Eesti LVI matemaatikaolümpiaad

31. jaanuar 2009 Piirkonnavoor **7. klass**

I osa vastused

1. 8.
2. $((1+2)\cdot 3-4):5=1$.
3. 10.
4. 5.
5. 17°.
6. 10 cm.
7. 16.
8. 11.
9. 21.
10. 15.

Lahendused

1. Võrduste $2007+2011=2\cdot 2009$ ja $2008+2010=2\cdot 2009$ abil saame, et

$$\frac{2007+2\cdot(2008+2009+2010)+2011}{2009} = \frac{2\cdot 2009+2\cdot(3\cdot 2009)}{2009} = \frac{8\cdot 2009}{2009}=8.$$

2. $((1+2)\cdot 3-4):5=(3\cdot 3-4):5=5:5=1$.

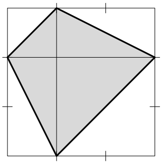
3. Kuna $222\,000\,000\,999:111=2\,000\,000\,009$, siis on jagatis 10-kohaline.

4. Paaritute arvude korrutis on alati paaritu arv. Antud arvude seas leidub arv 5. Kui korrutada mingi paaritu arv 5-ga, siis tulemuseks on alati 5-ga lõppev arv.

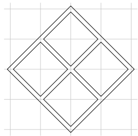
5. $\angle B_1OC_1=\frac{1}{2}\angle AOB-\frac{1}{2}\angle AOC=\frac{1}{2}\cdot 58^\circ-\frac{1}{2}\cdot 24^\circ=17^\circ$.

6. Tõmbame tumedaks värvitud nelinurga diagonaalid ja näeme, et tumedaks värvitud osa pindala on täpselt pool ruudu pindalast (joonis 1). Seega ruudu pindala on 100 cm^2, millest järeldub, et ruudu külje pikkus on 10 cm.

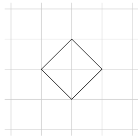
7. Teame, et $|AB|<|AK|+|KB|=4+4=8$ ja $|BC|<|BL|+|LC|=5+5=10$. Seega lõigu AB suurim võimalik täisarvuline pikkus on 7 ja lõigu BC suurim võimalik täisarvuline pikkus on 9. Järelikult lõigu AC suurim võimalik pikkus on 16.



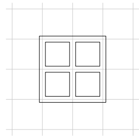
Joonis 1



Joonis 2



Joonis 3



Joonis 4

8. Ütleme, et ruudustik koosneb ühikruutudest. Siis leidub

- 1 ruut, mille küljepikkus võrdub ühikruudu diagonaali kahekordse pikkusega; 5 ruutu, mille küljepikkus võrdub ühikruudu diagonaali pikkusega (joonised 2 ja 3);
- 1 ruut, mille küljepikkus võrdub ühikruudu kahekordse küljepikkusega; 4 ruutu, mille küljepikkus võrdub ühikruudu küljepikkusega (joonis 4).

Seega leidub täpselt 11 ruutu.

9. Vastavalt ülesande tingimustele leidub vähemalt üks venekeelne laul. Kuna venekeelseid laule on vähem kui 5%, siis laulude arv peab olema suurem kui $1 : 0{,}05 = 20$. Laulude vähim võimalik arv on 21, sest kui plaadil on täpselt 20 eestikeelset ja 1 venekeelne laul, on ülesande tingimused rahuldatud.

10. Vahetu loendamise teel leiame, et alles on 12 ühikkuupi. Seega eemaldati $3 \cdot 3 \cdot 3 - 12 = 27 - 12 = 15$ ühikkuupi.

I osa vastused

1. 42.
2. $1 : ((2+3) : 4 : 5) = 4$
3. 60%.
4. 0.
5. 3.
6. 180°.
7. 10 cm.
8. 12 cm.
9. 28.
10. 48.

Lahendused

1. Kuna B, C ja D on kolm järjestikust naturaalarvu, siis saame, et $B+C+D = C-1+C+C+1 = 3C = 63$, millest $C = 21$. Seega $A+E = 21-2+21+2 = 42$.

2. $1 : ((2+3) : 4 : 5) = 1 : (5 : 4 : 5) = 1 : (1 : 4) = 4$.

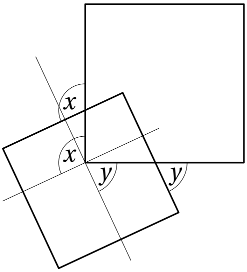
3. Olgu vasaku käe kinnaste arv $2x$, siis paariline on olemas x vasaku käe kindal. Järelikult on paariline olemas x parema käe kindal, mistõttu parema käe kindaid on $3x$. Kindaid on kokku $2x+3x = 5x$ ja neist ilma paariliseta $x+2x = 3x$. Niisiis on ilma paariliseta $\frac{3x}{5x} \cdot 100\% = 60\%$.

4. Korrutise tegurite seas on algarvud 2 ja 5 ning seega peab korrutis jaguma arvuga 10.

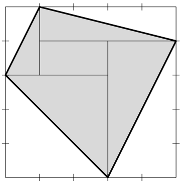
5. Võimalused on 16^1, 4^2 ja 2^4, seega kokku 3 võimalust.

6. *Lahendus 1.* Ruutude ühisosaks on nelinurk, mille kaks nurka on 90° ja kaks nurka on vastavalt võrdsed nurkadega x ja y. Et nelinurga sisenurkade summa on 360°, siis nurkade x ja y summa on 180°.

   Lahendus 2. Joonestame väiksema ruudu külgedega paralleelsed sirged, mis läbivad suure ruudu tippu, mis asub väiksema ruudu sees (joonis 5). Paralleelsete sirgete kolmanda sirgega lõikumisel tekkivad kaasnurgad on võrdsed, niisiis peab nurkade x ja y summa olema 180°.



Joonis 5



Joonis 6

7. *Lahendus 1.* Lugedes suure ruudu külje ühe jaotise pikkusühikuks, näeme, et suur ruut koosneb 25 ühikruudust. Paneme tähele, et tumedaks värvitud osa pindala on värvimata osa pindalast suurem 2 ühikruudu pindala võrra (joonis 6). Et see erinevus on 8 cm^2, siis ühe ühikruudu külje pikkus on 2 cm ja järelikult suure ruudu külje pikkus on 10 cm.

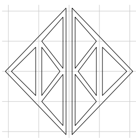
Lahendus 2. Olgu ruudu küljepikkus $5a$. Ruudu värvimata osa (neli täisnurkset kolmnurka) pindala on sel juhul

$$\frac{a \cdot 2a}{2} + \frac{a \cdot 4a}{2} + \frac{2a \cdot 4a}{2} + \frac{3a \cdot 3a}{2} = a^2 + 2a^2 + 4a^2 + \frac{9}{2}a^2 = \frac{23}{2}a^2.$$

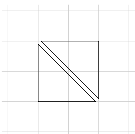
Värvitud osa pindala on seega $25a^2 - \frac{23}{2}a^2 = \frac{27}{2}a^2$ ning värvitud ja värvimata osa pindala vahe niisiis $\frac{27}{2}a^2 - \frac{23}{2}a^2 = 2a^2$. Ülesande tingimuste põhjal $2a^2 = 8\ \text{cm}^2$, millest $a = 2$ cm. Seega ruudu küljepikkus on $5a = 10$ cm.

8. Kuna esimene osa on ilmselt teisest ja kolmandast osast pikem ja kuna on öeldud, et kaks pikimat lõiku on mõlemad pikkusega 4 cm, siis esimese lõiguga saab sama pikk olla vaid neljas. Seega esimene ja neljas lõik on pikkusega 4 cm ning teise ja kolmanda pikkuste summa on ka 4 cm. Järelikult terve lõigu pikkus on 12 cm.

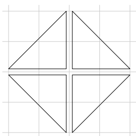
9. Loetleme ruudustikus olevad täisnurksed kolmnurgad hüpotenuusi pikkuse järgi:



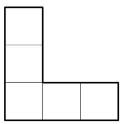
Joonis 7



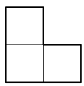
Joonis 8



Joonis 9



Joonis 10



Joonis 11

- kolmnurgad, mille hüpotenuusi pikkus on 2 ühikruudu külge – 16 tükki; kolmnurgad, mille hüpotenuusi pikkus on 4 ühikruudu külge – 4 tükki (joonis 7 ning selle 90° võrra pööratud variant).
- kolmnurgad, mille hüpotenuusi pikkus on 2 ühikruudu diagonaali – 8 tükki (joonised 8 ja 9 ning esimese joonise 90° võrra pööratud variant);

10. Vahetu loendamise teel selgub, et saadud kehal on joonisel 10 kujutatud tahkusid 6 ja joonisel 11 kujutatud tahkusid samuti 6. Kokkuvõttes on keha täispindala $6 \cdot 5 + 6 \cdot 3 = 30 + 18 = 48$.

I osa vastused

1. 42.

2. 2009.

3. 13.

4. 5.

5. 6.

6. 7.

7. 270°.

8. $11:5$.

9. 55°.

10. 48.

Lahendused

1. Et $A+C+E = C-2+C+C+2 = 3C = 63$, siis $C = 21$. Seega $B+D = 21-1+21+1 = 42$.

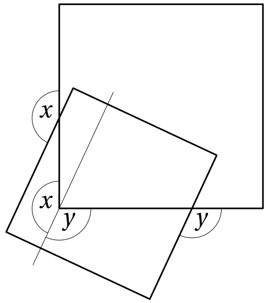
2. Esimesed 2009 positiivset paaritut arvu on: $1, 3, 5, \dots, 4015, 4017$. Esimese ja viimase summa on 4018, teise ja eelviimase summa on 4018, jne. Selliseid paare moodustub 1004, lisaks jääb keskmine arv 2009. Seega nende arvude summa on $1004 \cdot 4018 + 2009 = (1004 \cdot 2 + 1) \cdot 2009$ ning nende aritmeetiline keskmine on $\dfrac{(1004 \cdot 2+1) \cdot 2009}{2009} = 2009$.

3. Et $4p$ ja 66 jaguvad arvuga 2, siis ka $11q$ peab jaguma arvuga 2 ja järelikult $q = 2$. Et $4p = 44$, siis $p = 11$ ja $p+q = 2+11 = 13$.

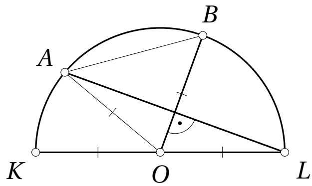
4. Võimalused on 81^1, 9^2, $(-9)^2$, 3^4 ja $(-3)^4$, seega kokku 5 võimalust.

5. $(a+b+c+d)(a+b-c-d) = (a+b)^2 - (c+d)^2$. Et kahe liidetava summa ruudus on kolm liidetavat, siis pärast sarnaste liikmete koondamist saadavas avaldises on 6 liidetavat.

6. Olgu pausi ajal näidatud reklaamiklippide arv x ja toiduainete reklaamiklippide arv y. Tarvis on leida x vähim võimalik väärtus, mille korral on võimalik, et $0{,}4 < \dfrac{y}{x} < 0{,}5$. Vahetu läbivaatus näitab, et taoline vähima nimetajaga murd on $\dfrac{3}{7}$.



Joonis 12



Joonis 13

7. *Lahendus 1.* Ruutude ühisosaks on viisnurk, mille kolm nurka on 90°. Nurkade x ja y summa on võrdne viisnurga kahe mittetäisnurkse nurga summaga: $x + y = (5-2) \cdot 180^\circ - 3 \cdot 90^\circ = 270^\circ$.

Lahendus 2. Joonestame väiksema ruudu küljega paralleelse sirge, mis läbib suure ruudu tippu, mis asub väiksema ruudu sees (joonis 12). Paralleelsete sirgete kolmanda sirgega lõikumisel tekkivad kaasnurgad on võrdsed, niisiis peab nurkade x ja y summa peab olema 270°.

8. Lugedes suure ruudu külje ühe jaotise pikkusühikuks, näeme, et suur ruut koosneb 16 ühikruudust. Kasutades kolmnurga pindala valemit aluse ja kõrguse kaudu, leiame, et värvitud osa pindala on $\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 4+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 4+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2 = 5$ ruutühikut. Seega moodustab tumedaks värvitud osa pindala $\frac{5}{16}$ kogu ruudu pindalast ja värvimata osa pindala $\frac{11}{16}$ kogu ruudu pindalast. Järelikult värvimata ja tumedaks värvitud osade pindalade suhe on $11 : 5$.

9. *Lahendus 1.* Nurk BAL on kaarele BL toetuv piirdenurk (joonis 13). Kuna $\angle BOL = 70^\circ$, siis $\angle BAL = 35^\circ$. Täisnurksest kolmnurgast saame, et $\angle ABO + \angle BAL = 90^\circ$ ja järelikult $\angle ABO = 55^\circ$.

Lahendus 2. Kuna $\angle BOL = 70^\circ$, siis täisnurksest kolmnurgast $\angle ALO = 20^\circ$. Võrdhaarsest kolmnurgast AOL leiame, et $\angle AOL = 180^\circ - 2\cdot 20^\circ = 140^\circ$. Seega $\angle AOB = \angle AOL - \angle BOL = 70^\circ$, mis on ühtlasi võrdhaarse kolmnurga AOB tipunurk. Siit $\angle ABO = \dfrac{180^\circ - 70^\circ}{2} = 55^\circ$.

10. *Lahendus 1.* Paneme tähele, et kuubi iga tahu diagonaal saab olla hüpotenuusiks kahele täisnurksele kolmnurgale, mille kaatetiteks on siis selle tahu kaks serva. Selliseid täisnurkseid kolmnurki on võimalik saada 24.

Kuubi iga tahu diagonaal saab olla ka täisnurkse kolmnurga kaatetiks, kus hüpotenuusiks on kuubi diagonaal. Iga tahu iga diagonaal saab olla kaatetiks kahele täisnurksele kolmnurgale. Selliseid täisnurkseid kolmnurki on võimalik saada 24.

Niisiis täisnurkseid kolmnurki, mille kõik tipud asuvad kuubi tippudes, on 48.

Lahendus 2. Kuubi tippusid on 8 ning seega saab üleüldse nendest tippudest moodustada $\binom{8}{3} = 56$ kolmnurka. Sealjuures parajasti need kolmnurgad, mille kõik servad on tahkude diagonaalid, ei ole täisnurksed. Selliseid kolmnurki on 8 (kuubi iga tipu ümber üks), mistõttu täisnurkseid kolmnurki on $56 - 8 = 48$.

II osa lahendused

1. *Vastus:* lapse arve on 100 krooni, ema arve 300 krooni ja isa arve 150 krooni.

   Olgu x ülesande eelviimases lauses nimetatud telefoniarve, mis kõigil perioodidel oleks võrdne. Siis lapse telefoniarve on $\frac{1}{2}x$, ema oma on $\frac{3}{2}x$ ja isa oma on $x-50$. Ülesande tingimus annab, et

   $$\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}x+(x-50)=550.$$

   Lihtsustamisel saame võrrandi $3x=600$, millest $x=200$. Järelikult on lapse telefoniarve 100 krooni, ema oma 300 krooni ja isa oma 150 krooni.

2. *Vastus:* $a=6$, $b=7$ ja $c=2$.

   Kuna vahe $\overline{b03}-\overline{ab4}$ lõpeb numbriga 9, siis ka vahe $\overline{b3c}-\overline{b03}$ peaks lõppema numbriga 9, millest saame, et $c=2$. Kuna $c=2$, siis võime leida, mitme võrra on iga arv talle vahetult eelnevast arvust suurem:

   $$\overline{b3c}-\overline{b03}=\overline{b32}-\overline{b03}=32-3=29.$$

   Võrdusest $\overline{ba1}-\overline{b3c}=29$ saame, et $\overline{a1}=29+32=61$, millest järeldub, et $a=6$. Pidades silmas võrdust $\overline{b03}=\overline{ab4}+29$ ja asjaolu, et kolmekohalisele arvule kahekohalise liitmisel saab sajaliste number suureneda ülimalt ühe võrra, saame võrratuse $3<29$ tõttu, et $b=a+1=7$.

3. *Vastus:* a) 12π cm^2; b) 60%.

   Kuna $|AB|=16$ cm, siis $|AO|=|OB|=8$ cm ja $|AC|=|CO|=4$ cm. Väikese ja keskmise poolringi raadiused on siis 2 cm ja 6 cm. Nende poolringide pindalad on vastavalt $\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot 2^2=2\pi$ ja $\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot 6^2=18\pi$ ruutsentimeetrit, kokku 20π cm^2. Suure poolringi pindala on $\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot 8^2=32\pi$ ruutsentimeetrit.

   a) Tumedaks värvitud ala hõlmab $32\pi-20\pi=12\pi$ ruutsentimeetrit.

   b) Värvitud ja värvimata alade pindalade suhe on

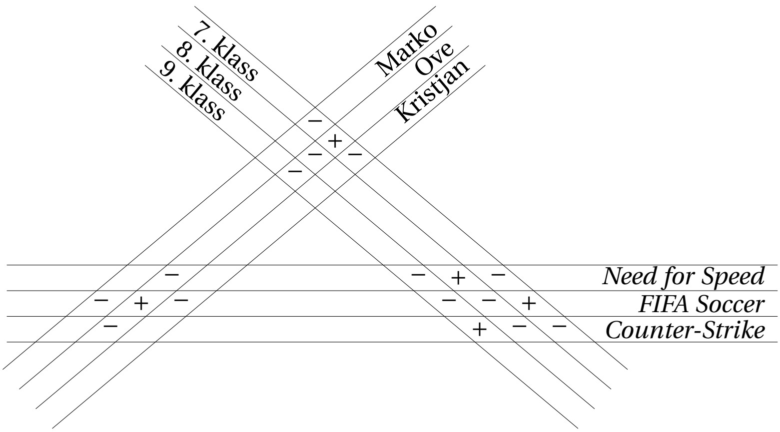
   $$\frac{12\pi}{20\pi}\cdot 100\%=60\%.$$

II osa lahendused

1. *Vastus:* Ove on 7. klassi poiss ja temal on arvutimäng *FIFA Soccer*.

Kuna mängu *Counter-Strike* ei ole 7. klassi õpilasel ja ka mitte 8. klassi õpilasel, sest 8. klassi õpilasel on mäng *Need for Speed*, siis mäng *Counter-Strike* on 9. klassi õpilasel. 7. klassi õpilasel on järelikult mäng *FIFA Soccer*. Et Marko ei ole 7. klassi õpilane ning Kristjan samuti mitte, sest temal pole mängu *FIFA Soccer*, siis 7. klassi õpilane ongi Ove ja talle kuulub mäng *FIFA Soccer*.

Märkus. Taolisi loogikaülesandeid saab hõlpsasti lahendada *vastavuste tabeli* koostamise teel (joonisel 14 on ülesandele vastav *kolme sisendiga* vastavuste tabel). Ülesande tingimuste kohaselt võib teadaolevad olukorrad märkida plussiga ning iga plussiga samas reas või veerus ülejäänud lahtrid märkida miinusega. Sedasi on võimalik tingimustest vahetult järeldatavad situatsioonid tabelis ära kirjeldada. Keerukamates ülesannetes on tarvis püstitada ka täiendavaid hüpoteese: olgu mingis tühjas lahtris pluss; kui õnnestub sellest järeldada vastuolu, siis selles lahtris tegelikult ei ole pluss.



Joonis 14

2. *Vastus:* 25 ja 31.

Vaatleme võrdust $a \cdot b = c \cdot d \cdot e \cdot f$, kus a, b, c, d, e ja f on erinevad ühekohalised arvud.

Kõigepealt näitame, et ükski arvudest ei saa olla 0, 5 ega 7:

- kui üks arvudest oleks 0, siis arvude erinevuse tõttu võrduse üks pooltest võrduks 0-ga, teine aga mitte;
- kui üks arvudest oleks 5 või 7, siis võrduse üks pooltest jaguks 5-ga või 7-ga, teine aga mitte.

Seega võimalikud arvud on 1, 2, 3, 4, 6, 8 ja 9. Täpselt üks arvudest ei saa võrduses $a \cdot b = c \cdot d \cdot e \cdot f$ esineda.

Vaatleme olukorda, kui 9 kindlasti esineb. Siis võrduse teisel pool peavad olema 3 ja 6. Ilmselt 3 ja 6 ei saa asuda vasakul poolel, sest vastasel korral parem pool jaguks 4-ga, vasak pool aga mitte. Niisiis on vasakul pool 9 ja veel mingi tegur. Vaatame, milline võib olla arv b.

- Kui $b = 1$, siis parem pool jagub 2-ga, vasak aga mitte, mis on võimatu.
- Kui $b = 2$, siis paremal muid tegureid peale 3 ja 6 olla ei saaks, mis on võimatu.
- Kui $b = 4$, siis oleme saanud võrduse $9 \cdot 4 = 3 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 1$ ning otsitav summa on $9 + 4 + 6 + 3 + 2 + 1 = 25$.
- Kui $b = 8$, siis oleme saanud võrduse $9 \cdot 8 = 3 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 1$ ning otsitav summa on $9 + 8 + 6 + 4 + 3 + 1 = 31$.

Kui arv 9 võrduses ei esine, siis peavad 3 ja 6 olema võrduse eri pooltel. Igal juhul arv 1 peab olema paremal, vastasel korral peaks 3 või 6 avalduma nelja 1-st erineva teguri korrutisena, mis on võimatu.

- Kui 3 oleks vasakul, siis arvudest 2, 4 ja 8 tuleks üks vasakule ja kaks paremale paigutada selliselt, et vasakul oleks täpselt üks tegur 2 rohkem. See pole aga võimalik.
- Kui 6 oleks vasakul, siis arvudest 2, 4 ja 8 tuleks üks vasakule ja kaks paremale paigutada selliselt, et paremal oleks täpselt üks tegur 2 rohkem. Ka see pole võimalik.

Märkus: Tähelepaneku, et 9 peab kindlasti võrduses esinema, saab teha ka vahetumalt. Kuna selle võrduse mõlemal poolel peab olema sama palju võrdseid algtegureid, siis see üks mitte esinev arv peab jaguma 2-ga: nimelt korrutis $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8$ sisaldab arvu 2 paaritul astmel ega ole seega jaotatav kaheks osaks nii, et kummalgi pool oleks sama kogus algtegurit 2.

3. *Vastus:* a) 32π cm^2; b) 8 cm.

Tingimustest ilmneb, et O on suure poolringi keskpunkt (asub diameetri otspunktidest ühekaugusel). Kuna $|AB| = 20$ cm, siis $|AO| = |OB| = 10$ cm. Et $|AC| = 4 \cdot |CO|$, siis $|AO| = |AC| + |CO| = 5 \cdot |CO|$, kust $|CO| = 2$ cm ja $|AO_1| = |O_1C| = |DO_2| = |O_2D| = 4$ cm. Väikse ja keskmise suurusega poolringide pindalad on siis vastavalt $\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 2^2 = 2\pi$ ja $\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 4^2 = 8\pi$ ruutsentimeetrit, kokku $2\pi + 2 \cdot 8\pi = 18\pi$ ruutsentimeetrit. Suure poolringi pindala on $\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 10^2 = 50\pi$ ruutsentimeetrit.

a) Tumedaks värvitud ala hõlmab $50\pi - 18\pi = 32\pi$ ruutsentimeetrit.

b) Olgu otsitava poolringi raadius x. Siis $\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot x^2 = 32\pi \text{ cm}^2$, kust $x^2 = 64 \text{ cm}^2$. Järelikult $x = 8$ cm.

II osa lahendused

1. *Vastus:* 280.

   Olgu saadud 7-kohalises arvus $N = \overline{2009xyz}$ x sajaliste, y kümneliste ja z üheliste number.

   Arvu N jaguvusest 2 ja 5-ga järeldub, et $z = 0$. Nüüd N jagub 4-ga parajasti juhul, kui y on paarisnumber.

   Kuna $2009 = 7 \cdot 287$, siis arv N jagub 7-ga parajasti siis, kui kolmekohaline arv $\overline{xy0}$ jagub 7-ga, kusjuures y on paarisnumber. Seega tuleb vaadelda kahekohalisi paarisarve $\overline{xy}$, mis jaguvad 7-ga. Need on 14, 28, 42, 56,70, 84 ja 98, millele lisandub võimalus $x = y = 0$. Et N jaguks ka 3-ga, peab summa $2 + x + y$ jaguma 3-ga. Siit sobivad $(x, y) = (7, 0)$ ja $(x, y) = (2, 8)$.

   Jääb kontrollida, kumb leitud arvudest 2009700 ja 2009280 jagub 8-ga. Selgub, et viimane. Lõpuks, N jagub 6-ga, sest ta jagub 2 ja 3-ga.

2. *Vastus:* 750 krooni.

   Lahendus 1. Olgu suurte korterite arv k, siis väikeste korterite arv on $2k$, korterite arv kokku $3k$ ning remondi kogumaksumus seega $3000k$ krooni. Paneme tähele, et suurte ja väikeste korterite kogupind on võrdne, seega jaotamisel võrdeliselt pinnaga maksavad väikesed korterid kokku $1500k$ krooni. Et väikesi kortereid on $2k$, siis iga korter maksab $\dfrac{1500k}{2k} = 750$ krooni.

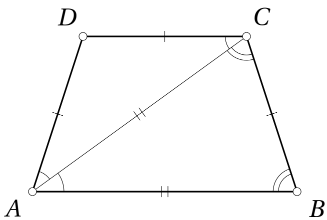
   Lahendus 2. Vastavalt ülesande tingimustele on nii väiksemates kui suuremates korterites kokku ühepalju pinda. Seega väiksemad korterid kokku maksavad võrdeliselt pinnaga jagades poole remondi maksumusest. Selle poole remondi maksumusest võib niisama hästi jagada võrdselt väikeste korterite peale. Andmetest tuleneb, et 2 korda suurema rahasumma jagamisel $\dfrac{3}{2}$ korda suurema arvu korterite vahel, mis annab igale korterile $\dfrac{2}{\frac{3}{2}}$ ehk $\dfrac{4}{3}$ korda suurema osa, oleks maks korteri kohta 1000 krooni. Seega tegelikult maksab väiksem korter remondi eest $1000 : \dfrac{4}{3}$ ehk 750 krooni.

3. *Vastus:* 72° ja 108°.

Lahendus 1. Olgu trapets $ABCD$, kusjuures AB on pikem alus ja CD lühem alus (joonis 15). Olgu $\alpha = \angle DCA$ ja $\beta = \angle BCA$; võrdusest $|DA| = |DC|$ järeldub siis $\angle DAC = \alpha$ ja võrdusest $|AB| = |AC|$ järeldub $\angle ABC = \beta$. Trapetsi sisenurgad on niisiis β ja $\alpha + \beta$. Et trapetsi haara lähisnurkade summa on sirgnurk, siis $\alpha + 2\beta = 180^\circ$. Kolmnurgast ACD leiame, et $3\alpha + \beta = 180^\circ$. Võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta &= 180^\circ \\ 3\alpha + \beta &= 180^\circ \end{cases}$$

lahendamiseks lahutame kahekordsest teisest võrrandist esimese, mis annab, et $5\alpha = 180^\circ$. Siit $\alpha = 36^\circ$ ning $\beta = 72^\circ$. Trapetsi nurgad on seega 72° ja 108°.



Joonis 15

Lahendus 2. Kasutame eelmise lahenduse tähistusi. Võrdusest $|AD| = |CD|$ järeldub võrdus $\angle DAC = \angle DCA$, võrdusest $|AC| = |AB|$ järeldub võrdus $\angle ACB = \angle ABC$. Aluste AB ja DC paralleelsusest saame, et $\angle DCA = \angle CAB$, millest $\angle BAD = 2\angle DAC$. Trapetsi võrdhaarsuse tõttu $\angle ABC = \angle BAD = 2\angle DAC$. Seega kolmnurga ABC sisenurgad on suurusega $\angle DAC$, $2\angle DAC$ ja $2\angle DAC$, kust $\angle DAC = \dfrac{180^\circ}{5} = 36^\circ$. Järelikult trapetsi nurgad on suurusega 72° ja 108°.

4. Igal Banaania ärimehel saab lõppeval kuul olla kas $0, 2, 4, \ldots, 2006$ või 2008 tehingupartnerit, seega kokku 1005 võimalust. Kui kellelgi on 2008 tehingupartnerit, on ta teinud tehinguid kõigi ülejäänud Banaania ärimeestega, mis tähendab, et igaühel ülejäänud ärimeestest on rohkem kui 0 tehingupartnerit. Järelikult ei saa Banaanias leiduda kaht ärimeest, kel oleks lõppeval kuul vastavalt 0 ja 2008 tehingupartnerit, nii et erinevaid võimalikke tehingupartnerite arvusid on 1004.

Oletades, et ülimalt kahel ärimehel on lõppeval kuul sama arv tehingupartnereid, saame Banaania ärimeeste arvuks ülimalt $2 \cdot 1004$ ehk 2008, mis on vastuolus eeldusega. Järelikult peab Banaanias leiduma vähemalt kolm ärimeest, kellel on lõppeval kuul sama arv tehingupartnereid.

Märkus 1. See ülesanne on rakendus Dirichlet' printsiibile: *kui on n pesa ja nendesse pesadesse paigutatakse $kn+1$ objekti, siis leidub pesa, kus on vähemalt $k+1$ objekti.* Siin olid pesade rollis võimalused, mitu tehingupartnerit võib lõppeval kuul olla, ja objektide rollis Banaania ärimehed, kusjuures $n = 1004$, $k = 2$.

Märkus 2. Selline riik, kus on 2009 ärimeest ja igaühel on lõppeval kuul paarisarv tehingupartnereid, on kindlasti võimalik – näiteks igaüks neist võib lõppeval kuul olla tehinguid mitte teinud.

Lahendused

1. *Vastus:* 1 ja $\frac{\pi}{4}$.

Ristküliku pindala on ab ja ümbermõõt $2(a+b)$. Veerandringi pindala on $\frac{1}{4}\cdot\pi\cdot 1^2 = \frac{\pi}{4}$ ja ümbermõõt $1+1+\frac{1}{4}\cdot(2\pi\cdot 1) = 2+\frac{\pi}{2}$. Saame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} ab &= \frac{\pi}{4}, \\ 2(a+b) &= 2+\frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Kui teist võrrandit jagada 2-ga ning asetada esimese võrrandi põhjal $\frac{\pi}{4}$ kohale ab, saame tingimuse $a+b = 1+ab$. Siit $(a-1)(b-1) = 0$, mis tähendab, et üks arvudest a või b on võrdne 1-ga. Teine arv on võrduse $ab = \frac{\pi}{4}$ tõttu järelikult $\frac{\pi}{4}$.

2. *Vastus:* $(x,y) = (3,2)$ ja $(x,y) = (-3,-2)$.

Lahendus 1. Võrrandite liitmisel saame tingimuse $2\cdot\frac{x}{y} = 3$ ning esimesest võrrandist teise lahutamisel saame, et

$$2\cdot\frac{y}{x} - \frac{2}{xy} = 1. \tag{1}$$

Asetades saadud tulemuse $\frac{y}{x} = \frac{2}{3}$ seosesse (1) ning avaldades xy, saame, et $xy = 6$. Korrutades nüüd võrdused $\frac{y}{x} = \frac{2}{3}$ ja $xy = 6$, leiame, et $y^2 = 4$, mistõttu $y = \pm 2$. Võrdusest $xy = 6$ saame vastavalt, et $x = \pm 3$.

Lahendus 2. Korrutades esimese võrrandi xy-ga ja viies muutujatega liikmed ühele poole, saame $(x-y)^2 = 1$. Liites aga antud kaks võrrandit, saame $\frac{x}{y} = \frac{3}{2}$. Seega $y = \frac{2}{3}x$, kust $x - y = \frac{1}{3}x$. Järelikult $\frac{1}{3}x = 1$ või $\frac{1}{3}x = -1$, kust vastavalt $x = 3$ või $x = -3$ ning $y = 2$ või $y = -2$.

3. *Vastus:* ei.

Lahendus 1. Olgu matemaatiku vanust (päevades) mitte ületavate algarvude korrutis P. Oletame väitevastaselt, et leidub täisarv a, mille korral $P + 1 = a^2$. Siis

$$P = a^2 - 1 = (a - 1)(a + 1).$$

Ent arvud $a - 1$ ja $a + 1$ on sama paarsusega. Seega peab arv P olema paaritu või jaguma vähemalt 4-ga. Kumbki variant ei vasta tõele, mistõttu niisugust täisarvu a ei leidu.

Lahendus 2. Matemaatik on ilmselt rohkem kui 2 päeva vana. Seega korrutatavate arvude seas on 2 ja mingid paaritud arvud. Korrutis jagub 2-ga, kuid mitte 4-ga, järelikult annab 4-ga jagades jäägi 2. Arv, mis on 1 võrra suurem, annab 4-ga jagades jäägi 3. Kuid täisruudud annavad 4-ga jagades vaid jääke 0 ja 1. Seega matemaatiku leitud arv ei ole täisruut.

Märkus. Positiivset täisarvu n mitte ületavate algarvude korrutist nimetatakse arvu n *primoriaaliks* ja tähistatakse $n\#$. Näiteks $2\# = 2$, $3\# = 4\# = 2 \cdot 3 = 6$, $5\# = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$ jne. Siin on analoogia naturaalarvu n *faktoriaali* $n!$ definitsiooniga, mis on arvu n mitte ületavate positiivsete täisarvude korrutis. Sarnasel viisil on defineeritud ka tühjad korrutised $1\# = 1$ ja $0! = 1$.

Ülesande küsimus on niisiis: kas võib mingit primoriaali ühe võrra suurendades saada täisarvu ruudu?

4. Paneme tähele, et mistahes naturaalarvu n korral

$$1 - \frac{1}{n^2} = \frac{n^2 - 1}{n^2} = \frac{(n-1)\cdot(n+1)}{n^2}.$$

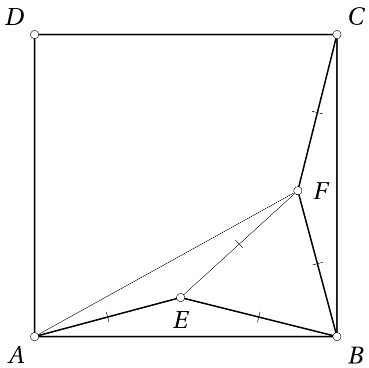
Seega

$$\begin{aligned}\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\cdot\left(1 - \frac{1}{4^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1 - \frac{1}{2009^2}\right) &= \\ = \frac{2\cdot 4}{3^2}\cdot\frac{3\cdot 5}{4^2}\cdot\ldots\cdot\frac{2008\cdot 2010}{2009^2} &= \\ = \frac{2\cdot 4\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot 2008\cdot 2010}{3\cdot 3\cdot 4\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2009\cdot 2009} &= \\ = \frac{2\cdot 2010}{3\cdot 2009} > \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

5. *Vastus:* 15°.

Lahendus 1. Saame, et

$$\angle EBF = \angle ABC - \angle ABE - \angle FBC = 90^\circ - 15^\circ - 15^\circ = 60^\circ$$



Joonis 16

(joonis 16). Kuna ülesande tingimuste põhjal on kolmnurgad AEB ja BFC võrdsed ja võrdhaarsed, siis $|EB| = |FB|$, mistõttu kolmnurk EBF on võrdkülgne. Järelikult $|EF| = |EB| = |EA|$, mis omakorda tähendab, et

$$\angle FAE = \frac{180^\circ - \angle FEA}{2}.$$

Ent $\angle AEB = 180^\circ - 2 \cdot 15^\circ = 150^\circ$, seega

$$\angle FEA = 360^\circ - \angle AEB - \angle FEB = 360^\circ - 150^\circ - 60^\circ = 150^\circ.$$

Kokkuvõttes

$$\angle FAE = \frac{180^\circ - \angle FEA}{2} = \frac{180^\circ - 150^\circ}{2} = 15^\circ.$$

Lahendus 2. Samuti nagu eelmises lahenduses näitame, et kolmnurk EBF on võrdkülgne. Kuna $\angle BAE = \angle FBC$ ja $\angle ABC = 90^\circ$, siis on sirged AE ja BF risti. Siit järeldub, et punkt A paikneb võrdkülgse kolmnurga EBF tipust E tõmmatud kõrguse pikendusel, mistõttu punktid B ja F on sümmeetrilised sirge AE suhtes. Seega on kolmnurgad FEA ja BEA võrdsed ning $\angle FAE = \angle BAE = 15^\circ$.

6. *Lahendus 1.* Oletame väitevastaselt, et ei leidu kolme üht värvi arvu, mis paikneksid võrdse vahega. Siis arvud pole värvitud vaheldumisi, muidu oleks kohe üht värvi arvude kolmik vahega 2. Järelikult leidub kaks järjestikust üht värvi arvu; üldisust kitsendamata olgu need arvud 0 ja 1 ja värvitud siniseks. Siis -1 ja 2 on värvitud punaseks, muidu oleks siniste arvude kolmik vahega 1. Siis -4 ja 5 on värvitud siniseks, muidu oleks punaste arvude kolmik vahega 3. Nüüd et -4 ja 0 on sinised, siis 4 on punane. Jääb märgata, et 3 ei saa olla punane, sest asub punastest arvudest 2 ja 4 võrdsel kaugusel, ega sinine, sest asub sinistest arvudest 1 ja 5 võrdsel kaugusel.

Lahendus 2. Oletame, et leidub kaks järjestikust üht värvi paaritut arvu; üldisust kitsendamata olgu need -1 ja 1 ja värvitud siniseks. Kui nüüd 0 on sinine, siis leidub siniste arvude kolmik vahega 1; kui aga -3 või 3 on sinine, siis leidub siniste arvude kolmik vahega 2. Kuid kui -3, 0, 3 on kõik punased, siis moodustavad nad punaste arvude kolmiku vahega 3.

Lõpuks kui ei leidu kaht järjestikust üht värvi paaritut arvu, siis paaritud arvud on värvitud vaheldumisi ja leidub üht värvi arvude kolmik vahega 4.

Lahendused

1. *Vastus:* diagonaalide pikkused on $\sqrt{2-\sqrt{2}}$ ja $\sqrt{2+\sqrt{2}}$; siseringjoone raadius on $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Lahendus 1. Rombi teise sisenurga suurus on $180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$ (joonis 17). Diagonaalide pikkused saame leida koosinusteoreemist: lühema diagonaali pikkuse ruut on

$$1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos 45^\circ = 2 - 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2 - \sqrt{2}$$

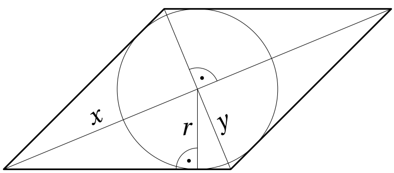
ja pikema diagonaali pikkuse ruut on

$$1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos 135^\circ = 2 - 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2 + \sqrt{2}.$$

Rombi siseringjoone diameeter $2r$ võrdub rombi kõrgusega. Tõmmates kõrguse rombi tipust, tekib täisnurkne kolmnurk, mille hüpotenuus on 1 ja üks nurk langeb kokku rombi väiksema nurgaga. Järelikult $2r = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, kust $r = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Lahendus 2. Olgu x pikema ja y lühema pooldiagonaali pikkus. Rombi pindala S võrdub ühelt poolt diagonaalide pikkuste poolkorrutisega ehk $S = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot 2y = 2xy$, teiselt poolt aga küljepikkuse ruudu ja nurga siinuse korrutisega, kust $S = 1^2 \cdot \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Seega

$$2xy = \frac{\sqrt{2}}{2}. \tag{2}$$



Joonis 17

Rombi diagonaalid on risti, seega Pythagorase teoreemi põhjal

$$x^2 + y^2 = 1. \tag{3}$$

Liites ja lahutades võrrandist (3) võrrandi (2), saame uued seosed

$$\begin{aligned}(x+y)^2 &= 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\\ (x-y)^2 &= 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$

Pärast juurimist ja võrrandite liitmist-lahutamist saame diagonaalide pikkusteks

$$2x = \sqrt{1+\frac{\sqrt{2}}{2}} + \sqrt{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}, \qquad 2y = \sqrt{1+\frac{\sqrt{2}}{2}} - \sqrt{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}.$$

Siit $(2x)^2 = 2 + 2\sqrt{1-\frac{1}{2}} = 2+\sqrt{2}$ ja $(2y)^2 = 2 - 2\sqrt{1-\frac{1}{2}} = 2-\sqrt{2}$, kust saame lihtsamad kujud

$$2x = \sqrt{2+\sqrt{2}}, \qquad 2y = \sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

Sümmeetria tõttu asub rombi siseringjoone keskpunkt tema diagonaalide lõikepunktis. Siseringjoone raadius r on rombi keskpunkti kaugus rombi küljeni. Rombi küljepikkuse ja selle kauguse korrutisest pool võrdub ühe kolmnurga pindalaga neljast, milleks diagonaalid rombi jaotavad; järelikult

$$S = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot r = 2r.$$

Koos võrrandiga (2) saame $r = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

2. *Vastus:* 0° ja 90°.

Lahendus 1. Olgu $x = \sin\alpha$ ja $y = \cos\alpha$, siis $x + y = 1$ ja $x^2 + y^2 = 1$. Avaldame esimesest võrrandist $y = 1 - x$, siis saame teisest võrrandist, et $x^2 + (1-x)^2 = 1$, mis on samaväärne võrrandiga $-2x + 2x^2 = 0$. Seega $x = 0$ või $x = 1$. Nüüd vastavalt $y = 1$ või $y = 0$.

Kui $\cos\alpha = 1$, siis $\alpha = 0^\circ$. Selle nurga siinus on 0.

Kui $\sin\alpha = 1$, siis $\alpha = 90^\circ$. Selle nurga koosinus on 0.

Lahendus 2. Tähistame x ja y nagu lahenduses 1 ja saame võrrandid $x + y = 1$ ja $x^2 + y^2 = 1$. Tõstes esimese ruutu, saame $x^2 + y^2 + 2xy = 1$; lahutades nüüd teise võrrandi, saame $2xy = 0$. Seega $\sin\alpha = 0$ või $\cos\alpha = 0$. Kui $\sin\alpha = 0$, siis $\alpha = 0^\circ$ või $\alpha = 180^\circ$, millest esimene sobib ja teine mitte; teisel juhul $\alpha = 90^\circ$ või $\alpha = 270^\circ$, millest jällegi esimene sobib ja teine mitte.

3. *Vastus:* ei.

Lahendus 1. Olgu antud täisarvud a, b, c ja d nii, et $a+b$, $a+c$, $a+d$, $b+c$, $b+d$ ja $c+d$ on kõik algarvud. Üldisust kitsendamata $a \leqslant b \leqslant c \leqslant d$. Paneme tähele, et $b+c$, $b+d$ ja $c+d$ ei saa olla kõik paaritud, sest siis peaksid b, c ja d olema paarikaupa eri paarsusega, mis on võimatu. Järelikult üks neist kolmest summast on paaris algarv 2. Kuid vastavalt valitud järjestusele on $a+b$ kuuest summast minimaalne (sest liidetakse kaks väiksemat). Et 2 on vähim algarv ja, nagu näidatud, esineb summade seas, peab ka $a+b$ olema 2. Seega summad ei ole kõik erinevad.

Lahendus 2. Olgu a, b, c ja d mingid täisarvud. Vaatame läbi võimalikud variandid lähtudes sellest, kui palju on arvude a, b, c ja d seas paarituid arve ja paarisarve. Paneme tähele, et kui vähemalt kolm arvu nende nelja seast on sama paarsusega, siis saadava kuue summa seas on vähemalt kolm paarisarvu. Kui aga neist neljast arvust kaks on paaris ja kaks on paaritud, siis saadavast kuuest summast kaks on paarisarvud. Et aga paaris algarvusid on üksainus (arv 2), siis pole võimalik, et kõik kuus summat oleksid erinevad algarvud.

4. *Vastus:* 0.

Lahendus 1. Korrutades võrrandi pooled teguriga $\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$ ja jagades 2-ga saame, et

$$x = x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}).$$

Siit kas $x=0$ või $\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}=1$. Võtame viimase võrrandi pooled ruutu, siis saame, et

$$1+x+2\sqrt{1-x^2}+1-x=1.$$

Samas ilmselt $2+2\sqrt{1-x^2} \geqslant 2 > 1$. Seega viimane võrrand on vastuoluline. Kontroll näitab, et $x=0$ sobib lahendiks.

Lahendus 2. Jätame ühe ruutjuure ühele poole ja muud liikmed viime teisele poole:

$$\sqrt{1+x} = 2x+\sqrt{1-x}.$$

Ruutuvõtmisel saame võrrandi $1+x = 4x^2+4x\sqrt{1-x}+1-x$, mis lihtsustub kujule

$$x(1-2x-2\sqrt{1-x}) = 0.$$

Siit on üks võimalus $x=0$. Kui $x \neq 0$, siis

$$2\sqrt{1-x} = 1-2x,$$

mis ruutuvõtmisel annab $4-4x = 1-4x+4x^2$. Seega $4x^2=3$, millest $x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Kontroll näitab, et $x=0$ sobib ja ülejäänud leitud lahendid on tegelikult võõrlahendid.

Lahendus 3. Võtame võrrandi pooled ruutu ja saame pärast lihtsustamist, et

$$1 - 2x^2 = \sqrt{1 - x^2}.$$

Kuna lähtevõrrandist on selge, et $-1 \leqslant x \leqslant 1$, siis leidub nurk $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ selliselt, et $x = \sin\alpha$. Nüüd $1 - 2x^2 = \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ ja $\sqrt{1 - x^2} = \cos\alpha$. (Nurk α on valitud lõigult $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ seetõttu, et $\cos\alpha = \sqrt{1 - x^2} \geqslant 0$.) Oleme saanud võrrandi

$$2\cos^2\alpha - 1 = \cos\alpha,$$

mis on ruutvõrrand $\cos\alpha$ suhtes. Selle lahendid on

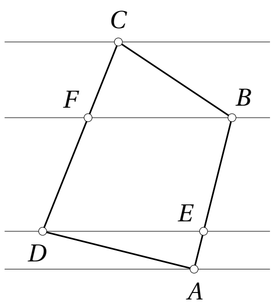
$$\cos\alpha = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4},$$

st $\cos\alpha = 1$ või $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$. Et $\cos\alpha \geqslant 0$, tuleb kõne alla vaid juhtum $\cos\alpha = 1$, millest $\alpha = 2k\pi$, kus k on täisarv. Nüüd $x = \sin 2k\pi = 0$. Kontroll näitab, et $x = 0$ sobib võrrandi lahendiks.

Lahendus 4. Olgu $f(x) = \sqrt{x} - x$. Paneme tähele, et võrrand on tingimus kujul

$$f(1 + x) = f(1 - x), \qquad x \in [-1, 1].$$

Funktsiooni $f(x) = \sqrt{x} - x$ väärtused on aga piirkonnas $(0, 1)$ positiivsed ja piirkonnas $(1, 2)$ negatiivsed. Kuna juhul $x \in (-1, 0)$ kehtib $1 + x \in (0, 1)$ ja $1 - x \in (1, 2)$ ning juhul $x \in (0, 1)$ kehtib $1 + x \in (1, 2)$ ja $1 - x \in (0, 1)$, on ainsad võimalikud lahendid $x = -1, 0, 1$. Kontrolli teel selgub, et ainult $x = 0$ rahuldab antud tingimust.



Joonis 18

5. *Vastus:* ei.

1	2	3	4	5	51	52	53	54	55
6	7	8	9	10	56	57	58	59	60
11	12	13	14	15	61	62	63	64	65
16	17	18	19	20	66	67	68	69	70
21	22	23	24	25	71	72	73	74	75
26	27	28	29	30	76	77	78	79	80
31	32	33	34	35	81	82	83	84	85
36	37	38	39	40	86	87	88	89	90
41	42	43	44	45	91	92	93	94	95
46	47	48	49	50	96	97	98	99	100

Joonis 19

Märgime kõigepealt, et rööpküliku ühe külje otspunktid ei saa olla kahel äärmisel sirgel või kahel keskmisel sirgel, kuna sel korral oleks selle külje vastaskülg vastavalt lühem või pikem kui see külg. Oletame siis väitevastaselt, et nelinurk $ABCD$ on rööpkülik (joonis 18). Olgu E ja F antud sirgete ja rööpküliku külgede lõikepunktid. Siis $BFDE$ on ka rööpkülik, seega $|BF| = |ED|$. Lisaks $\angle AED = \angle CFB$ ja $\angle ADE = \angle CBF$. Seega kolmnurgad AED ja CFB on võrdsed. Nüüd peavad ka vastavad kõrgused (tõmmatud tippudest A ja C) olema võrdse pikkusega. See on vastuolus eeldusega, et kahe ülemise ja kahe alumise sirge vahelised kaugused on erinevad.

6. *Vastus:* 735.

Kuna ridade omavahelise järjestuse kohta ei ole ülesande tingimustes midagi öeldud ning nende ümberjärjestamine summat ei muuda, eeldame üldisust kitsendamata, et read on järjestatud kuuenda veeru järgi kasvavas järjekorras.

Kuuenda veeru igale arvule järgneb (samas reas) neli arvu, mistõttu ei saa kuuendas veerus olla k. real suurem arv kui $46 + 5k$. Tõepoolest, k. real 6. veerus olev arv on väiksem kui k. real olevad järgmised 4 arvu ning ka väiksem kui kõik järgmistel ridadel olevad 6. veeru arvud, aga seega ka väiksem kui kõigil järgmistel ridadel olevad 7.–10. veeru arvud. Kokku on arvusid, millest on k. rea 6. veeru arv väiksem, vähemalt $5(10-k)+4 = 54-5k$. Seega k. rea 6. veeru arv on ülimalt $100-(54-5k) = 46+5k$.

Niisiis saame suurima võimaliku summa, kui k. real on arv $46+5k$. See võimalus on realiseeritav (joonis 19) ja annab summa

$$10 \cdot 46 + 5 \cdot (1 + 2 + \cdots + 10) = 460 + 5 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} = 735.$$

Lahendused

1. *Vastus:* $(-1, 3)$ ja $(3, 1)$.

Lahendus 1. Olgu kolmas tipp (x, y) (joonis 20). Kuna ta asub kolmnurga ümberringjoonel, mille raadius on $\sqrt{(-3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$, siis peavad tema koordinaadid rahuldama seost $x^2 + y^2 = 10$.

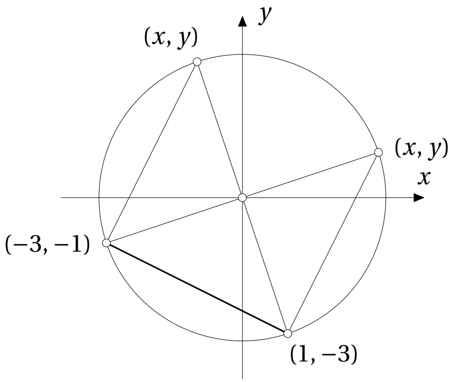
Vaadelda on tarvis kahte juhtu.

Kui tipunurk on punkti $(-3, -1)$ juures, siis kolmas tipp (x, y) peab olema sellest punktist sama kaugel kui teine tipp $(1, -3)$. Seega saame teise võrrandi $(x + 3)^2 + (y + 1)^2 = (1 + 3)^2 + (-3 + 1)^2 = 20$. Võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ (x+3)^2 + (y+1)^2 = 20 \end{cases}$$

lahendamiseks avame teises võrrandis sulud ning seejärel lahutame teisest võrrandist esimese. Sedasi saame seose $6x + 9 + 2y + 1 = 10$, millest $y = -3x$. Asendades selle süsteemi esimesse võrrandisse, saame ruutvõrrandi $10x^2 = 10$, mille lahendid on $x = \pm 1$. Siit vastavalt $y = \mp 3$.

Kui tipunurk on punkti $(1, -3)$ juures, siis kolmas tipp (x, y) peab olema sellest punktist sama kaugel kui teine tipp $(-3, -1)$. Seega saame teise võ-



Joonis 20

randi $(x-1)^2+(y+3)^2=(-3-1)^2+(-1+3)^2=20$. Võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} x^2+y^2 &= 10 \\ (x-1)^2+(y+3)^2 &= 20 \end{cases}$$

lahendamiseks toimime samuti nagu eelmisel juhul, saades seose $x=3y$ ning lahendid $y=\pm 1$ ja $x=\pm 3$.

Kokkuvõttes on lahenditeks $(1,-3)$, $(-1,3)$, $(3,1)$ ja $(-3,-1)$. Ent punktid $(1,-3)$ ning $(-3,-1)$ on juba kolmnurga tipud ning seega ei sobi.

Lahendus 2. Kuna vektorite $(3;-1)$ ja $(1;-3)$ skalaarkorrutis on võrdne nulliga, on need vektorid risti. Seega võrdhaarse kolmnurga kaks antud tippu asuvad koordinaatide alguspunktist vaadates teineteise suhtes täisnurga all, kusjuures ühe juures neist on tipunurk. Selleks, et haarad oleks võrdse pikkusega, peavad koordinaatide alguspunktist vaadatuna tipunurga tipp ja kolmas tipp asuma teineteise suhtes samuti täisnurga all. See tähendab, et aluse otspunktid on ümberringjoonel teineteise vastas.

Niisiis kui tipunurk on punktis $(-3;-1)$, siis puuduv tipp asub $(1;-3)$ vastas punktis $(-1;3)$, kui aga tipunurk on punktis $(1;-3)$, siis puuduv tipp asub $(-3;-1)$ vastas punktis $(3,1)$.

2. *Vastus:* $\left(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right)$ ja $\left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$.

Lahendus 1. Graafiku sümmeetriast y-telje suhtes järeldame, et $b=0$. Lõigaku esialgne graafik x-telge punktides x_1 ja $-x_1$ (võime eeldada, et $x_1>0$). Siis peegeldatud ja nihutatud graafik lõikab x-telge punktides x_1+2 ja $-x_1+2$. Ühise lõikepunkti leiame võrrandist $x_1=-x_1+2$, seega $x_1=1$. Niisiis $ax_1^2+c=0$, st $a+c=0$, kust $a=-c$, mistõttu ruutfunktsioon on kujul $y=ax^2-a$. Et esialgse graafiku puutuja lõikaks kohal $x=1$ x-telge 45-kraadise nurga all, peab tema tõus, st tuletise $y'=2ax$ väärtus kohal $x=1$ olema 1 või -1. Siit $a=\frac{1}{2}$ või $a=-\frac{1}{2}$ ning vastavalt $c=-\frac{1}{2}$ või $c=\frac{1}{2}$.

Lahendus 2. Graafiku sümmeetriast y-telje suhtes järeldame, et $b=0$. Niisiis on ülesandes antud ruutfunktsioon kujul $y=ax^2+c$. Saadav x-telje suhtes peegeldatud ja 2 ühiku võrra positiivses suunas nihutatud graafik on funktsiooni $y=-a(x-2)^2-c$ graafik. Olgu x_1 graafikute ühine lõikepunkt x-teljega, siis saame, et

$$ax_1^2+c=-a(x_1-2)^2-c=0.$$

See ahelvõrdus annab aga tingimuse $4a(x_1-1)=0$, kust $x_1=1$. Siit jätkame samal moel nagu eelmises lahenduses.

3. *Vastus:* 648.

Lahendus 1. Olgu otsitav arv $2k^2 = 3l^3$. Siis k^2 jagub 3-ga, mistõttu k jagub 3-ga; analoogselt l^3 jagub 2-ga, mistõttu l jagub 2-ga. Et võrrandi pooled jaguvad 9-ga, sest vasakul on k^2, siis l^3 jagub 3-ga, mistõttu l jagub 3-ga. Kokkuvõttes l jagub 6-ga.

Võttes l kohale vähima 6-ga jaguva positiivse täisarvu 6, saame otsitavaks arvuks $3 \cdot 6^3 = 648$, mis rahuldabki tingimust, sest ühtlasi $648 = 2 \cdot 18^2$.

Lahendus 2. Olgu otsitav arv x. Kuna $\frac{x}{2} = k^2$ on täisarv, jagub x 2-ga. Kuna $\frac{x}{3} = l^3$, siis l jagub 2-ga, mistõttu $\frac{x}{3}$, seega ka x, jagub 8-ga. Arv $\left(\frac{k}{l}\right)^6 = \left(\frac{x}{2}\right)^3 : \left(\frac{x}{3}\right)^2 = 9 \cdot \frac{x}{8}$ on seetõttu täisarv, seega ka $\frac{k}{l}$ on täisarv. Vähim täisarvu 6. aste, mis jagub 9-ga, on $3^6 = 729$. Selle korral $x = \frac{8}{9} \cdot 729 = 648$. See rahuldab ka ülesande tingimusi.

4. *Lahendus 1.* Väide avaldub kujul $a_k - (a_1 + \ldots + a_{k-1}) = k$ ehk

$$(2^k - 1) - \Big((2^1 - 1) + \ldots + (2^{k-1} - 1)\Big) = k.$$

Teisendame vasakut poolt: rühmitame 2 astmed omaette, kasutame geomeetrilise jada summa valemit ja lihtsustame. Saame

$$\begin{aligned}
(2^k - 1) - \Big((2^1 - 1) + \ldots + (2^{k-1} - 1)\Big) &= \\
= \quad & 2^k - (2^1 + \ldots + 2^{k-1}) - 1 + (k-1) = \\
= \quad & 2^k - (2^k - 2) + k - 2 = \\
= \quad & k.
\end{aligned}$$

Väide on tõestatud.

Lahendus 2. Vahetu kontroll näitab, et jada alguses väide kehtib. Kui mingi k-nda liikme jaoks väide kehtib, st $a_k - (a_1 + \ldots + a_{k-1}) = k$, siis $a_1 + \ldots + a_{k-1} = a_k - k$, millest

$$a_1 + \ldots + a_k = (a_k - k) + a_k = 2a_k - k.$$

Seega

$$\begin{aligned}
a_{k+1} - (a_1 + \ldots + a_k) &= a_{k+1} - 2a_k + k = \\
&= 2^{k+1} - 1 - 2(2^k - 1) + k = \\
&= 2^{k+1} - 1 - 2^{k+1} + 2 + k = \\
&= k + 1,
\end{aligned}$$

st väide kehtib ka järgmise liikme jaoks. Matemaatilise induktsiooni printsiibi põhjal kehtib väide iga liikme jaoks.

5. *Lahendus 1.* Olgu kolmnurk ABC täisnurgaga tipus C (joonis 21). Olgu hüpotenuusi AB keskpunkt D ning tipust C tõmmatud kõrguse aluspunkt H. Punkt D on ühtlasi kolmnurga ABC ümberringjoone keskpunkt, mistõttu $2|CD| = 2|AD| = |AB| = 4|CH|$, seega $|CH| = \frac{|CD|}{2}$. Täisnurkses kolmnurgas DCH on kaatet CH kaks korda lühem hüpotenuusist CD, mistõttu $\angle CDH = 30^\circ$. (Seda on lihtne näha, märgates, et $\sin \angle CDH = \frac{1}{2}$ või peegeldades C sirge DH suhtes punktiks C' ja sedastades, et kolmnurk $CC'D$ on võrdkülgne.) Nüüd $\angle CBA = \frac{1}{2}\angle CDH = 15^\circ$, sest need on kaarele AC toetuvad piirdenurk ja kesknurk.

Lahendus 2. Kasutame eelmise ülesande tähistusi ning tähistame $|BH| = f$, $|AH| = g$ ja $|CH| = h$. Kõrguse teoreemist $h^2 = fg$; ülesande tingimuste põhjal aga $f + g = 4h$. Avaldades viimasest seosest g ja asetades esimesse seosesse, saame võrduse $h^2 = f(4h - f)$. Lahendades saadud seose $h^2 - 4fh + f^2 = 0$ ruutvõrrandina h suhtes, saame

$$h = 2f \pm \sqrt{4f^2 - f^2} = f(2 \pm \sqrt{3}).$$

Oleme saanud, et

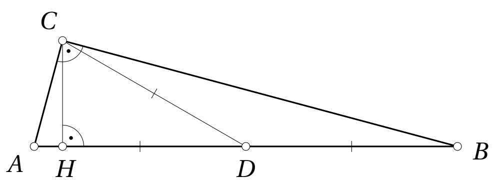
$$\tan \angle ABC = \frac{h}{f} = 2 \pm \sqrt{3}.$$

Kuna

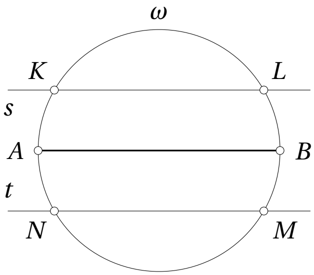
$$\begin{aligned}
\tan 2\angle ABC &= \frac{2\left(2 \pm \sqrt{3}\right)}{1 - \left(2 \pm \sqrt{3}\right)^2} = \frac{2\left(2 \pm \sqrt{3}\right)}{-6 \mp 4\sqrt{3}} = \\
&= -\frac{2 \pm \sqrt{3}}{3 \pm 2\sqrt{3}} = -\frac{\left(2 \pm \sqrt{3}\right) \cdot \left(3 \mp 2\sqrt{3}\right)}{3^2 - \left(2\sqrt{3}\right)^2} = \\
&= \pm\frac{\sqrt{3}}{3},
\end{aligned}$$

siis $2\angle ABC$ on kas 30° või 150°. Järelikult $\angle ABC = 15^\circ$ või $\angle ABC = 75^\circ$. Viimasel juhul $\angle BAC = 15^\circ$.

Lahendus 3. Ülesanne on lahendatud, kui



Joonis 21



Joonis 22

- kontrollime, et täisnurkne kolmnurk teravnurgaga 15° rahuldab ülesande tingimusi,
- veendume, et ülesande tingimustega on kolmnurga nurgad üheselt määratud.

Olgu täisnurkse kolmnurga täisnurga tipp C ja teravnurk suurusega 15° tipus B. Olgu tipust C tõmmatud kõrguse aluspunkt H ning hüpotenuusi keskpunkt D. Tähistame kolmnurga poole hüpotenuusi (ehk ümberringjoone raadiuse) tähega r. Kuna ka $|CD| = r$, on kolmnurk ADC võrdhaarne. Tingimusest $\angle CAD = 75^\circ$ leiame, et $\angle ADC = 180^\circ - 2 \cdot 75^\circ = 30^\circ$. Nüüd $|CH| = |CD| \cdot \sin \angle ADC = \frac{1}{2} r$. Niisiis $|AB| = 2r = 4|CH|$.

Veendume nüüd, et ülesande tingimustega on kolmnurga nurgad üheselt määratud. Olgu AB täisnurkse kolmnurga hüpotenuus. Teadaolevalt on AB on ühtlasi selle kolmnurga ümberringjoone ω diameeter (joonis 22). Tõmbame hüpotenuusiga paralleelsed sirged s ja t, mis asub hüpotenuusist kaugusel $\frac{|AB|}{4}$. Ülesande tingimuse kohaselt saab täisnurga tipp asuda vaid sirge s või t ning ringjoone ω lõikepunktis. Kõik neli võimalikku lõikepunkti K, L, M ja N annavad samade nurkadega kolmnurgad, sest kaared AK, AN, BL ja BM, aga siis ka nurgad ABK, ABN, BAL ning BAM, on võrdsed.

6. *Vastus:* a) jah; b) ei.

a) Kirjutame igasse täisarvuliste koordinaatidega punkti selle punkti x-koordinaadi. Sel juhul kõik kirjutatud arvud ei ole võrdsed ning punkti (x, y) nelja lähima naaberpunkti arvude aritmeetiline keskmine on

$$\frac{(x-1) + x + (x+1) + x}{4} = x,$$

nagu tarvis.

b) Oletame, et koordinaattasandi nõutaval viisil täitmine on võimalik. Olgu K täisarvuliste koordinaatidega punktidesse kirjutatud naturaalarvudest vähim. Olgu arv K kirjutatud punkti (x, y). Oletame, et mõnesse punkti (x, y) neljast lähimast naabrist on kirjutatud suurem arv kui K. Kuna K on nelja lähima naaberpunkti arvude aritmeetiline keskmine, siis peab mõnesse punkti (x, y) neljast lähimast naabrist olema kirjutatud väiksem arv kui K, mis on vastuolus arvu K valikuga. Järelikult on punkti (x, y) nelja lähimasse naaberpunkti kirjutatud arv K. Korrates sama arutelu nüüd nende nelja naaberpunkti ja nende naaberpunktide jne. korral, saame, et kõikidesse täisarvuliste koordinaatidega punktidesse on kirjutatud naturaalarv K. See on vastuolus ülesande tingimusega, mille kohaselt kõik kirjutatud arvud ei ole võrdsed.