

Eesti LV matemaatikaolümpiaad

2. veebruar 2008

Piirkonnavoor

10. klass

Lahendamisaega on 5 tundi.

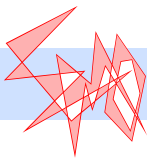
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.

Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Ühe idamaise filosoofiasuuna järgi koosneb maailm valgusest ja pimedusest. On teada, et kui maailmas oleks pimedust 30% rohkem ja valgust 40% rohkem, siis oleks valgust kaks korda niipalju kui pimedust. Kui suure osa maailmast moodustab valgus?
2. Leia kõik reaalarvud a , mille korral võrranditel $(a - 1)x + 1 = 0$ ning $(a + 1)x + a - 1 = 0$ on üks ja sama lahend.
3. Olgu a ja b sellised nullist erinevad reaalarvud, et $a + b \neq 0$. Leia võrrandi $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{x} = \frac{1}{a + b + x}$ kõik lahendid.
4. Olgu H teravnurkse kolmnurga ABC kõrguste lõikepunkt. Tõesta, et

$$\frac{|AB|}{|CH|} = \tan \angle ACB.$$

5. Leia suurim algarv, mida ei saa esitada kahe kordarvu summana.
6. Joosep ja Juula mängivad järgmist mängu. Algul on kuhjas 2008 kivi. Käigul olles võtab kumbki mängija kuhjast ära mingi arvu kive, mis on kuhjas järel olevate kivide arvu tegur, kusjuures kuhja peab vähemalt üks kivi alles jääma. Esimese käigu teeb Joosep, edasi käiakse kordamööda ning võidab see, kelle vastane ei saa enam käiku teha. Tõesta, et Joosepil on võimalik võita Juula mis tahes vastumängu korral.



Eesti LV matemaatikaolümpiaad

2. veebruar 2008

Piirkonnavoor

11. klass

Lahendamisaega on 5 tundi.

Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.

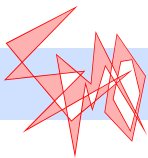
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Lahenda võrrand $\frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} = \sqrt{x}$.
2. Täisnurkse võrdhaarse kolmnurga hüpoteenus paikneb x -teljel ning täisnurka tipp on punktis $(1; 2)$.
 - a) Leia selle kolmnurga kaateteid sisaldavate sirgete võrrandid.
 - b) Leia selle kolmnurga ümberringjoone võrrand.
3. On antud võrdkülgne kolmnurk ABC ja ring, mis puutub sirgeid AC ja BC vastavalt punktides A ja B . Kas selle ringi sisse jääb kolmnurgast rohkem kui pool, vähem kui pool või täpselt pool?
4. Antud on positiivne täisarv n . Tambet nimetab positiivset täisarvu d arvu n Tambeti teguriks, kui nii d kui ka $d + 1$ on arvu n tegurid. Olgu T arvu n Tambeti tegurite arv. Tõesta, et $T(T + 1) \leq n$.
5. Olgu a , b ja c sellised nullist erinevad arvud, et $a + b + c = 0$. Leia avaldise

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} + \frac{c}{a} + \frac{a}{c}$$

väärtus.

6. Ribal, mis koosneb n kõrvutiastuvast ruudust, on osa ruute värvitud mustaks ja ülejäänud valgeks. Igal sammul valime välja ühe ruudu ja muudame kõigil ülejäänud ruutudel peale valitud ruudu värvi vastupidiseks. Leia kõik naturaalarvud n , mille korral on selliste sammudega võimalik antud riba ruutude mis tahes esialgse värvimise korral jõuda olukorrani, kus kõik ruudud on valged.



Eesti LV matemaatikaolümpiaad

2. veebruar 2008

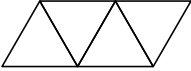
Piirkonnavoor

12. klass

Lahendamisaega on 5 tundi.

Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.

Taskuarvutit kasutada ei lubata.

- Jada esimene liige on 1 ja kolme esimese liikme summa 21. Leia kõik arvud, mis võivad olla selle jada neljandaks liikmeks, kui jada on
 - aritmeetiline;
 - geomeetiline.
- Leia kõik sellised reaalarvupaarid (c, d) , mille korral ruutfunktsiooni $f(x) = cx^2 + dx + d$ teine tuletis on $f''(x) = 2$ ja esimese tuletise f' nullkoht on ühtlasi ka funktsiooni f nullkoht.
- Tahvlile kirjutatakse täisarvud 1 kuni n , igaüks ühe korra (n on mingi positiivne täisarv). Iga arv, mis pole 2 aste, asendatakse arvuga 1. Tõesta, et pärast seda on tahvilil olevate arvude aritmeetiline keskmine väiksem kui 3.
- Võrdkülgne kolmnurk küljepikkusega n on võrekujuliselt jaotatud võrdkülgseteks kolmnurkadeks küljepikkusega 1 ehk *ühikkolmnurkadeks*. Joonisel on näidatud neljast ühikkolmnurgast koostatud rööpkülik, mida võib pöörata ja peegeldada. Milline on suurim arv rööpkülikuid, mida saab paigutada sellele võrdkülgsele kolmnurgale nii, et iga rööpkülik katab parajasti neli ühikkolmnurka ning erinevad rööpkülikud omavahel ei kattu?
- Rööpküliku $ABCD$ tipust A tõmmatakse kaks kiirt, mis jaotavad rööpküliku diagonaali BD kolmeks võrdseks osaks. Tõesta, et need kiired poolitavad rööpküliku küljed BC ja CD .
- Olgu a ja b täisarvud. Tõesta, et kui $ab + 1$ jagub 8-ga, siis ka $a + b$ jagub 8-ga.