LV Олимпиада Эстонии по математике

2 февраля 2008 г. Региональный тур **10 класс**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Согласно одному восточному направлению философии мир состоит из света и тьмы. Известно, что если бы в мире было на 30% больше тьмы и на 40% больше света, то света было бы в два раза больше тьмы. Какую часть мира составляет свет?

2. Найти все такие действительные числа a, при которых уравнения $(a-1)x+1=0$ и $(a+1)x+a-1=0$ имеют один и тот же корень.

3. Пусть a и b — такие отличные от нуля действительные числа, что $a+b \neq 0$. Найти все решения уравнения $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{x}=\frac{1}{a+b+x}$.

4. Пусть H — точка пересечения высот остроугольного треугольника ABC. Доказать, что

$$\frac{|AB|}{|CH|}=\tan\angle ACB.$$

5. Найти наибольшее простое число, которое нельзя представить в виде суммы двух составных чисел.

6. Юра и Юля играют в следующую игру. Сначала в куче 2008 камушков. На своем ходу каждый игрок забирает из кучи какое-то количество камушков, которое является делителем количества находящихся в куче камушков, причём в куче должен остаться по крайней мере один камушек. Первый ход делает Юра, затем ходы делаются по очереди. Выигрывает тот, чей противник больше не может совершить ход. Доказать, что Юра способен выиграть у Юли при любой игре противника.

LV Олимпиада Эстонии по математике

2 февраля 2008 г. Региональный тур **11 класс**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Решить уравнение $\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = \sqrt{x}$.

2. Гипотенуза равнобедренного прямоугольного треугольника находится на оси x, а вершина прямого угла — в точке $(1;2)$.

а) Найти уравнения прямых содержащих катеты данного треугольника.

б) Найти уравнение описанной окружности данного треугольника.

3. Даны равносторонний треугольник ABC и круг, который касается прямых AC и BC соответственно в точках A и B. Внутри этого круга находится более половины треугольника, менее половины треугольника или ровно половина треугольника?

4. Дано положительное целое число n. Вася называет положительное целое число d васиным делителем числа n, если как d, так и $d+1$ являются делителями числа n. Пусть T — количество васиных делителей числа n. Доказать, что $T(T+1) \leqslant n$.

5. Пусть a, b и c — такие отличные от нуля числа, что $a+b+c=0$. Найти значение выражения

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}.$$

6. На полосе, которая состоит из n расположенных рядом клеток, часть клеток закрашена чёрным, а остальные — белым. На каждом шагу выбирают одну клетку и меняют цвет всех остальных клеток кроме выбранной на противоположный. Найти все натуральные числа n, при которых с помощью описанных шагов, исходя из любой начальной раскраски клеток данной полосы, можно достичь положения, где все клетки белые.

LV Олимпиада Эстонии по математике

2 февраля 2008 г. Региональный тур **12 класс**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. В прогрессии первый член равен 1, а сумма трёх первых членов равна 21. Найти все числа, которые могли бы быть четвёртым этой прогрессии, если прогрессия

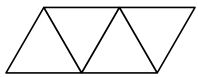
а) арифметическая;

б) геометрическая.

2. Найти все такие пары действительных чисел (c, d), при которых вторая производная квадратичной функции $f(x) = cx^2 + dx + d$ равна $f''(x) = 2$, а в точке, в которой в нуль обращается первая производная f', обращается в нуль и сама функция f.

3. На доске записываются целые числа от 1 до n, каждое один раз (n — положительное целое число). Каждое число, которое не является степенью числа 2, заменяется на число 1. Доказать, что после этого среднее арифметическое чисел на доске меньше 3.

4. Равносторонний треугольник с длиной стороны n разбит решёткой на равносторонние треугольники с длиной стороны 1, или *единичные треугольники*. На рисунке изображен параллелограмм, составленный из четырёх единичных треугольников, который можно поворачивать и зеркально отражать. Каково наибольшее количество параллелограммов, которое можно разместить на данный равносторонний треугольник так, чтобы каждый параллелограмм покрывал ровно четыре единичных треугольника и различные параллелограммы не пересекались друг с другом?



5. Из вершины A параллелограмма $ABCD$ проводят два луча, которые делят диагональ параллелограмма BD на три равные части. Доказать, что эти лучи делят стороны параллелограмма BC и CD пополам.

6. Пусть a и b — целые числа. Доказать, что если $ab + 1$ делится на 8, то и $a + b$ делится на 8.