

Lahendus 1. Olgu matemaatiku vanust (päevades) mitte ületavate algarvude korrutis P. Oletame väitevastaselt, et leidub täisarv a, mille korral $P+1=a^2$. Siis

$$P = a^2 - 1 = (a-1)(a+1).$$

Ent arvud $a-1$ ja $a+1$ on sama paarsusega. Seega peab arv P olema paaritu või jaguma vähemalt 4-ga. Kumbki variant ei vasta tõele, mistõttu niisugust täisarvu a ei leidu.

Lahendus 2. Matemaatik on ilmselt rohkem kui 2 päeva vana. Seega korrutatavate arvude seas on 2 ja mingid paaritud arvud. Korrutis jagub 2-ga, kuid mitte 4-ga, järelikult annab 4-ga jagades jäägi 2. Arv, mis on 1 võrra suurem, annab 4-ga jagades jäägi 3. Kuid täisruudud annavad 4-ga jagades vaid jääke 0 ja 1. Seega matemaatiku leitud arv ei ole täisruut.

Märkus. Positiivset täisarvu n mitte ületavate algarvude korrutist nimetatakse arvu n *primoriaaliks* ja tähistatakse $n\#$. Näiteks $2\# = 2$, $3\# = 4\# = 2 \cdot 3 = 6$, $5\# = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$ jne. Siin on analoogia naturaalarvu n *faktoriaali* $n!$ definitsiooniga, mis on arvu n mitte ületavate positiivsete täisarvude korrutis. Sarnasel viisil on defineeritud ka tühjad korrutised $1\# = 1$ ja $0! = 1$.

Ülesande küsimus on niisiis: kas võib mingit primoriaali ühe võrra suurendades saada täisarvu ruudu?

4. Paneme tähele, et mistahes naturaalarvu n korral

$$1 - \frac{1}{n^2} = \frac{n^2-1}{n^2} = \frac{(n-1)\cdot(n+1)}{n^2}.$$

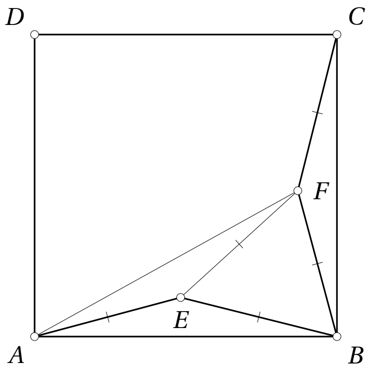
Seega

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{2009^2}\right) &= \\ = \frac{2\cdot 4}{3^2}\cdot\frac{3\cdot 5}{4^2}\cdot\ldots\cdot\frac{2008\cdot 2010}{2009^2} &= \\ = \frac{2\cdot 4\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot 2008\cdot 2010}{3\cdot 3\cdot 4\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2009\cdot 2009} &= \\ = \frac{2\cdot 2010}{3\cdot 2009} > \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

5. *Vastus:* 15°.

Lahendus 1. Saame, et

$$\angle EBF = \angle ABC - \angle ABE - \angle FBC = 90^\circ - 15^\circ - 15^\circ = 60^\circ$$



Joonis 16

(joonis 16). Kuna ülesande tingimuste põhjal on kolmnurgad AEB ja BFC võrdsed ja võrdhaarsed, siis $|EB| = |FB|$, mistõttu kolmnurk EBF on võrdkülgne. Järelikult $|EF| = |EB| = |EA|$, mis omakorda tähendab, et

$$\angle FAE = \frac{180^\circ - \angle FEA}{2}.$$

Ent $\angle AEB = 180^\circ - 2 \cdot 15^\circ = 150^\circ$, seega

$$\angle FEA = 360^\circ - \angle AEB - \angle FEB = 360^\circ - 150^\circ - 60^\circ = 150^\circ.$$

Kokkuvõttes

$$\angle FAE = \frac{180^\circ - \angle FEA}{2} = \frac{180^\circ - 150^\circ}{2} = 15^\circ.$$

Lahendus 2. Samuti nagu eelmises lahenduses näitame, et kolmnurk EBF on võrdkülgne. Kuna $\angle BAE = \angle FBC$ ja $\angle ABC = 90^\circ$, siis on sirged AE ja BF risti. Siit järeldub, et punkt A paikneb võrdkülgse kolmnurga EBF tipust E tõmmatud kõrguse pikendusel, mistõttu punktid B ja F on sümmeetrilised sirge AE suhtes. Seega on kolmnurgad FEA ja BEA võrdsed ning $\angle FAE = \angle BAE = 15^\circ$.

6. *Lahendus 1.* Oletame väitevastaselt, et ei leidu kolme üht värvi arvu, mis paikneksid võrdse vahega. Siis arvud pole värvitud vaheldumisi, muidu oleks kohe üht värvi arvude kolmik vahega 2. Järelikult leidub kaks järjestikust üht värvi arvu; üldisust kitsendamata olgu need arvud 0 ja 1 ja värvitud siniseks. Siis -1 ja 2 on värvitud punaseks, muidu oleks siniste arvude kolmik vahega 1. Siis -4 ja 5 on värvitud siniseks, muidu oleks punaste arvude kolmik vahega 3. Nüüd et -4 ja 0 on sinised, siis 4 on punane. Jääb märgata, et 3 ei saa olla punane, sest asub punastest arvudest 2 ja 4 võrdsel kaugusel, ega sinine, sest asub sinistest arvudest 1 ja 5 võrdsel kaugusel.

Lahendus 2. Oletame, et leidub kaks järjestikust üht värvi paaritut arvu; üldisust kitsendamata olgu need -1 ja 1 ja värvitud siniseks. Kui nüüd 0 on sinine, siis leidub siniste arvude kolmik vahega 1; kui aga -3 või 3 on sinine, siis leidub siniste arvude kolmik vahega 2. Kuid kui -3, 0, 3 on kõik punased, siis moodustavad nad punaste arvude kolmiku vahega 3.

Lõpuks kui ei leidu kaht järjestikust üht värvi paaritut arvu, siis paaritud arvud on värvitud vaheldumisi ja leidub üht värvi arvude kolmik vahega 4.

Lahendused

1. *Vastus:* diagonaalide pikkused on $\sqrt{2-\sqrt{2}}$ ja $\sqrt{2+\sqrt{2}}$; siseringjoone raadius on $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Lahendus 1. Rombi teise sisenurga suurus on $180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$ (joonis 17). Diagonaalide pikkused saame leida koosinusteoreemist: lühema diagonaali pikkuse ruut on

$$1^2 + 1^2 - 2\cdot 1\cdot 1\cdot \cos 45^\circ = 2 - 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 2-\sqrt{2}$$

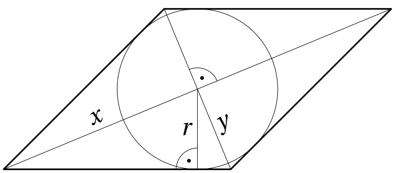
ja pikema diagonaali pikkuse ruut on

$$1^2 + 1^2 - 2\cdot 1\cdot 1\cdot \cos 135^\circ = 2 - 2\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2+\sqrt{2}.$$

Rombi siseringjoone diameeter $2r$ võrdub rombi kõrgusega. Tõmmates kõrguse rombi tipust, tekib täisnurkne kolmnurk, mille hüpotenuus on 1 ja üks nurk langeb kokku rombi väiksema nurgaga. Järelikult $2r = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, kust $r = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Lahendus 2. Olgu x pikema ja y lühema pooldiagonaali pikkus. Rombi pindala S võrdub ühelt poolt diagonaalide pikkuste poolkorrutisega ehk $S = \frac{1}{2}\cdot 2x\cdot 2y = 2xy$, teiselt poolt aga küljepikkuse ruudu ja nurga siinuse korrutisega, kust $S = 1^2\cdot\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Seega

$$2xy = \frac{\sqrt{2}}{2}. \qquad (2)$$



Joonis 17

Rombi diagonaalid on risti, seega Pythagorase teoreemi põhjal

$$x^2 + y^2 = 1. \tag{3}$$

Liites ja lahutades võrrandist (3) võrrandi (2), saame uued seosed

$$\begin{aligned}(x+y)^2 &= 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\\ (x-y)^2 &= 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$

Pärast juurimist ja võrrandite liitmist-lahutamist saame diagonaalide pikkusteks

$$2x = \sqrt{1+\frac{\sqrt{2}}{2}} + \sqrt{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}, \qquad 2y = \sqrt{1+\frac{\sqrt{2}}{2}} - \sqrt{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}.$$

Siit $(2x)^2 = 2 + 2\sqrt{1-\frac{1}{2}} = 2 + \sqrt{2}$ ja $(2y)^2 = 2 - 2\sqrt{1-\frac{1}{2}} = 2 - \sqrt{2}$, kust saame lihtsamad kujud

$$2x = \sqrt{2+\sqrt{2}}, \qquad 2y = \sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

Sümmeetria tõttu asub rombi siseringjoone keskpunkt tema diagonaalide lõikepunktis. Siseringjoone raadius r on rombi keskpunkti kaugus rombi küljeni. Rombi küljepikkuse ja selle kauguse korrutisest pool võrdub ühe kolmnurga pindalaga neljast, milleks diagonaalid rombi jaotavad; järelikult

$$S = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot r = 2r.$$

Koos võrrandiga (2) saame $r = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

2. *Vastus:* 0° ja 90°.

Lahendus 1. Olgu $x = \sin\alpha$ ja $y = \cos\alpha$, siis $x + y = 1$ ja $x^2 + y^2 = 1$. Avaldame esimesest võrrandist $y = 1 - x$, siis saame teisest võrrandist, et $x^2 + (1-x)^2 = 1$, mis on samaväärne võrrandiga $-2x + 2x^2 = 0$. Seega $x = 0$ või $x = 1$. Nüüd vastavalt $y = 1$ või $y = 0$.

Kui $\cos\alpha = 1$, siis $\alpha = 0^\circ$. Selle nurga siinus on 0.

Kui $\sin\alpha = 1$, siis $\alpha = 90^\circ$. Selle nurga koosinus on 0.

Lahendus 2. Tähistame x ja y nagu lahenduses 1 ja saame võrrandid $x + y = 1$ ja $x^2 + y^2 = 1$. Tõstes esimese ruutu, saame $x^2 + y^2 + 2xy = 1$; lahutades nüüd teise võrrandi, saame $2xy = 0$. Seega $\sin\alpha = 0$ või $\cos\alpha = 0$. Kui $\sin\alpha = 0$, siis $\alpha = 0^\circ$ või $\alpha = 180^\circ$, millest esimene sobib ja teine mitte; teisel juhul $\alpha = 90^\circ$ või $\alpha = 270^\circ$, millest jällegi esimene sobib ja teine mitte.

3. *Vastus:* ei.

Lahendus 1. Olgu antud täisarvud a, b, c ja d nii, et $a+b$, $a+c$, $a+d$, $b+c$, $b+d$ ja $c+d$ on kõik algarvud. Üldisust kitsendamata $a \leqslant b \leqslant c \leqslant d$. Paneme tähele, et $b+c$, $b+d$ ja $c+d$ ei saa olla kõik paaritud, sest siis peaksid b, c ja d olema paarikaupa eri paarsusega, mis on võimatu. Järelikult üks neist kolmest summast on paaris algarv 2. Kuid vastavalt valitud järjestusele on $a+b$ kuuest summast minimaalne (sest liidetakse kaks väiksemat). Et 2 on vähim algarv ja, nagu näidatud, esineb summade seas, peab ka $a+b$ olema 2. Seega summad ei ole kõik erinevad.

Lahendus 2. Olgu a, b, c ja d mingid täisarvud. Vaatame läbi võimalikud variandid lähtudes sellest, kui palju on arvude a, b, c ja d seas paarituid arve ja paarisarve. Paneme tähele, et kui vähemalt kolm arvu nende nelja seast on sama paarsusega, siis saadava kuue summa seas on vähemalt kolm paarisarvu. Kui aga neist neljast arvust kaks on paaris ja kaks on paaritud, siis saadavast kuuest summast kaks on paarisarvud. Et aga paaris algarvusid on üksainus (arv 2), siis pole võimalik, et kõik kuus summat oleksid erinevad algarvud.

4. *Vastus:* 0.

Lahendus 1. Korrutades võrrandi pooled teguriga $\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$ ja jagades 2-ga saame, et

$$x = x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}).$$

Siit kas $x = 0$ või $\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x} = 1$. Võtame viimase võrrandi pooled ruutu, siis saame, et

$$1 + x + 2\sqrt{1-x^2} + 1 - x = 1.$$

Samas ilmselt $2+2\sqrt{1-x^2} \geqslant 2 > 1$. Seega viimane võrrand on vastuoluline. Kontroll näitab, et $x = 0$ sobib lahendiks.

Lahendus 2. Jätame ühe ruutjuure ühele poole ja muud liikmed viime teisele poole:

$$\sqrt{1+x} = 2x + \sqrt{1-x}.$$

Ruutuvõtmisel saame võrrandi $1+x = 4x^2+4x\sqrt{1-x}+1-x$, mis lihtsustub kujule

$$x(1 - 2x - 2\sqrt{1-x}) = 0.$$

Siit on üks võimalus $x = 0$. Kui $x \neq 0$, siis

$$2\sqrt{1-x} = 1 - 2x,$$

mis ruutuvõtmisel annab $4 - 4x = 1 - 4x + 4x^2$. Seega $4x^2 = 3$, millest $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. Kontroll näitab, et $x = 0$ sobib ja ülejäänud leitud lahendid on tegelikult võõrlahendid.

Lahendus 3. Võtame võrrandi pooled ruutu ja saame pärast lihtsustamist, et

$$1-2x^2=\sqrt{1-x^2}.$$

Kuna lähtevõrrandist on selge, et $-1\leqslant x\leqslant 1$, siis leidub nurk $\alpha\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ selliselt, et $x=\sin\alpha$. Nüüd $1-2x^2=\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$ ja $\sqrt{1-x^2}=\cos\alpha$. (Nurk α on valitud lõigult $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ seetõttu, et $\cos\alpha=\sqrt{1-x^2}\geqslant 0$.) Oleme saanud võrrandi

$$2\cos^2\alpha-1=\cos\alpha,$$

mis on ruutvõrrand $\cos\alpha$ suhtes. Selle lahendid on

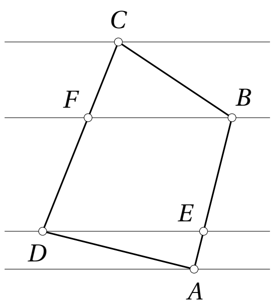
$$\cos\alpha=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{4}=\frac{1\pm 3}{4},$$

st $\cos\alpha=1$ või $\cos\alpha=-\frac{1}{2}$. Et $\cos\alpha\geqslant 0$, tuleb kõne alla vaid juhtum $\cos\alpha=1$, millest $\alpha=2k\pi$, kus k on täisarv. Nüüd $x=\sin 2k\pi=0$. Kontroll näitab, et $x=0$ sobib võrrandi lahendiks.

Lahendus 4. Olgu $f(x)=\sqrt{x}-x$. Paneme tähele, et võrrand on tingimus kujul

$$f(1+x)=f(1-x),\qquad x\in[-1,1].$$

Funktsiooni $f(x)=\sqrt{x}-x$ väärtused on aga piirkonnas $(0,1)$ positiivsed ja piirkonnas $(1,2)$ negatiivsed. Kuna juhul $x\in(-1,0)$ kehtib $1+x\in(0,1)$ ja $1-x\in(1,2)$ ning juhul $x\in(0,1)$ kehtib $1+x\in(1,2)$ ja $1-x\in(0,1)$, on ainsad võimalikud lahendid $x=-1,0,1$. Kontrolli teel selgub, et ainult $x=0$ rahuldab antud tingimust.



Joonis 18

5. *Vastus:* ei.

1	2	3	4	5	51	52	53	54	55
6	7	8	9	10	56	57	58	59	60
11	12	13	14	15	61	62	63	64	65
16	17	18	19	20	66	67	68	69	70
21	22	23	24	25	71	72	73	74	75
26	27	28	29	30	76	77	78	79	80
31	32	33	34	35	81	82	83	84	85
36	37	38	39	40	86	87	88	89	90
41	42	43	44	45	91	92	93	94	95
46	47	48	49	50	96	97	98	99	100

Joonis 19

Märgime kõigepealt, et rööpküliku ühe külje otspunktid ei saa olla kahel äärmisel sirgel või kahel keskmisel sirgel, kuna sel korral oleks selle külje vastaskülg vastavalt lühem või pikem kui see külg. Oletame siis väitevastaselt, et nelinurk $ABCD$ on rööpkülik (joonis 18). Olgu E ja F antud sirgete ja rööpküliku külgede lõikepunktid. Siis $BFDE$ on ka rööpkülik, seega $|BF| = |ED|$. Lisaks $\angle AED = \angle CFB$ ja $\angle ADE = \angle CBF$. Seega kolmnurgad AED ja CFB on võrdsed. Nüüd peavad ka vastavad kõrgused (tõmmatud tippudest A ja C) olema võrdse pikkusega. See on vastuolus eeldusega, et kahe ülemise ja kahe alumise sirge vahelised kaugused on erinevad.

6. *Vastus:* 735.

Kuna ridade omavahelise järjestuse kohta ei ole ülesande tingimustes midagi öeldud ning nende ümberjärjestamine summat ei muuda, eeldame üldisust kitsendamata, et read on järjestatud kuuenda veeru järgi kasvavas järjekorras.

Kuuenda veeru igale arvule järgneb (samas reas) neli arvu, mistõttu ei saa kuuendas veerus olla k. real suurem arv kui $46 + 5k$. Tõepoolest, k. real 6. veerus olev arv on väiksem kui k. real olevad järgmised 4 arvu ning ka väiksem kui kõik järgmistel ridadel olevad 6. veeru arvud, aga seega ka väiksem kui kõigil järgmistel ridadel olevad 7.–10. veeru arvud. Kokku on arvusid, millest on k. rea 6. veeru arv väiksem, vähemalt $5(10 - k) + 4 = 54 - 5k$. Seega k. rea 6. veeru arv on ülimalt $100 - (54 - 5k) = 46 + 5k$.

Niisiis saame suurima võimaliku summa, kui k. real on arv $46 + 5k$. See võimalus on realiseeritav (joonis 19) ja annab summa

$$10 \cdot 46 + 5 \cdot (1 + 2 + \cdots + 10) = 460 + 5 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} = 735.$$

Lahendused

1. *Vastus:* $(-1, 3)$ ja $(3, 1)$.

Lahendus 1. Olgu kolmas tipp (x, y) (joonis 20). Kuna ta asub kolmnurga ümberringjoonel, mille raadius on $\sqrt{(-3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$, siis peavad tema koordinaadid rahuldama seost $x^2 + y^2 = 10$.

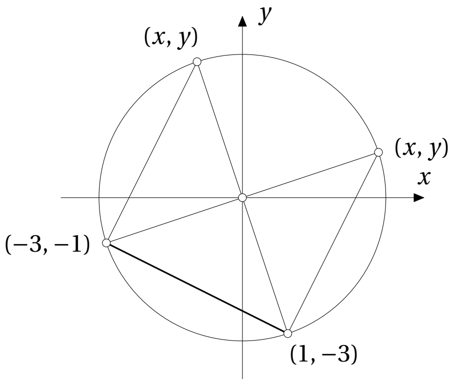
Vaadelda on tarvis kahte juhtu.

Kui tipunurk on punkti $(-3, -1)$ juures, siis kolmas tipp (x, y) peab olema sellest punktist sama kaugel kui teine tipp $(1, -3)$. Seega saame teise võrrandi $(x + 3)^2 + (y + 1)^2 = (1 + 3)^2 + (-3 + 1)^2 = 20$. Võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ (x + 3)^2 + (y + 1)^2 = 20 \end{cases}$$

lahendamiseks avame teises võrrandis sulud ning seejärel lahutame teisest võrrandist esimese. Sedasi saame seose $6x + 9 + 2y + 1 = 10$, millest $y = -3x$. Asendades selle süsteemi esimesse võrrandisse, saame ruutvõrrandi $10x^2 = 10$, mille lahendid on $x = \pm 1$. Siit vastavalt $y = \mp 3$.

Kui tipunurk on punkti $(1, -3)$ juures, siis kolmas tipp (x, y) peab olema sellest punktist sama kaugel kui teine tipp $(-3, -1)$. Seega saame teise võ-



Joonis 20

randi $(x-1)^2+(y+3)^2=(-3-1)^2+(-1+3)^2=20$. Võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} x^2+y^2 &= 10 \\ (x-1)^2+(y+3)^2 &= 20 \end{cases}$$

lahendamiseks toimime samuti nagu eelmisel juhul, saades seose $x=3y$ ning lahendid $y=\pm 1$ ja $x=\pm 3$.

Kokkuvõttes on lahenditeks $(1,-3)$, $(-1,3)$, $(3,1)$ ja $(-3,-1)$. Ent punktid $(1,-3)$ ning $(-3,-1)$ on juba kolmnurga tipud ning seega ei sobi.

Lahendus 2. Kuna vektorite $(3;-1)$ ja $(1;-3)$ skalaarkorrutis on võrdne nulliga, on need vektorid risti. Seega võrdhaarse kolmnurga kaks antud tippu asuvad koordinaatide alguspunktist vaadates teineteise suhtes täisnurga all, kusjuures ühe juures neist on tipunurk. Selleks, et haarad oleks võrdse pikkusega, peavad koordinaatide alguspunktist vaadatuna tipunurga tipp ja kolmas tipp asuma teineteise suhtes samuti täisnurga all. See tähendab, et aluse otspunktid on ümberringjoonel teineteise vastas.

Niisiis kui tipunurk on punktis $(-3;-1)$, siis puuduv tipp asub $(1;-3)$ vastas punktis $(-1;3)$, kui aga tipunurk on punktis $(1;-3)$, siis puuduv tipp asub $(-3;-1)$ vastas punktis $(3,1)$.

2. *Vastus:* $\left(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right)$ ja $\left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$.

Lahendus 1. Graafiku sümmeetriast y-telje suhtes järeldame, et $b=0$. Lõigaku esialgne graafik x-telge punktides x_1 ja $-x_1$ (võime eeldada, et $x_1>0$). Siis peegeldatud ja nihutatud graafik lõikab x-telge punktides x_1+2 ja $-x_1+2$. Ühise lõikepunkti leiame võrrandist $x_1=-x_1+2$, seega $x_1=1$. Niisiis $ax_1^2+c=0$, st $a+c=0$, kust $a=-c$, mistõttu ruutfunktsioon on kujul $y=ax^2-a$. Et esialgse graafiku puutuja lõikaks kohal $x=1$ x-telge 45-kraadise nurga all, peab tema tõus, st tuletise $y'=2ax$ väärtus kohal $x=1$ olema 1 või -1. Siit $a=\frac{1}{2}$ või $a=-\frac{1}{2}$ ning vastavalt $c=-\frac{1}{2}$ või $c=\frac{1}{2}$.

Lahendus 2. Graafiku sümmeetriast y-telje suhtes järeldame, et $b=0$. Niisiis on ülesandes antud ruutfunktsioon kujul $y=ax^2+c$. Saadav x-telje suhtes peegeldatud ja 2 ühiku võrra positiivses suunas nihutatud graafik on funktsiooni $y=-a(x-2)^2-c$ graafik. Olgu x_1 graafikute ühine lõikepunkt x-teljega, siis saame, et

$$ax_1^2+c=-a(x_1-2)^2-c=0.$$

See ahelvõrdus annab aga tingimuse $4a(x_1-1)=0$, kust $x_1=1$. Siit jätkame samal moel nagu eelmises lahenduses.

3. *Vastus:* 648.

Lahendus 1. Olgu otsitav arv $2k^2 = 3l^3$. Siis k^2 jagub 3-ga, mistõttu k jagub 3-ga; analoogselt l^3 jagub 2-ga, mistõttu l jagub 2-ga. Et võrrandi pooled jaguvad 9-ga, sest vasakul on k^2, siis l^3 jagub 3-ga, mistõttu l jagub 3-ga. Kokkuvõttes l jagub 6-ga.

Võttes l kohale vähima 6-ga jaguva positiivse täisarvu 6, saame otsitavaks arvuks $3 \cdot 6^3 = 648$, mis rahuldabki tingimust, sest ühtlasi $648 = 2 \cdot 18^2$.

Lahendus 2. Olgu otsitav arv x. Kuna $\frac{x}{2} = k^2$ on täisarv, jagub x 2-ga. Kuna $\frac{x}{3} = l^3$, siis l jagub 2-ga, mistõttu $\frac{x}{3}$, seega ka x, jagub 8-ga. Arv $\left(\frac{k}{l}\right)^6 = \left(\frac{x}{2}\right)^3 : \left(\frac{x}{3}\right)^2 = 9 \cdot \frac{x}{8}$ on seetõttu täisarv, seega ka $\frac{k}{l}$ on täisarv. Vähim täisarvu 6. aste, mis jagub 9-ga, on $3^6 = 729$. Selle korral $x = \frac{8}{9} \cdot 729 = 648$. See rahuldab ka ülesande tingimusi.

4. *Lahendus 1.* Väide avaldub kujul $a_k - (a_1 + \ldots + a_{k-1}) = k$ ehk

$$(2^k - 1) - \Big((2^1 - 1) + \ldots + (2^{k-1} - 1)\Big) = k.$$

Teisendame vasakut poolt: rühmitame 2 astmed omaette, kasutame geomeetrilise jada summa valemit ja lihtsustame. Saame

$$\begin{aligned}
(2^k - 1) - \Big((2^1 - 1) + \ldots + (2^{k-1} - 1)\Big) &= \\
= \quad & 2^k - (2^1 + \ldots + 2^{k-1}) - 1 + (k-1) = \\
= \quad & 2^k - (2^k - 2) + k - 2 = \\
= \quad & k.
\end{aligned}$$

Väide on tõestatud.

Lahendus 2. Vahetu kontroll näitab, et jada alguses väide kehtib. Kui mingi k-nda liikme jaoks väide kehtib, st $a_k - (a_1 + \ldots + a_{k-1}) = k$, siis $a_1 + \ldots + a_{k-1} = a_k - k$, millest

$$a_1 + \ldots + a_k = (a_k - k) + a_k = 2a_k - k.$$

Seega

$$\begin{aligned}
a_{k+1} - (a_1 + \ldots + a_k) &= a_{k+1} - 2a_k + k = \\
&= 2^{k+1} - 1 - 2(2^k - 1) + k = \\
&= 2^{k+1} - 1 - 2^{k+1} + 2 + k = \\
&= k + 1,
\end{aligned}$$

st väide kehtib ka järgmise liikme jaoks. Matemaatilise induktsiooni printsiibi põhjal kehtib väide iga liikme jaoks.

5. *Lahendus 1.* Olgu kolmnurk ABC täisnurgaga tipus C (joonis 21). Olgu hüpotenuusi AB keskpunkt D ning tipust C tõmmatud kõrguse aluspunkt H. Punkt D on ühtlasi kolmnurga ABC ümberringjoone keskpunkt, mistõttu $2|CD| = 2|AD| = |AB| = 4|CH|$, seega $|CH| = \frac{|CD|}{2}$. Täisnurkses kolmnurgas DCH on kaatet CH kaks korda lühem hüpotenuusist CD, mistõttu $\angle CDH = 30^\circ$. (Seda on lihtne näha, märgates, et $\sin \angle CDH = \frac{1}{2}$ või peegeldades C sirge DH suhtes punktiks C' ja sedastades, et kolmnurk $CC'D$ on võrdkülgne.) Nüüd $\angle CBA = \frac{1}{2}\angle CDH = 15^\circ$, sest need on kaarele AC toetuvad piirdenurk ja kesknurk.

Lahendus 2. Kasutame eelmise ülesande tähistusi ning tähistame $|BH| = f$, $|AH| = g$ ja $|CH| = h$. Kõrguse teoreemist $h^2 = fg$; ülesande tingimuste põhjal aga $f + g = 4h$. Avaldades viimasest seosest g ja asetades esimesse seosesse, saame võrduse $h^2 = f(4h - f)$. Lahendades saadud seose $h^2 - 4fh + f^2 = 0$ ruutvõrrandina h suhtes, saame

$$h = 2f \pm \sqrt{4f^2 - f^2} = f(2 \pm \sqrt{3}).$$

Oleme saanud, et

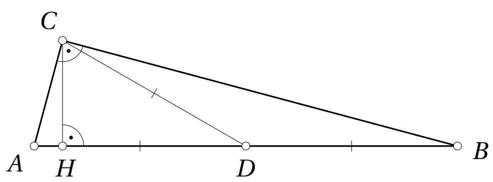
$$\tan \angle ABC = \frac{h}{f} = 2 \pm \sqrt{3}.$$

Kuna

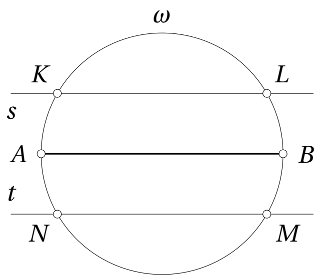
$$\begin{aligned}
\tan 2\angle ABC &= \frac{2\left(2 \pm \sqrt{3}\right)}{1 - \left(2 \pm \sqrt{3}\right)^2} = \frac{2\left(2 \pm \sqrt{3}\right)}{-6 \mp 4\sqrt{3}} = \\
&= -\frac{2 \pm \sqrt{3}}{3 \pm 2\sqrt{3}} = -\frac{\left(2 \pm \sqrt{3}\right) \cdot \left(3 \mp 2\sqrt{3}\right)}{3^2 - \left(2\sqrt{3}\right)^2} = \\
&= \pm\frac{\sqrt{3}}{3},
\end{aligned}$$

siis $2\angle ABC$ on kas 30° või 150°. Järelikult $\angle ABC = 15^\circ$ või $\angle ABC = 75^\circ$. Viimasel juhul $\angle BAC = 15^\circ$.

Lahendus 3. Ülesanne on lahendatud, kui



Joonis 21



Joonis 22

- kontrollime, et täisnurkne kolmnurk teravnurgaga 15° rahuldab ülesande tingimusi,
- veendume, et ülesande tingimustega on kolmnurga nurgad üheselt määratud.

Olgu täisnurkse kolmnurga täisnurga tipp C ja teravnurk suurusega 15° tipus B. Olgu tipust C tõmmatud kõrguse aluspunkt H ning hüpotenuusi keskpunkt D. Tähistame kolmnurga poole hüpotenuusi (ehk ümberringjoone raadiuse) tähega r. Kuna ka $|CD| = r$, on kolmnurk ADC võrdhaarne. Tingimusest $\angle CAD = 75^\circ$ leiame, et $\angle ADC = 180^\circ - 2 \cdot 75^\circ = 30^\circ$. Nüüd $|CH| = |CD| \cdot \sin \angle ADC = \frac{1}{2} r$. Niisiis $|AB| = 2r = 4|CH|$.

Veendume nüüd, et ülesande tingimustega on kolmnurga nurgad üheselt määratud. Olgu AB täisnurkse kolmnurga hüpotenuus. Teadaolevalt on AB on ühtlasi selle kolmnurga ümberringjoone ω diameeter (joonis 22). Tõmbame hüpotenuusiga paralleelsed sirged s ja t, mis asub hüpotenuusist kaugusel $\frac{|AB|}{4}$. Ülesande tingimuse kohaselt saab täisnurga tipp asuda vaid sirge s või t ning ringjoone ω lõikepunktis. Kõik neli võimalikku lõikepunkti K, L, M ja N annavad samade nurkadega kolmnurgad, sest kaared AK, AN, BL ja BM, aga siis ka nurgad ABK, ABN, BAL ning BAM, on võrdsed.

6. *Vastus:* a) jah; b) ei.

a) Kirjutame igasse täisarvuliste koordinaatidega punkti selle punkti x-koordinaadi. Sel juhul kõik kirjutatud arvud ei ole võrdsed ning punkti (x, y) nelja lähima naaberpunkti arvude aritmeetiline keskmine on

$$\frac{(x-1) + x + (x+1) + x}{4} = x,$$

nagu tarvis.

b) Oletame, et koordinaattasandi nõutaval viisil täitmine on võimalik. Olgu K täisarvuliste koordinaatidega punktidesse kirjutatud naturaalarvudest vähim. Olgu arv K kirjutatud punkti (x, y). Oletame, et mõnesse punkti (x, y) neljast lähimast naabrist on kirjutatud suurem arv kui K. Kuna K on nelja lähima naaberpunkti arvude aritmeetiline keskmine, siis peab mõnesse punkti (x, y) neljast lähimast naabrist olema kirjutatud väiksem arv kui K, mis on vastuolus arvu K valikuga. Järelikult on punkti (x, y) nelja lähimasse naaberpunkti kirjutatud arv K. Korrates sama arutelu nüüd nende nelja naaberpunkti ja nende naaberpunktide jne. korral, saame, et kõikidesse täisarvuliste koordinaatidega punktidesse on kirjutatud naturaalarv K. See on vastuolus ülesande tingimusega, mille kohaselt kõik kirjutatud arvud ei ole võrdsed.

Eesti LVI matemaatikaolümpiaad

31. jaanuar 2009 Piirkonnavoor **Hindamisjuhised**

Lp hindaja!

Käesolevas esitame kõigepealt hindamise üldised põhimõtted ning seejärel järjekorras konkreetsed hindamisjuhised iga ülesande kohta eraldi.

1. Õpilase lahenduseks tuleb esmajoones lugeda see, mida õpilane on ülesande kohta vormistanud puhtandina (sh mustandipaberile selgesti arusaadavalt kirja pandud mõttekäigud, kui need on ametlikult puhtandipaberilt viidatud). Töö mustandi arvestamine või mittearvestamine ülesande lahenduse hulka on hindaja otsustada (või piirkonna hindamiskomisjoni ühine otsus kõigi ülesannete suhtes), kuid see peab toimuma kõigis töödes ühtmoodi.

2. Alljärgnevas on 7.–9. klassi olümpiaadi I osa (testi) ning kõikide ülejäänud ülesannete hindamisjuhised esitatud erinevalt.

   Testi iga küsimuse jaoks on eraldi loetletud või kirjeldatud vastused, mille eest tuleks anda vastavalt kaks punkti või üks punkt (st vastavaid punkte ühe küsimuse piires *ei tule* liita). Testiülesannete lahendusi õpilased ei pea esitama, vaid kirjutavad ülesannete lehel vastavale punktiirile või ülesande tekstis viidatud kohta ainult vastuse.

   Seevastu kõigi teiste ülesannete kohta tuleb esitada täielikud lahendused, ainult vastustest ei piisa. Nende ülesannete lahendused on hindamisjuhistes jaotatud võimalust mööda osadeks (etappideks) ning näidatud lahenduse iga osa eest antav punktide arv (st ühe ülesande eest antava punktisumma saamiseks *tuleb* lahenduse erinevate osade eest antud punktid liita).

3. Juhime hindajate tähelepanu sellele, et testiülesannete eest 1 punkti andmise põhimõtted on sel aastal varasemaga võrreldes muutunud. Kui seni nägi hindamisjuhis mõnikord ette 1 punkti ka arvuliselt vale vastuse eest, mille lahendaja võis tõenäoliselt saada, tehes arutluses mõne väikese vea, siis nüüd antakse 1 punkt üldjuhul ainult arvuliselt õige vastuse eest, kus on eksitud ühikuga.

4. Žürii lahendustes ja käesolevates hindamisjuhistes on ülesannete arvulised vastused esitatud enamasti ainult ühel, lihtsaimal või kõige tõenäolisemalt esineval kujul. Hindamisel (sh testid!) tuleb võrdselt õigeks lugeda ka sama vastuse teised mõistlikud esitusviisid – sh taandatud hariliku murruna,

segaarvuna, kümnendmurruna, sõnadega välja kirjutatuna –, seejuures ka osana pikemalt (nt täislausega, koos sobiva liigisõnaga või koos selgitustega) antud vastusest. Juhud, kus ülesande sisu tingib erandeid sellest üldreeglist, on eraldi mainitud vastava ülesande hindamisjuhises.

Ühik arvu järel on vastuses vajalik juhul, kui ülesandes on küsitud suurust, mis teatud ühikutes avaldub. Näiteks küsimusele „Kui suur pindala …?“ saab õige vastus olla „120 cm^2“, kuid mitte „120“ (kui ülesande tekstis pole kasutatud ühikuta pikkusi/pindalasid). Seejuures on vastused „120 cm^2“ ja „1,2 dm^2“ samaväärsed. Ühik vastuses ei ole nõutav, kui ülesandes on küsitud kindlate ühikute arvu. Näiteks küsimusele „Mitu ruutsentimeetrit …?“ antud vastused „120“ ja „120 cm^2“ tuleb võrdväärseks lugeda samal alusel nagu küsimusele „Mitu karu …?“ antud vastused „3“ ja „3 karu“ (vastus koos liigisõnaga). Niisuguse küsimuse vastuseks on arv ning ühikul või liigisõnal on vaid puhtkeeleline roll. Küsimusele „Mitu ruutsentimeetrit …?“ antud vastused „120 cm^2“ ja „1,2 dm^2“ ei ole samaväärsed.

5. Mõnede ülesannete kohta, mida saab lahendada mitmel oluliselt erineval viisil, anname eraldi hindamisskeemid erinevate lahendusviiside jaoks. Rõhutame, et iga konkreetset mittetäielikku lahendust tuleb hinnata ainult *ühe* sellise skeemi järgi (selle järgi, mille kohaselt ta saaks kõige rohkem punkte).

6. Enamiku ülesannete korral (v.a testid ja tõestusülesanded) on hindamisjuhiste lõpus eraldi näidatud, mitu punkti anda ainult õige vastuse eest. See hinne on mõeldud juhuks, kui töös on ülesande kohta toodud ainult õige vastus või õige vastus koos mõttekäiguga, mis ei annaks skeemi järgi rohkem punkte kui on ette nähtud õige vastuse eest.

7. Kahtlemata esineb õpilaste töödes ka mõttekäike, mis ei mahu meie poolt pakutud skeemidesse. Selliste lahenduste hindamisel tuleb lähtuda sellest, *kui suur osa* antud ülesandest on õpilasel lahendatud, kasutades lahenduse üksikute osade kaalu määramisel võimaluse korral võrdluseks punktide jaotust meie pakutud hindamisskeemides.

8. *Millise tahes* täieliku ja matemaatiliselt korrektse lahenduse eest tuleb igal juhul anda maksimumpunktid, sõltumata selle lahenduse pikkusest või otstarbekusest võrreldes teiste lahendusviisidega.

I osa hindamisjuhised

1. ∘ Antud õige vastus 8: 2 p

2. ∘ Lisatud sulud, mis määravad tehete järjekorra
$\big((1+2)\cdot 3-4\big):5=1$: 2 p

Kui on lisatud täiendavalt sulge, mis on tasakaalus ja tehete järjekorda ei muuda, siis anda ikkagi 2 punkti.

3. ∘ Antud õige vastus 10 (või "10-kohaline"): 2 p

4. ∘ Antud õige vastus 5: 2 p

5. ∘ Antud õige vastus 17°: 2 p
∘ Antud vastuseks arv 17 ilma kraadimärgita: 1 p

6. ∘ Antud õige vastus 10 cm: 2 p
∘ Antud vastuseks arv 10 ilma ühikuta või vale ühikuga: 1 p

7. ∘ Antud õige vastus 16 (või "16 pikkusühikut"): 2 p
∘ Antud vastuseks arv 16 mingi vale ühikuga (nt cm): 1 p

8. ∘ Antud õige vastus 11: 2 p

9. ∘ Antud õige vastus 21: 2 p

10. ∘ Antud õige vastus 15: 2 p

I osa hindamisjuhised

1. ◦ Antud õige vastus 42: 2 p

2. ◦ Lisatud sulud, mis määravad tehete järjekorra
$1 : \big((2+3) : 4 : 5\big) = 4$: 2 p

Kui on lisatud täiendavalt sulge, mis on tasakaalus ja tehete järjekorda ei muuda, siis anda ikkagi 2 punkti.

3. ◦ Antud õige vastus 60 (protsendimärgiga või ilma): 2 p

4. ◦ Antud õige vastus 0: 2 p

5. ◦ Antud õige vastus 3: 2 p

6. ◦ Antud õige vastus 180°: 2 p
◦ Antud vastuseks arv 180 ilma kraadimärgita: 1 p

7. ◦ Antud õige vastus 10 cm: 2 p
◦ Antud vastuseks arv 10 ilma ühikuta või vale ühikuga: 1 p

8. ◦ Antud õige vastus 12 cm: 2 p
◦ Antud vastuseks arv 12 ilma ühikuta või vale ühikuga: 1 p

9. ◦ Antud õige vastus 28: 2 p

10. ◦ Antud õige vastus 48 (või “48 pindalaühikut”): 2 p
◦ Antud vastuseks arv 48 mingi vale ühikuga (nt cm^2): 1 p

I osa hindamisjuhised

1. ◦ Antud õige vastus 42: 2 p

2. ◦ Antud õige vastus 2009: 2 p

3. ◦ Antud õige vastus 13: 2 p

4. ◦ Antud õige vastus 5: 2 p

5. ◦ Antud õige vastus 6: 2 p

6. ◦ Antud õige vastus 7: 2 p

7. ◦ Antud õige vastus 270°: 2 p
◦ Antud vastuseks arv 270 ilma kraadimärgita: 1 p

8. ◦ Antud õige vastus $11:5$: 2 p
◦ Antud vastuseks arv $\frac{11}{5}$: 2 p

Kui vastuseks on antud suhe $5:11$ või arv $\frac{5}{11}$, anda 0 punkti.

9. ◦ Antud õige vastus 55°: 2 p
◦ Antud vastuseks arv 55 ilma kraadimärgita: 1 p

10. ◦ Antud õige vastus 48: 2 p

II osa hindamisjuhised

1.
- Jõutud ühe muutujaga võrrandini ühe otsitava arve suuruse jaoks: 3 p
- Leitud ühe arve suurus: 2 p
- Leitud ülejäänud arvete suurused ja antud õige lõppvastus: 2 p

Kui ülesande tingimused on kirja pandud õige võrrandisüsteemina, mis sisaldab rohkem kui üht muutujat (nt. $x + y + z = 550$ ja $2x = \frac{2}{3}y = z + 50$), kuid ei ole jõutud ainult üht muutujat sisaldava võrrandini, anda 1 punkt.

Ainult õige vastuse eest (kõigi kolme pereliikme telefoniarvete õiged suurused) ilma selgitusteta anda 2 punkti. Kui vastuses on kolm õiget summat, kuid omistatud need valedele pereliikmetele, siis anda 1 punkt. Kahe või ühe õige summa eest ilma selgitusteta anda 0 punkti.

2.
- Leitud ühe numbri õige väärtus: 3 p
- Leitud teise numbri õige väärtus: 2 p
- Leitud kolmanda numbri õige väärtus: 2 p

Ainult täieliku õige vastuse eest (kõik kolm õiget numbrit) ilma selgitusteta anda 2 punkti. Kui vastuses on kahe numbri väärtused õiged, anda 1 punkt.

3.
- Leitud diameetrid AC ja CB (või vastavad raadiused): 1 p
- Leitud kolme poolringi (või vastavate ringide) täpsed pindalad: 2 p
- Leitud värvitud ala täpne pindala: 2 p
- Leitud nõutav protsent: 2 p

Kui lahenduses on (pool)ringide pindalade leidmisel kasutatud π lähisväärtust ning seetõttu saadud ligikaudsed vastused, anda 2 punkti vähem. Kui aga arvutustes on lõpuni kasutatud π, leides ka värvitud ala pindala arvväärtuse 12π, ja ümardamine tehtud ainult lõppvastuses, siis selle eest punkte mitte maha võtta.

Kui poolringide pindalade asemel on leitud ringide pindalad ja seetõttu on vastuses värvitud ala pindala õigest 2 korda suurem, siis anda 1 punkt vähem.

Kui vastuses on pindala antud ilma ühikuta või vale ühikuga, siis anda 1 punkt vähem.

Kui lahenduses esineb mitu eelmistes lõikudest nimetatud puudust, siis vähendamised nende eest liituvad.

Ainult täieliku õige vastuse eest (küsitud täpne pindala koos õige ühikuga ja protsent) ilma selgitusteta anda 2 punkti. Kui vastuses on üks neist kahest õige, anda 1 punkt.

Eesti LVI matemaatikaolümpiaad

31. jaanuar 2009 Piirkonnavoor **8. klass**

II osa hindamisjuhised

1.
   - Leitud, et 7. klassi õpilasel on mäng *FIFA Soccer*: 3 p
   - Leitud, et Ove õpib 7. klassis: 3 p
   - Antud õige lõppvastus: 1 p

   Ainult täieliku õige vastuse eest (klass ja mäng) ilma selgitusteta anda 2 punkti. Kui vastuses on üks komponent õige, anda 1 punkt.

2.
   - Näidatud, et ükski arvudest ei saa olla 0, 5 ega 7: 2 p
   - Tähele pandud, et kui võrduse ühel pool on 9, siis teisel pool peavad olema 3 ja 6: 1 p
   - Analüüsitud see juht lõpuni ja leitud võimalikud summad: 2 p
   - Näidatud, et juht, kus arvude hulgas ei ole 9, ei anna lahendit: 2 p

   Kui arvudest 0, 5 ja 7 on välistatud üks või kaks, anda selle osa eest 1 punkt.

   Ainult täieliku õige vastuse eest (kaks õiget summat) ilma selgitusteta anda 2 punkti. Kui vastus sisaldab üht õiget summat, anda 1 punkt.

3.
   - Leitud diameetrid AC, CD ja DB (või vastavad raadiused): 1 p
   - Leitud nelja poolringi (või vastavate ringide) täpsed pindalad: 2 p
   - Leitud värvitud ala täpne pindala: 2 p
   - Leitud nõutav raadius: 2 p

   Kui lahenduses on (pool)ringide pindalade leidmisel kasutatud π lähisväärtust ning seetõttu saadud ligikaudsed vastused, anda 2 punkti vähem. Kui aga arvutustes on lõpuni kasutatud π, leides ka värvitud ala pindala arvväärtuse 32π, ja ümardamine tehtud ainult lõppvastuses, siis selle eest punkte mitte maha võtta.

   Kui poolringide pindalade asemel on leitud ringide pindalad ja seetõttu on vastused õigetest 2 korda suuremad, siis anda 1 punkt vähem.

   Kui vastuses on pindala antud ilma ühikuta või vale ühikuga, siis anda 1 punkt vähem.

   Kui lahenduses esineb mitu eelmistes lõikudest nimetatud puudust, siis vähendamised nende eest liituvad.

   Ainult täieliku õige vastuse eest (küsitud täpne pindala ja raadius koos õigete ühikutega) ilma selgitusteta anda 2 punkti. Kui vastuses on üks neist kahest õige, või mõlemad arvuliselt õiged, kuid ühikud puudu või valed, anda 1 punkt.

II osa hindamisjuhised

1.
- Leitud, et viimane number peab olema 0: 1 p
- Eraldatud arvud, mis jaguvad 4-ga (leitud, et eelviimane number peab olema paaris): 1 p
- Eraldatud arvud, mis jaguvad 7-ga: 2 p
- Eraldatud arvud, mis jaguvad 3-ga: 2 p
- Eraldatud arvud, mis jaguvad 8-ga: 1 p

Kui 4-ga jaguvust pole eraldi vaadeldud, vaid on eraldatud kohe välja 8-ga jaguvad arvud (näiteks pannes tähele, et lõppu kirjutatav kolmekohaline arv peab jaguma 8-ga), siis anda selle osa eest 2 punkti.

Kui lõppvastuseks on arvu 280 asemel antud 2009280, siis selle eest punkti mitte maha võtta.

Ainult õige vastuse (280 või 2009280) eest ilma selgitusteta anda 1 punkt.

2. Selle ülesande lahenduses saab arutleda paljudel eri viisidel. Seetõttu fikseerib pakutav hindamisskeem vaid punktid kahe vahetulemuse eest, mis tõenäoliselt ühel või teisel kujul paljudes lahendustes esinevad.
- Avaldatud remondi kogumaksumus suurte või väikeste korterite arvu kaudu: 2 p
- Tehtud tähelepanek, et suurtel ja väikestel korteritel on pinda kokku võrdselt: 2 p
- Lahendus lõpule viidud (leitud rahasumma ühe väikese korteri kohta pinnaga proportsionaalsel jagamisel): 3 p

Ainult õige vastuse eest ilma selgitusteta anda 1 punkt.

3.
- Tähele pandud, et trapets jaotub kaheks võrdhaarseks kolmnurgaks: 1 p
- Kirja pandud sobivad seosed, millest on võimalik leida kas otse trapetsi sisenurkade või nende võrdhaarsete kolmnurkade alusnurkade suurused: 3 p
- Lahendus lõpule viidud (leitud trapetsi sisenurkade suurused): 3 p

Ainult õige vastuse eest ilma selgitusteta anda 1 punkt.

4.
- Märgitud, et vastavalt ülesande tingimusele on 1005 võimalikku tehingupartnerite arvu: 1 p
- Näidatud, et ei saa korraga olla kaht ärimeest, kellel oli vastavalt 0 ja 2008 tehingupartnerit, st. tegelikult saab korraga realiseeruda 1004 võimalikku tehingupartnerite arvu: 3 p
- Lahendus lõpule viidud (rakendatud Dirichlet' printsiipi): 3 p

Eesti LVI matemaatikaolümpiaad

31. jaanuar 2009 Piirkonnavoor **10. klass**

Hindamisjuhised

1.
- Avaldatud ristküliku pindala ja ümbermõõt a ja b kaudu: 1 p
- Leitud veerandringi pindala ja ümbermõõt: 2 p
- Leitud a ja b, lähtudes ümbermõõtude ja pindalade võrdsusest: 4 p

  Sealhulgas:
  - Pandud ümbermõõtude ja pindalade võrdsuse tingimused kirja õige võrrandisüsteemina a ja b suhtes: *1 p*

Ainult õige vastuse eest ilma selgitusteta anda 1 punkt.

2.
- Leitud x ja y (või y ja x) väärtuste suhe: 2 p
- Lahendus lõpule viidud: 5 p

  Sealhulgas:
  - Leitud, et $xy = 6$: *2 p*

Ainult täieliku õige vastuse eest (mõlemad lahendid) ilma selgitusteta anda 1 punkt, ühe õige lahendi eest anda 0 punkti.

3. Vastavalt žürii lahendustele 1 ja 2 anname siin kaks hindamisskeemi.

Lahendus seose $a^2 - 1 = (a+1)(a-1)$ abil.
- Ülesande tingimus kirja pandud kujul $P + 1 = a^2$: 1 p
- Teisendatud kujule $P = (a+1)(a-1)$: 1 p
- Lahendus lõpule viidud: 5 p

  Sealhulgas:
  - Analüüsitud üks kahest juhust vastavalt a paarsusele: *2 p*
  - Analüüsitud ka teine juht: *3 p*

Lahendus otsese jääkide analüüsi abil.
- Tähele pandud, et vaadeldav algarvude korrutis annab 4-ga jagamisel jäägi 2: 3 p
- Märgitud, et iga täisruut annab 4-ga jagamisel jäägi 0 või 1: 2 p
- Lahendus lõpule viidud: 2 p

Ainult õige vastuse “ei” eest ilma selgitusteta anda 0 punkti.

4.
- Rakendades ruutude vahe valemit, esitatud tegur $1 - \frac{1}{k^2}$ kujul $\left(1 + \frac{1}{k}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{k}\right)$ või $\frac{(k+1)(k-1)}{k^2}$: 2 p

- Tähele pandud, et tekivad korrutised $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots$ ja $\frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \ldots$, kus järjestikuste tegurite lugejad ja nimetajad saab taandada: 3 p

  Sealhulgas:

  - Tähele pandud üks neist taandamisvõimalustest: *1 p*
- Lahendus lõpule viidud: 2 p

5. Vastavalt žürii lahendustele 1 ja 2 anname siin kaks hindamisskeemi.

Lahendus nurkade aritmeetika abil.

- Näidatud, et kolmnurk EFB on võrdkülgne: 2 p
- Leitud nurga AEF suurus: 3 p
- Lahendus lõpule viidud: 2 p

Lahendus tähelepaneku abil, et AE ja BF on risti.

- Näidatud, et kolmnurk EFB on võrdkülgne: 2 p
- Näidatud, et kolmnurgad AEF ja AEB on võrdsed: 4 p

  Sealhulgas:

  - Tähele pandud, et lõigud AE ja BF on risti: *1 p*
- Lahendus lõpule viidud: 1 p

Ainult õige vastuse eest ilma selgitusteta anda 1 punkt.

6. Vastavalt žürii lahendustele 1 ja 2 anname siin kaks hindamisskeemi.

Lahendus, mis lähtub kahest sama värvi järjestikusest arvust.

- Tähele pandud, et kui ei leidu kaht sama värvi järjestikust arvu, siis on nõutav kolmik olemas: 2 p
- Tähele pandud, et kui nende arvude naabrid mõlemal pool ei ole teist värvi, on nõutav kolmik olemas: 1 p
- Lahendus lõpule viidud: 4 p

Lahendus, mis lähtub kahest sama värvi järjestikusest paaris- või paaritust arvust.

- Tähele pandud, et kui ei leidu kaht sama värvi järjestikust paarisarvu (või paaritut arvu), siis on nõutav kolmik olemas: 2 p
- Tähele pandud, et kui nende vahel asuv arv ei ole teist värvi, siis on nõutav kolmik olemas: 1 p
- Lahendus lõpule viidud: 4 p

Hindamisjuhised

1.
- Leitud rombi diagonaalide pikkused: 4 p
  Sealhulgas:
  - Leitud õigesti ühe diagonaali pikkus: *2 p*
- Leitud rombi siseringjoone raadius: 3 p

Kui rombi diagonaalide pikkused on esitatud lihtsustamata kujul, näiteks $\sqrt{1+\frac{\sqrt{2}}{2}} \pm \sqrt{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}$, siis selle eest punkti maha mitte võtta.

Ainult täieliku õige vastuse eest ilma selgitusteta anda 1 punkt. Mittetäieliku või osaliselt vale vastuse eest ilma selgitusteta anda 0 punkti.

2.
- Koostatud sobiv võrrandisüsteem $\sin\alpha$ ja $\cos\alpha$ suhtes: 2 p
- Leitud sobivad $\sin\alpha$ ja $\cos\alpha$ väärtuste paarid: 2 p
- Leitud neile vastavad nurgad α: 3 p

Kui nurkade α leidmisel pole kontrollitud, kas nende siinuse ja koosinuse väärtused mõlemad sobivad, ja seetõttu antud vastuses ka võõrlahendid 180° ja/või 270°, anda nurkade leidmise osa eest ühe võõrlahendi korral 2 punkti ja kahe võõrlahendi korral 1 punkt.

Kui vastuses on lisaks antud ka nurk 360° (pole arvestatud ranget võrratust ülesande tekstis), siis selle eest punkti maha mitte võtta.

Ainult täieliku õige vastuse eest (kaks õiget nurka) ilma selgitusteta anda 1 punkt. Mittetäieliku või lisaks valesid nurki sisaldava vastuse eest ilma selgitusteta anda 0 punkti.

3.
- Esitatud idee uurida vaadeldavate summade paarsust: 1 p
- Esitatud mõistlik strateegia selleks (nt vaadeldes võimalusi, kui antud nelja arvu seas on erinev arv paaris ja paarituid arve, või vaadeldes kolme suurema arvu paarikaupa summasid): 2 p
- Lahendus lõpule viidud: 4 p

Ainult õige vastuse "ei" eest ilma selgitusteta anda 0 punkti.

4.
- Leitud lahend $x = 0$ ja kontrollitud või vähemalt mainitud, et see sobib: 2 p
- Näidatud, et rohkem lahendeid ei ole: 5 p
  Sealhulgas:

- Leitud mingid täiendavad lahendid (nt $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$) ja näidatud, et *peale nende* rohkem lahendeid ei ole: *3 p*
- Näidatud, et need täiendavad lahendid on võõrlahendid: *2 p*

Kui on leitud lahend $x = 0$ ja ei ole mingit viidet sellele, et selle sobivust on kontrollitud, siis anda selle osa eest 1 punkt.

Kui lahenduses mingi sammu lubatavust ei ole kontrollitud (nt on jagatud x-ga läbi ilma uurimata, kas x võiks olla 0) ja selle tulemusena lahend $x = 0$ läheb kaduma, siis selle eest täiendavalt punkte mitte maha võtta (st selline lahendus võib saada kuni 5 punkti, kui on näidatud, et lahendeid $x \neq 0$ ei ole).

Ainult õige vastuse eest ilma selgitusteta anda 1 punkt.

5.
- Esitatud toimiv idee tõestamiseks, et selline nelinurk ei saa olla rööpkülik (nt vaadeldud kahe ülemise ja kahe alumise sirge vahel tekkivaid kolmnurki nagu žürii lahenduses): 3 p

  Sealhulgas:
  - Tähele pandud, et rööpküliku ühe külje otspunktid ei saa olla kahel äärmisel sirgel või kahel keskmisel sirgel: *1 p*
- See idee ellu viidud (korralikult põhjendatud): 4 p

Ainult õige vastuse “ei” eest ilma selgitusteta anda 0 punkti.

6.
- Näidatud, et kuuenda veeru arvude summa saab olla 735: 3 p
- Põhjendatud, et kuuenda veeru arvude summa ei saa olla suurem kui 735: 4 p

Summa 735 võimalikkuse näitamisel ei tarvitse vastav näide olla tabelina esitatud: piisab, kui on selgesti kirjeldatud arvude paigutamise viis, mis sellise summa annab.

Ainult õige vastuse eest ilma selgitusteta anda 1 punkt.

Hindamisjuhised

1. Vastavalt žürii lahendustele 1 ja 2 anname siin kaks hindamisskeemi.

Lahendus võrrandisüsteemide abil.

- Tähele pandud, et otsitavate punktide koordinaadid rahuldavad tingimust $x^2 + y^2 = 10$: 1 p
- Koostatud võrrandisüsteem ühe juhu jaoks: 1 p
- Leitud ühe võimaliku punkti koordinaadid: 2 p
- Koostatud võrrandisüsteem teise juhu jaoks: 1 p
- Leitud teise võimaliku punkti koordinaadid: 2 p

Lahendus sümmeetria abil.

- Tähele pandud, et etteantud kaks punkti paiknevad koordinaatide alguspunktist vaadatuna täisnurga all: 2 p
- Järeldatud, et otsitavad punktid on etteantud punktidega sümmeetrilised koordinaatide alguspunkti suhtes: 3 p
- Leitud otsitavate punktide koordinaadid: 2 p

Kui vastuses on antud ka ühe või mõlema etteantud punkti koordinaadid, siis anda 1 punkt vähem.

Ainult täieliku õige vastuse eest (mõlema võimaliku punkti koordinaadid) ilma selgitusteta anda 1 punkt. Mittetäieliku või lisaks valesid punkte sisaldava vastuse eest ilma selgitusteta anda 0 punkti.

2.
- Leitud, et $b = 0$: 1 p
- Leitud, et mõlema graafiku ühine lõikepunkt x-teljega on punktis $x = 1$: 2 p
- Järeldatud, et ruutfunktsioon on kujul $y = ax^2 - a$ (st $c = -a$): 1 p
- Leitud a ja c võimalikud väärtused: 3 p

Kui on kirja pandud, et peegeldatud ja nihutatud graafik esitub võrrandiga $y = -a(x-2)^2 - b(x-2) - c$, ning muud punktiväärilist ei ole tehtud, siis anda selle eest 1 punkt. Kui lisaks on märgitud, et peab olema $b = 0$, siis anda 2 punkti.

Ainult täieliku õige vastuse eest (mõlemad arvukolmikud) ilma selgitusteta anda 1 punkt. Mittetäieliku või lisaks valesid arve sisaldava vastuse eest ilma selgitusteta anda 0 punkti.

3. Selle ülesande lahendus seisneb sisuliselt positiivsete täisarvude läbivaatamises, kusjuures läbivaadatavate arvude hulka saab kitsendada mitmesuguste tähelepanekute abil. Žürii pakutud lahendused esitavad kaks sellist kitsendamise viisi, mis on üsna efektiivsed (juba esimene järelejäänud arv sobib), kuid piisab ka näiteks arvude $3k^3$ järjest läbivaatamisest, võttes $k = 1, 2, \ldots$. Seetõttu esitame siin hindamisskeemi ainult väga üldisel kujul.

- Näidatud, et arv 648 on nõutava omadusega: 2 p
- Näidatud, et ükski väiksem arv ei ole nõutava omadusega: 5 p

Ainult õige vastuse eest ilma selgitusteta anda 1 punkt.

4. Vastavalt žürii lahendustele 1 ja 2 anname siin kaks hindamisskeemi.

Lahendus geomeetrilise jada osasumma abil.

- Kirja pandud seos $(2^k - 1) - \big((2^1 - 1) + \ldots + (2^{k-1} - 1)\big) = k$: 2 p
- Teisendatud see seos kujule, kus saab rakendada geomeetrilise jada osasumma valemit: 2 p
- Lahendus lõpule viidud: 3 p

Lahendus induktsiooni abil.

- Kontrollitud induktsiooni baas (piisab mainimisest, et väikeste arvude k korral väide kehtib): 1 p
- Kirja pandud induktsiooni eeldus ja avaldis, mille väärtus on induktsiooni sammu tõestamiseks vaja leida: 1 p
- Ära kasutatud induktsiooni eeldus: 2 p
- Induktsiooni sammu tõestus lõpule viidud (ära kasutatud jada üldliikme kuju): 3 p

5. Vastavalt žürii lahendustele 1, 2 ja 3 anname siin kolm hindamisskeemi.

Lahendus ümberringjoone keskpunkti abil.

- Näidatud, et $|CD| = 2|CH|$ (lahenduse 1 tähistustes): 2 p
- Näidatud, et $\angle CDH = 30^\circ$: 2 p
- Näidatud, et $\angle CBA = 15^\circ$: 3 p

Lahendus täisnurkse kolmnurga kõrguse omaduse abil.

- Saadud võrrandisüsteem, mis seob kaatetite projektsioone (lahenduse 2 tähistustes f ja g) ja kõrgust h: 2 p
- Leitud projektsiooni f või g ja kõrguse h suhe (st kolmnurga ABC teravnurga tangens või kootangens): 3 p
- Näidatud, et üks teravnurkadest on 15°: 2 p

Lahendus tingimustele vastava kolmnurga ühesuse abil.

- Sõnastatud väide, et ülesande tingimustele vastava kolmnurga nurgad on üheselt määratud, ning näidatud, et täisnurkne kolmnurk teravnurkadega 15° ja 75° rahuldab ülesande tingimusi: 3 p
  Sealhulgas:

- Sõnastatud väide, et ülesande tingimustele vastava kolmnurga nurgad on üheselt määratud: *1 p*
- Näidatud, et täisnurkne kolmnurk teravnurkadega 15° ja 75° rahuldab ülesande tingimusi, kui sellise kolmnurga üheseuse väidet ei ole esitatud: *1 p*

◦ Põhjendatud, miks ülesande tingimustele vastava kolmnurga nurgad on üheselt määratud: 4 p

6. ◦ Näidatud, et kõik kirjutatud arvud saavad olla täisarvud: 3 p

◦ Tõestatud, et kõik kirjutatud arvud ei saa olla naturaalarvud: 4 p

Sealhulgas:

- Esitatud idee vaadelda vähimat ruudustikus esinevat arvu, või konstrueerida lõpmatult kahanev arvude jada: *1 p*

Ainult õige vastuse "jah; ei" eest ilma selgitusteta anda 0 punkti.

Kokkuvõtteks

Paistab, et piirkonnavooruga võib üldjoontes rahule jääda, ühegi klassi komplekt polnud ülearu raske ega kerge. Ka paljude viimaste aastate kannataja 11. klass sai seekord raskuselt päris mõistlik.

Nagu eelmistel aastatel, ei vaadanud žürii ka tänavu enamikus klassides läbi kõiki ülesandeid kõikides piirkondadest saadetud töödes, vaid ainult niipalju, kui oli vaja huvipäevale ja lõppvooru kutsutavate õiglaseks määramiseks. See tähendab, et kõikide huvipäevale ja lõppvooru kutsutavate õpilaste töödes vaadati läbi kõik ülesanded ning ükski õpilane, kelle töös mõned ülesanded jäid läbi vaatamata, ei tõuseks kutsutavate hulka ka siis, kui talle kõikide nende ülesannete eest antaks maksimaalsed punktid.

Läbi vaatamata jäänud ülesanded on tabelites eristatud halli (veebiversioonis oranži) taustavärviga. 8., 9. ja 11. klassi tööde kontrollijad vaatasid läbi kõikides töödes kõik ülesanded.

Kontrollijate kommentaarid (Elts Abel, Mart Abel)

Üldised märkused

Täname korraldajaid võistluse läbiviimise eest!

Mõningad tähelepanekud koodilehtede kohta: 1) Eestimaal võiksid need siiski eestikeelsed olla.

2) Kui kasutame koodi tähenduses sõna "šiffer", siis kirjutame ikka kaks f-tähte.

3) Kood või šiffer 9321 ei ole kindlasti number, vaid arv, mis tuleks kirjutada igale töö lehele. (Ühes piirkonnas nimetatakse seda aga koodilehel numbriks).

Vaadati läbi kõikides töödes test ja ülesanded 1 ja 2. Arvestades kolmanda ülesande eest kõikidele esialgu mõtteliselt 7 punkti, tehti paremusjärjestus ja vaadati parima 25 töö väljaselgitamiseks 38 töös ka kolmas ülesanne.

Lahenduste vaatajail on järgmised tähelepanekud:

1) Osutus, et väiksemast täisarvust suurema lahutamine tekitab palju probleeme ja eksimusi. On arusaam, et kahe arvu vahe on alati kujul "esimene miinus teine", ei mõelda, et see võib olla ka "teine miinus esimene".

2) Arvatakse, et kui ülesandes on otsitavateks a ja b, siis peavad need tingimata olema omavahel erinevad.

3) Teksti ei loeta piisava tähelepanuga.

4) Lahenduste kirjapaneku oskustes on väga suuri erinevusi. Teise osa ülesannete korral ongi olulised kirja pandud põhjendused ja selgitused, mida just hinnataksegi.

Test

Ül. 4. Tüüpiline vale vastus oli 0.

Ül. 6. Žürii otsustas anda vastuse 10 cm·10 cm eest 1 punkti.

Ül. 9. Tüüpiline vale vastus oli 20.

Ülesanne 1

Proovimise teel ei olnud raske leida õiget vastust (2p). Kui nii tehakse, siis peaks ikka kontrollima ka kõikide ülesande tingimuste täidetust (1p). Kui võetakse kasutusele mingi muutuja (näiteks x), siis kindlasti tuleks öelda, mida see tähistab. Tuleb ka selgitada, kuidas antud tähistuse kaudu tekivad kirja pandud seosed ja võrrandid ülesande tingimustestlähtuvalt. Põhiline eksimus: arvati, et ka oletatavate arvete korral peab nende summa olema 550 krooni, mida ülesande tekstis ei olnud öeldud ja mis nii ka ei olnud.

Ülesanne 2

Üsna sageli oli lahendatud proovimise teel. Kui üks lahend oli käes, ei vaevutud kontrollima, kas ka teisi sobivaid variante võiks leiduda. Sageli eeldati, et a, b ja c peavad olema paarikaupa erinevad ning samuti erinema ülesande tekstis kasutatud numbritest $4, 0, 3$ ja 1. Hämmastavalt palju esines põhimõttelisi vigu lahutamisel (näiteks $674 - 703 = -171$ või $703 - 732 = -129$). Sellest hoolimata olid piirkondlikud hindajad andnud sellise lahenduse eest 7 punkti!

Ülesanne 3

Ülesanne oli üsna traditsiooniline ja lahenduv ühe kindla algoritmiga, tuli vaid teksti täpselt lugeda. Lahenduste vormistamisega võib üldiselt rahule jääda. Kindlasti edaspidi arvestada, et matemaatika olümpiaadil arvu π me ülesandes ei asenda ei arvuga 3,14 ega ka ühegi teise selle arvu lähendiga, kui just pole teisiti öeldud. Põhilised segadused: mis on ringi diameeter, mis raadius ja kumb neist pindala valemis on; kas tuli leida ringi või poolringi pindala; milliste suuruste protsentuaalset suhet ikka tuli leida.

Eesti LVI matemaatikaolümpiaad

31. jaanuar 2009 Piirkonnavoor **8. klass**

Kontrollijate kommentaarid (Raili Vilt, Maksim Ivanov)

Üldised märkused

Test

Testi raskeimaks osutusid ülesanded 10, 3 ja 9. Kõige paremini lahendati ülesandeid 1, 6 ja 8.

Ülesanne 1

Ülesanne osutus väga lihtsaks ja oli lahendatud väga hästi. Kõik õpilased jõudsid õige vastuseni. Vaatamata sellele mõned õpilased ei saanud maksimumpunkte. Selleks on tegelikult kaks põhjust.

Esiteks, ka nii lihtsate ülesannete puhul ei piisa ainult vastusest. Iga tehtud samm peaks olema piisavalt põhjendatud. Teiseks, mõned õpilased selle loogika ülesande lahendamisel kasutasid nn. vastavuste tabelit. Tahaks pöörata tähelepanu sellele, et ka tabeli koostamist peaks kommenteerima ning selle põhjal tehtud järeldused peavad olema korrektsed.

Selle ülesande hindamisjuhendis oli kirjas, et õige lõppvastus annab ühe punkti. Sellele toetudes mõned parandajad võtsid ühe punkti maha, kui lahenduse lõpus ei olnud sõna „vastus”. Õpilased aga „vastuse” asemel kasutasid teisi konstruktsioone nagu „see tähendab, et…”, „sellega on kindlaks tehtud, et…” jne. Need konstruktsioonid lugesime sõnaga „vastus” samaväärseteks.

Ülesanne 2

See arvuteooria ülesanne oli 8. klassi komplektis kõige raskem. Kõigepealt oli vaja aru saada, et ülesande lahendamiseks ei piisa vajalikkude summade leidmisest, peaks veel näitama, et saadud summad on ainukesed võimalikud.

Enamus õpilasi on piirdunud vaid summade leidmisega, mille eest oli võimalik kokku saada 2 kuni 3 punkti.

Ülesanne 3

Geomeetria ülesanne oli suhteliselt lihtne. Siin pööraks tähelepanu sellele, et seekord said üsna rangelt punktidega karistatud need õpilased, kes kasutasid arvu π lähisväärtust ning seetõttu said ligikaudseid vastuseid.

Põhivigade seas oli ringi pindala valemi $S = 2\pi r^2$ kasutamine ning väited nagu

$$S = \pi r^2 = \pi 8^2 = 64\pi = 64\pi : 2 = 32\pi \qquad \text{või} \qquad 64 = \sqrt{64} = 8.$$

Kontrollijate kommentaarid (Indrek Zolk, Kalle Kaarli)

Test

Test on seekord parandatud erakordselt täpselt: parandamise ühtlustamisel ei tulnud teha *ühtki* punktimuudatust. Test ise oli õpilastele küllalt raske: maksimumilähedasi punkte on vähe. Ülesandele 10 pakuti paljusid erinevaid vastuseid, nende seas õiget vastust küllalt harva.

Ülesanne 1

Ülesannet oli päris ilusti lahendatud ja üldiselt ka õiglaselt hinnatud. Õpilased tundsid üldiselt hästi jaguvustunnuseid ja neid kasutades sõelusid õige vastuse kenasti välja. Sagedamini esinenud vigadest tooksin esile järgmise: 7-ga jaguvuse üle otsustati selle järgi kas lisatava kolmekohaline arv jagub 7-ga, ilma et oleks uuritud, kas 2009 jagub 7-ga. Üksikud lahendajad arvasid, et 8-ga jaguvus on samaväärne 2 ja 4-ga jaguvusega. Tallinna Reaalkooli õpilased tundsid 7-ga jaguvuse tunnust, mida ka kasutasid. Üsna mitu lahendajat tugines vähima ühiskordsena. Leiti, et 840 on antud arvude VÜK ja veenduti, et nõutud vahemikus on täpselt üks 840-ga jaguv arv. Sagedane viga, mida seejuures tehti, oli, et ei selgitatud, mida tegelikult tehakse. Leiti näiteks arv 840, aga ei nimetatud, et see on antud arvude VÜK.

Ülesanne 2

Ülesanne osutus õpilaste jaoks suhteliselt lihtsaks.

Mitmed lahendajad olid fikseerinud korterite arvu ja/või väikese korteri pindala kindla arvuna. Hindamisskeem sellise kitsenduse eest antavat trahvi ei kirjelda. Hindamise ühtlustamisel võeti korterite arvu fikseerimisel maha 2 punkti, välja arvatud kui korterite arvuks valiti 3 (siis võeti maha 1 punkt). Seda põhjendab asjaolu, et igasuguse ülesande tingimustele vastava maja võib jaotada kolmest korterist koosnevateks võrdpindseteks gruppideks (igas grupis üks suur ja kaks väikest korterit) ning lahendada ülesanne ühes taolises grupis. Korteri pindala fikseerimise eest võeti maha 2 punkti.

Ülesanne 3

Ülesannet oli päris ilusti lahendatud ja üldiselt ka õiglaselt hinnatud. Üks sagedamini esinenud viga oli järgmine. Mingil hetkel kasutati fakti, et diagonaal poolitab ühe sisenurkadest ja ei olnud võimalik aru saada, kust see (iseenesest õige fakt) on võetud.

Ülesanne 4

Ülesandel oli massiliselt esinev „otsetee": lugeda arvude $0, 1, 2, \ldots, 2009$ seas paiknevad paarisarvud valesti kokku, saades tulemuseks 1004, ning siis asuda kohe Dirichlet' printsiipi rakendama. Sellistele lahendustele saab skeemi põhjal anda punkte vaid lahenduse lõpuleviimise eest (3 p.), kuna ülejäänud etapid on läbi viimata.

Mõni õpilane otsustas, et leitud 1005 varianti tehingupartnerite arvudeks võivad kõik realiseeruda ning asus Dirichlet' printsiipi rakendama, rõhutades, et $2009 < 2 \cdot 1005$. Siin aga pole Dirichlet' printsiibiga midagi teha, kuna pesade arvu $n = 1005$ ja objektide arvu $m = 2009$ jaoks ei kehti seos $m \geqslant 2n + 1$. Niisiis siit otse ülesande väidet saada ei õnnestu.

Arvestades, et õpilaste jaoks põhineb selle ülesande lahendamine ainult „tervel mõistusel" (koolis Dirichlet' printsiipi ei käsitleta), leidus rõõmustavalt palju täislahendusi.

Kontrollijate kommentaarid (Uve Nummert, Reimo Palm)

Ülesanne 1

Lahendusi, kus võrrandisüsteemist $a + b = 1 + \frac{\pi}{4}$, $ab = \frac{\pi}{4}$ olid kohe välja kirjutatud lahendid 1 ja $\frac{\pi}{4}$ ilma selgituseta, miks need on ainsad, oli piirkonnas hinnatud 5 punktiga ja see jäi muutmata.

Lahendused, kus oli läbi jagatud teguriga $a-1$ või $b-1$ ilma vaatlemata juhtu, kus see tegur võiks olla 0 (mis annab sama küljepikkuste paari teistpidi), said ühtlustamisel 6 punkti.

Ülesanne 2

Lahendused, kus oli kontrolli tegematajätmise tõttu sisse jäetud ka võõrlahendid, said ühtlustamisel 5 punkti.

Lahendusi, kus kahest lahendist oli leitud ainult üks (tüüpiliselt seetõttu, et võrrandi $(x-y)^2 = 1$ kahest lahendist $x - y = 1$ ja $x - y = -1$ vaadeldi vaid üht) oli piirkondades hinnatud 4 punktiga ja see jäi muutmata.

Ülesanne 3

Peamiselt olid selles ülesandes ühtlustamised paari punkti ulatuses.

Üldiselt anti lahenduse eest üks punkt juhul, kui töös oli analüüsitud matemaatiku saadud korrutise paarsust, sest paarsuste uurimine viib tõepoolest lahendusele lähemale.

Tartus olid mitmed lahendajad ilmselt õppinud Eukleidese teoreemi algarvude hulga lõpmatusest. Ülesande olukord on selles teoreemis vaadeldavaga analoogiline, seda panid ka paljud õpilased tähele, aga kahjuks pole näha, kuidas selle teoreemi tõestuskäiku siin ära kasutada saaks. Seepärast anti kõigile niisugust ideed väljendanud töödele 0 punkti.

Ülesanne 4

Tüüpiline viga oli ebamäärased väited („liiga suur“, „kindlasti piisav“) ilma põhjendusteta.

Muus osas õiged tööd, kus aga järeldumise loogika oli ilmutatult valepidi (nt tähistatud järeldumisnooltega), said 5–6 punkti.

Ülesanne 5

Ülesanne oli päris hästi lahendatud ja ka punktimuutusi oli vähe.

Lahendused, kus vaadeldi vale olukorda (juba esialgne joonis vale), said ühtlaselt 0 punkti.

Ülesanne 6

Lisaks žürii lahendustega sarnastele arutlustele olid paljud lahendajad siin vaadelnud mingil viisil esitatud võimaluste puud, püüdes näidata, et selle igas harus jõuame otsitava arvude kolmikuni. Seda tüüpi lahendusi oli piirkondades üsna ebaühtlaselt hinnatud: leidus täispunktidega hinnatud töid, kus olid sisuliselt käsitletud vaid mõned erijuhud, ent samas ka madalalt hinnatud töid, kus kommentaarid olid väga lakoonilised, ent juhtude läbivaatus oli samas täielik või vaid mõni väike alamharu vaatamata jäänud.

Paljudes lahendustes apelleeriti sellele, et kuna mingi fikseeritud pikkusega arvujärjendite värvimiseks kahe värviga on lõplik arv võimalusi, aga arvsirge on lõpmatu, siis hakkavad sarnased järjendid korduma. Sellest aga otseselt ülesande väide ei järeldu, sest see kordumine ei tarvitse olla perioodiline (võrdluseks: ka numbreid on lõplik arv, ent sellegipoolest saab neist koostada lõpmatuid mitteperioodilisi kümnendmurde).

Mitmes töös leiti õigesti, et kui ei ole kolme võrdsete vahedega üht värvi arvu, siis saab kahe järjestikuse ühevärvilise arvu vahel olla ülimalt kaks teist värvi arvu ning üht värvi arvud ei või ka paikneda korrapäraselt „üle ühe“ ega „üle kahe“. Edasi aga tehti sellest ebaõige järeldus, et üht vaadeldavat värvi arvude vahel peab olema *vaheldumisi* üks ja kaks teist värvi arvu.

Kontrollijate kommentaarid (Härmel Nestra, Heiki Niglas)

Üldised märkused

Seekord sai siis 11. klassi kord ka kergem komplekt. Lõppvooru pääsemise piir tuli mõistlik, erinevalt üsna mitmest eelnevast aastast.

Negatiivse poole pealt tuleb märkida, et mõnes ülesandes jäi õpilastele arusaamatuks, mida neilt lahendusena oodatakse, ja seetõttu kaotasid paljud rohkemgi punkte kui nende tase eeldanuks. Nii oli 5. ja mõnel määral ka 6. ülesandes: väiteid, mille põhjendust žürii ootas, peeti ilmseks ja põhjendama ei hakatud.

Analoogiline oli talvise lahtise võistluse noorema rühma ülesanne 1, mis kahjuks otsustas ka auhindade jaotuse.

Ehkki sellised ülesanded pole iseenesest võistlusele kõige sobilikumad, sest nende järgi tekkiv pingerida ei pruugi kajastada õpilaste tegelikku edasijõudmust ülesande lahendamisel (edukamad on need, kes viitsivad rohkem kirja panna, mitte eelkõige tegelikud äralahendajad), pole nende mõistliku doseerimise puhul (kui neid pole palju ja kui nad ei selekteeri tippu) ehk vaja kurta. Nad distsiplineerivad noori matemaatikuid ja tuletavad meelde, et matemaatika lahutamatu osa on ka oskus oma väiteid põhjendada.

Ülesanne 1

Tegu oli küllatki tavalise kooliülesandega ja enamik õpilasi tuli sellega hästi toime. Punkte sai muudetud peamiselt seetõttu, et osades piirkondades oli trigonomeetrilisel kujul vastuste eest võetud 1–3 punkti maha.

Ülesanne 2

Kuigi ülesanne oli kavandatud kooliülesandena, paistab, et koolis selliseid siiski hästi lahendada ei osata. Päris palju oli poolikuid ja vigaseid lahendusi. Mis tõeliselt üllatas, oli see, et õpilased massiliselt arvavad, et $\cos 180^\circ = \sin 270^\circ = 1$, mistõttu võõrlahendite kontrollist polnud asja – lahendite mittesobivust sellega lihtsalt ei tuvastatud!

Üks tüüpviga, mida žürii hindamisjuhiste koostamisel ette ei näinud, oli see, et jäeti piirkond $180^\circ \leqslant \alpha < 360^\circ$ üldse vaatluse alt välja, mistõttu võõrlahendite $\alpha = 180^\circ$ ja $\alpha = 270^\circ$ kontrolli küsimus ei tulnud üldse ette. See juhtus, kui õpilane oli jõudnud võrrandini 2α suhtes ning seadis ekslikult 2α-le samad piirid mis ülesanne seadis α-le. Kuna kontrolli puudumise eest oli ette nähtud 2 miinuspunkti, siis võtsime 2 punkti maha ka sellistel töödel.

Veel üks tüüpviga esines lahenduses (mida ka žürii ette ei näinud), kus kahekordse nurga valemite abil mindi üle seostele $\frac{\alpha}{2}$ suhtes ja saadi võrrand $2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\right) = 0$. Uurides varianti $\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2} = 0$, jagati suurusega $\cos\frac{\alpha}{2}$ läbi, kuid ei pööratud tähelepanu juhtudele, kus see võrdub nulliga. Ka selle eest võtsime 2 punkti maha.

Üksjagu õpilasi lahendas võrrandit nii, et proovis lihtsalt läbi üksikuid nurki, mille trigonomeetriliste funktsioonide väärtused on tuntud. Sellistele andsime üldse 2 punkti.

Ülesanne 3

Selles ülesandes sai punkte muudetud paljudes töödes ja küllaltki suures ulatuses. Peaaegu kõik õpilased olid tulnud idee peale, et vaadelda summade paarsust. Kuid selgitused olid enamasti puudulikud. Paljudes töödes oli küll mainitud, et 2 on algarv, kuid samas edasises lahenduskäigus eirati seda fakti. Samuti nii mõneski töös vaadeldi ainult juhtu, kus arvud a, b, c ja d on mittenegatiivsed. Sellised lahendused said enamasti ülimalt 3 punkti.

Ülesanne 4

Selles ülesandes suutsid peaaegu kõik õpilased leida õige vastuse. Kuid enamasti kaasnes sellega ka võõrlahendite tekkimine ja kontroll puudus paljudes töödes. Leidus ka selliseid töid, kus oli kontroll läbi viidud, kuid sellega ei suudetud võõrlahendeid kõrvaldada. Seda enamasti sellepärast, et pandi vasak ja parem pool võrduma ja siis hakati pooli ruutu tõstma ning teisendama, nagu seda tehti lahendeid otsides. Punkte tuligi muuta peamiselt seetõttu, et kontroll puudus osaliselt või täielikult.

Ülesanne 5

See ülesanne on väga lihtne, kuid punktide saamisel mängis väga olulist rolli põhjenduste selgus ja konkreetsus. Enamik õpilasi lugesid ilmseteks üksikuid samme, millele meie ootasime siiski põhjendust.

Tüüpiline väide, mida ei põhjendatud ja seetõttu punkte kaotati, oli see, et erineva vahekaugusega paralleelsete sirgete paaride lõikamisel samasihiliste sirgetega tekivad mainitud sirgepaaride vahel erineva pikkusega lõigud. Kui seda väidet võib eeldada, on sellega ülesanne peaaegu lahendatud (jääb vaid põhjendada, et rohkem võimalikke pilte pole, ja selle eest lubas skeem vaid 1 punkti). Seejuures on seda väidet võimalik väga lihtsalt kooliteadmistega põhjendada: nurkade arvutust ja trigonomeetriat pole vaja; kui need lõigud oleks võrdse pikkusega, siis samasihilisuse tõttu määraksid nad võrdsed vektorid, kuid siis oleks ka nende vektorite koordinaadid vastavalt võrdsed (vektori koordinaadid on üheselt määratud!), mistõttu kui üks koordinaattelg võtta paralleelsete sirgete paaridega risti, siis vektorite see koordinaat oleks võrdne sirgepaaride vahekaugusega ja tekiks kohe vastuolu nende kauguste erinevusega.

Seetõttu oli vahetegemine sellel, kas lahendus on olemas või on kirjas vaid realiseerimata idee, suhteliselt raske ja tulemus kippus nii või teisiti kunstlik tunduma.

Tuleb tunnistada, et tõsisematel võistlustel raskemate ülesannete puhul selliste väidete põhjendamist ei nõuta, sellised loetaksegi tuntuks või ilmseks. Täiesti saame aru Tallinna parandajast, kes peaaegu kõigile pani 7 punkti. Osa õpilasi võivad seetõttu nüüd end petetuna tunda, mis teeb sellise ülesande suht ebasobivaks võistlusele üldse. Žürii aga alati ei jõua kõiki võimalikke lahenduskäike ja seetõttu ülesande sellist iseloomu ette näha.

Poleks aidanud ka skeemi ümbertegemine, nii et võimalike piltide analüüsile oleks rohkem punkte eraldatud, sest seda oli töödes veel vähem tehtud (tüüpiliselt joonistatigi üksainuke pilt ilma selgitusteta, kuidas see on saadud).

Ülesanne 6

Selle ülesande lahendusi läbis tüüpviga, mida võiski arvata, sest see alati esineb sedasorti kombineerimisülesannetes. Nimelt 6. veeru arvude summa 735 maksimaalsuse põhjenduseks näidati järkjärguline konstruktsioon, kus igal sammul valiti hetkel parim võimalik 6. veeru arv. Selline mõttekäik on üldjuhul põhimõtteliselt vale: lõpptulemuse kui terviku ekstremaalse väärtuse saavutamiseks ei pruugi olla alati õige mingi järkjärgulise konstruktsiooni igal sammul valida selles kontekstis (juba eelnevaid valikuid arvestades) ekstremaalne jätk. Antud ülesande puhul tekib küsimus, kas ei võiks maksimaalne summa tekkida nii, et alguses valime 6. veergu võimalikust natuke väiksemad arvud, mille tulemusena tekib võimalus valida protsessi lõpuosas suuremad arvud, mis kokkuvõttes ületavad alguse mahajäämuse.

Selliseid mõttekäike oli piirkondades väga erinevalt hinnatud, oli antud nii täispunkte kui ka mitte midagi. Tartus ja mõnedes väiksemates piirkondades viljeldud teine variant on sümpaatne, kuid otsisime kuldset keskteed, võttes arvesse ka seda, kui kerge oleks õpilase kirjapandut ümber teha korrektseks mõttekäiguks. Seekord võivad õpilased kergendatult hingata, sest siin ülesandes tõepoolest on võimalik sellises mõttekäigus uue arvu valik peaaegu samamoodi põhjendada seejuures eelnevaid valikuid mitte arvestades. Nimelt hinnates suuruselt n-ndat 6. veeru arvu, me teame, et selles reas on 4 temast suuremat arvu ja — et tegu on suuruselt n-nda 6. veeru arvuga — on 6. veerus veel $n-1$ temast suuremat arvu (olgu siis optimaalsed või mitte), millest igas reas omakorda on 4 veel suuremat arvu. Nii tulebki, et iga järgmise 6. veeru arvu puhul on neid arve, mis peavad temast suuremad olema, parajasti 5 võrra rohkem.

Paljud õpilased kaotasid väärtuslikke punkte hoopis konstruktsiooni puudumise pärast või oli see poolik, 1.–5. veeru täitmine jäi tähelepanuta. Võidi mõelda, et see pole oluline, kuna jutt oli ainult 6. veerust, kuid ülesande loogiliselt täielikuks lahenduseks tuleb siiski veenduda, et leitud arvude paigutus 6. veergu, mis pretendeerib maksimaalsusele, on ikka ühe ülesande tingimusi rahuldava tabeli täitmise osa.

Veel üks põhjus, miks real töödel punkte muutsime, oli erinev tõlgendus sellest, millisesse etappi skeemis kuulub summa 735 väljaarvutamine. Seda võis lugeda nii konstruktsiooni etappi kui ka maksimaalsuse tõestuse juurde kuuluvaks. Et teine etapp maksis rohkem, valisime teise — nii said konstruktsioon (ilma 6. veeru arve summeerimata) ja maksimaalsuse tõestus (jällegi ilma summeerimata) ühesuurustena hinnatavaks.

Tagajärjena olid vaid mõned üksikud tööd, kus selles ülesandes piirkonnas pandud punktide arv jäi muutmata.

Kontrollijate kommentaarid (Hendrik Nigul, Aleksei Lissitsin)

Ülesanne 1

Mitmed õpilased vaatlesid ka juhtu, kui antud oli kolmurga alus, mis andis neile lisavastuseid. Selle eest said nad ühe võrra vähem punkte.

Ülesanne 2

Mitmed õpilased arvasid, et *sirge nurk x-teljega* on sama, mis *sirge tõusunurk*. Seetõttu jäi neil üks lahend leidmata. Ühtlustamisel anti nendele õpilastele ülimalt 5 punkti.

Ülesanne 3

See on üks lihtsamatest ülesannetest komplektis. Kuigi selles ülesandes on vaja läbi viia tõestust kahes suunas, tegelikult vastuse 648 leidmine reeglina annab korraga nii seda, et arv 648 on nõutava omadusega, kui ka seda, et ta on vähim võimalik sobiv arv.

Ülesanne 4

See ülesanne on samuti „kas 0 või 7” tüüpi ülesanne. Kui osaleja märkab seost geomeetrilise jadaga ja paneb selle jada summat korrektselt, siis reeglina teeb ta ülesande ka lõpuni. Muid punkte kui 0 või 7 said need, kes tegid kas mingi vea vastuse arvutamisel või ei jõudnud õigesti kirjapandud esialgselt seoselt geomeetrilise jada summani.

Ülesanne 5

Lahendustes esinev tüüpviga oli seosest $\sin 2\alpha = 1/2$ juhu $\alpha = 75^\circ$ vaatamata jätmine. Selle eest karistati 1 punktiga.

Mõned õpilased üritasid lahendada nö. *pöördülesannet* ning veendusid, et kui täisnurkse kolmnurga teravnurgad on $15^\circ, 75^\circ$, siis on hüpotenuus 4 korda pikem temale tõmmatud kõrgusest. Paraku ei ole sellise tõestuse puhul kõik sammud tagasi pööratavad, mistõttu ei lahenda see kuidagi esialgset (ehk lahendamist vajavat) ülesannet. Sellised lahendused said enamasti 1 punkti.

Ülesanne 6

See ülesanne koosnes kahest osast. Kuna kummagi osa vastused on erinevad, siis peaksid ka tõestused olema hoopis erineva ülesehitusega.

A) osas piisas leida 1 sobiv täisarvude paigutus tasandile, et iga arv oleks oma naabrite aritmeetiline keskmine. Üsna sageli piirduti 5×5 tabeli tegemisega. Seejuures jäeti enamasti näitamata, kuidas tuleks täita ülejäänud tasandi punkte. Mõnikord ei veendutud jällegi, kas iga arv ikka on oma naabrite keskmine.

Mõned õpilased üritasid näidata, et A) osas on lahendeid rohkem, kui üks. Ent seejuures võis kahtluse alla sattuta, kas leitud üldvalem ikka sobib tasandi täitmiseks arvudega.

B) osas eksiti massiliselt ülesande tingimuse *tasandi kõik arvud ei ole võrdsed* tõlgendamisega. Arvati, et *ei leidu arvu, mis oleks võrdne oma kõigi naabritega*. Paraku ei saa 5 arvu mittevõrdsust järeldada kõigi arvude mittevõrdsusest. Veelgi enam: tasandit saab täita täisarvudega nii, et seal leidub arv, mis on võrdne oma kõigi 4 naabriga (ning rahuldaks muid A) osa tingimusi), mingit vastuolu ei teki. Korrektne oleks järeldada, et *leidub arv, mis ei ole võrdne oma kõigi naabritega* ning rajada oma arutlus sellele arvule.

Mõnes venekeelses töös aeti segamini aritmeetilise keskmise ja aritmeetilise jada mõiste. Arvati, et tasandi iga rida (või veerg) peab moodustama aritmeetilise jada.