Piirkonnavoor 2008

Eesti LV matemaatikaolümpiaad

2. veebruar 2008 Piirkonnavoor **7. klass**

I osa. *Lahendamisaega on 40 minutit.*
Sellele lehele kirjuta ainult vastused, lahendamiseks võid kasutada lisapaberit.
Iga ülesande õige vastus annab 2 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Kirjuta vabadesse lahtritesse arvud nii, et pärast viimase tehte sooritamist saame vastuseks 0.

$$\boxed{} \xrightarrow{-\,(-3)} \boxed{} \xrightarrow{:\,4} \boxed{} \xrightarrow{+\,(-5)} \boxed{0}$$

2. Arvule 2008 vastab arv 1000, arvule 2009 vastab arv 1001 jne, nagu näidatud joonisel. Millisele arvule vastab arv 2008?

$$\begin{array}{cccccc} 2008 & 2009 & 2010 & \ldots & x-1 & x \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \ldots & \downarrow & \downarrow \\ 1000 & 1001 & 1002 & \ldots & 2007 & 2008 \end{array}$$

. . . .

3. Kärt mõtles ühe naturaalarvu 150 ja 270 vahel. Selle arvu numbrite korrutis oli 81. Millise arvu Kärt mõtles?

. . . .

4. Kui palju leidub arvude 100 ja 200 vahel selliseid naturaalarve, mille kirjutises sisaldub number 3 või number 7?

. . . .

5. Kahe viimase aasta jooksul on olnud 3 kuud normist külmemad ja kõik ülejäänud kuud normist soojemad. Mitu protsenti kuudest on olnud sel perioodil normist soojemad?

. . . .

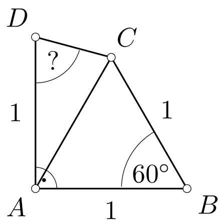
6. Digitaalne kell näitab 24 tunni režiimis tunde ja minuteid (näiteks 21:25). Mis kellaajal on numbrilaual olevate numbrite summa suurim?

....

7. Koordinaatteljestikus on antud punkt $A(-2;3)$. Leia kõik sellest erinevad punktid, mis asuvad nii x-teljest kui ka y-teljest sama kaugel kui A.

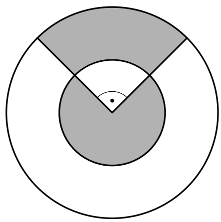
....

8. Nelinurgas $ABCD$ on külgede AB, BC ja AD pikkus 1. Nurk BAD on täisnurk ja $\angle ABC = 60^\circ$. Leia nurga ADC suurus.



....

9. Leia värvitud ala täpne pindala, kui välimise ringi diameeter on 2 cm ja sisemise ringi diameeter 1 cm.



....

10. Mitme eri pikkusega servi võib olla kolmnurksel püstprismal? Tee ring ümber sobivatele arvudele.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

Eesti LV matemaatikaolümpiaad

2. veebruar 2008 Piirkonnavoor **8. klass**

I osa. *Lahendamisaega on 40 minutit.*
Sellele lehele kirjuta ainult vastused, lahendamiseks võid kasutada lisapaberit.
Iga ülesande õige vastus annab 2 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Kirjuta vabadesse lahtritesse arvud nii, et pärast viimase tehte sooritamist saame vastuseks 1.

$$\boxed{} \xrightarrow{\cdot\,\frac{3}{4}} \boxed{} \xrightarrow{:\,0{,}5} \boxed{} \xrightarrow{+\,\frac{1}{3}} \boxed{\;1\;}$$

2. Arvule 2008 vastab arv 999, arvule 2010 vastab arv 1001 jne, nagu näidatud joonisel. Millisele arvule vastab arv 2009?

$$\begin{array}{cccccc}
2008 & 2010 & 2012 & \ldots & x-2 & x \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \ldots & \downarrow & \downarrow \\
999 & 1001 & 1003 & \ldots & 2007 & 2009
\end{array}$$

. . . .

3. Leia vähim positiivne täisarv, mis annab jagamisel 5-ga jäägi 3 ja jagamisel 7-ga jäägi 2.

. . . .

4. Kui palju leidub selliseid kahekohalisi positiivseid arve, mille kirjutises sisaldub number 1 või number 5?

. . . .

5. Mitmel viisil saab 5 õpilasest valida 3-liikmelise võistkonna, kui kaks neist, Pärt ja Märt, keelduvad olemast koos samas võistkonnas?

. . . .

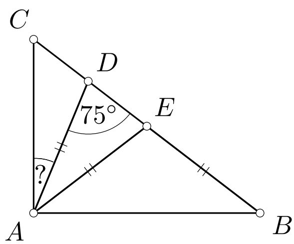
6. 200-liitrise vanni täis vett valgus ühtlase kihina laiali 40-ruutmeetrise korteri põrandale. Leia tekkinud veekihi paksus.

. . . .

7. Ringjoon läbib punkte $A(-3;-3)$, $B(5;-3)$, $C(5;3)$ ja $D(-3;3)$. Leia selle ringjoone keskpunkti koordinaadid.

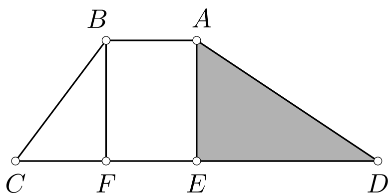
. . . .

8. Kolmnurk ABC on täisnurkne täisnurgaga tipu A juures. Lõigud AD, AE ja EB on võrdse pikkusega ning $\angle ADE = 75^\circ$. Leia nurga CAD suurus.



. . . .

9. Trapetsi $ABCD$ alused on AB ja CD. Lõigud AE ja BF on risti alusega. On teada, et $|DE| = 3$ cm, $|EF| = 1{,}5$ cm ja $|FC| = 1{,}5$ cm. Kui suure osa trapetsi pindalast moodustab kolmnurga AED pindala?



. . . .

10. Mitme eri pikkusega servi võib olla püströöptahukal? Tee ring ümber sobivatele arvudele.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

Eesti LV matemaatikaolümpiaad

2. veebruar 2008 Piirkonnavoor **9. klass**

I osa. *Lahendamisaega on 40 minutit.*
Sellele lehele kirjuta ainult vastused, lahendamiseks võid kasutada lisapaberit.
Iga ülesande õige vastus annab 2 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Mitme erineva positiivse täisarvuga jagub arv $\dfrac{2008^2 - 1907^2}{3915}$?

. . . .

2. Leia korrutise $2^{2008} \cdot 5^{2011}$ numbrite summa.

. . . .

3. Arvule 1000 vastab arv 2008, arvule 999 vastab arv 2006 jne, nagu näidatud joonisel. Milline arv vastab arvule -2008?

$$\begin{array}{cccccc} 1000 & 999 & 998 & \ldots & -2007 & -2008 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \ldots & \downarrow & \downarrow \\ 2008 & 2006 & 2004 & \ldots & x+2 & x \end{array}$$

. . . .

4. Korrutis $5{\cdot}6$ jagub N positiivse täisarvuga, korrutis $5{\cdot}6{\cdot}7$ jagub M positiivse täisarvuga. Leia $\dfrac{M}{N}$.

. . . .

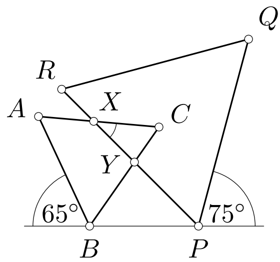
5. Leia $x + 2y$, kui on teada, et $3x + 2y = 14$ ja $x + 6y = 22$.

. . . .

6. On antud ring pindalaga 4π cm^2 ja sama pindalaga kolmnurk, mille ühe külje pikkus on võrdne ringi raadiusega. Kui pikk on kolmnurga sellele küljele tõmmatud kõrgus?

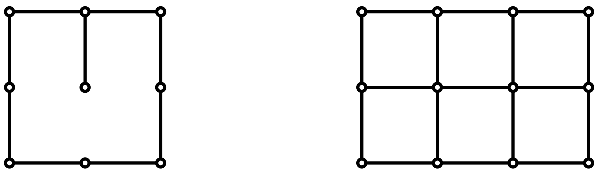
. . . .

7. Kolmnurgad ABC ja PQR on võrdkülgsed. Leia nurga CXY suurus.



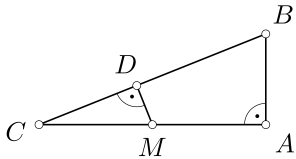
. . . .

8. Jukul on tempel, mille jäljend on näidatud vasakul. Milline on vähim arv templivajutusi, millega saab moodustada joonisel näidatud kujundi?



. . . .

9. Täisnurkse kolmnurga ABC kaatetil AC on märgitud punkt M nii, et see jaotab selle kaateti kaheks võrdseks osaks. Hüpotenuusil BC on märgitud punkt D nii, et lõik MD on risti hüpotenuusiga. Leia kolmnurga ABC pindala, kui $|MD| = 3{,}5$ cm ja $|BC| = 10$ cm.



. . . .

10. Mitme eri pikkusega servi võib olla nelinurksel püstprismal? Tee ring ümber sobivatele arvudele.

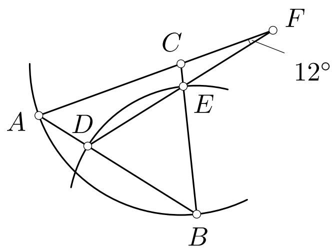
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

II osa. *Lahendamisaega on 2 tundi.*
Ülesannete lahendused kirjuta eraldi lehele.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti. Ainult vastusest ei piisa!
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Juku koolikoti kaalust moodustasid 30% spordiasjad, 40% õppevahendid ja ülejäänud 30% niisama asjad. Juku läks teise trenni ja seetõttu suurenes spordiasjade kaal 20% võrra spordiasjade esialgse kaaluga võrreldes. Nüüd sai kott spordi- ja niisama asjadest nii täis, et õppevahenditele enam ruumi ei jätkunud. Kui palju vähenes sellega koti kaal?

2. Leia kõik arvud, mille korral nii arv ise kui ka temast numbrite järjekorra vastupidiseks muutmisel saadud arv on kolmekohalised ja jaguvad nii 4-ga kui ka 9-ga.

3. Punktid A ja B asuvad ringjoonel, mille keskpunkt on C. Ringjoon keskpunktiga B lõikab kolmnurga ABC külgi BA ja BC vastavalt punktides D ja E. Sirged AC ja DE lõikuvad punktis F, kusjuures $\angle AFD = 12°$. Leia kolmnurga ABC nurkade suurused.



Eesti LV matemaatikaolümpiaad

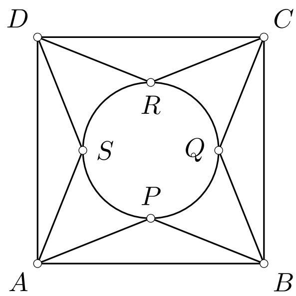
2. veebruar 2008 Piirkonnavoor **8. klass**

II osa. *Lahendamisaega on 2 tundi.*
Ülesannete lahendused kirjuta eraldi lehele.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti. Ainult vastusest ei piisa!
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Tervisesportlane sõidab jalgrattaga kodust 5 km kaugusel asuvale staadionile jooksutreeningule ja pärast sama teed pidi koju tagasi. Tee koosneb ainult tõusudest ja langustest. Sportlase keskmine kiirus jalgrattaga sõites on tõusudel 15 km/h, langustel aga 25 km/h. Jooksmisele staadionil kulub tal aega 4 minutit enam kui edasi-tagasi sõiduks jalgrattaga. Mitu 400 m pikkust staadioniringi jookseb sportlane, kui tema jooksukiirus on 10 km/h?

2. Pärt kirjutas paberile 5 positiivset täisarvu, mis olid kõik väiksemad kui 150. Osutus, et iga arv oli eelmisest poolteist korda suurem. Millised arvud Pärt kirjutas?

3. Joonisel on kolmnurgad APB, BQC, CRD ja DSA võrdsed ning võrdhaarsed. Tähe $APBQCRDS$ pindala moodustab poole ruudu $ABCD$ pindalast. Leia ringi ja ruudu pindalade suhe.



II osa. *Lahendamisaega on 4 tundi.*
Ülesannete lahendused kirjuta eraldi lehele.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti. Ainult vastusest ei piisa!
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Kõnekaardil on raha täpselt niipalju, et sellega saab rääkida 30 minutit ja saata 15 sõnumit või siis rääkida 15 minutit ja saata 35 sõnumit. Kas selle kõnekaardiga saab rääkida 24 minutit ja saata 24 sõnumit?

2. Kolmnurga ABC küljel AB on valitud punkt D. Punkti D läbiv ja küljega BC paralleelne sirge lõikab külge AC punktis E, punkti E läbiv ja küljega AB paralleelne sirge lõikab külge BC punktis F ning punkti F läbiv ja küljega AC paralleelne sirge lõikab külge AB punktis G. Tõesta, et $|AD| = |BG|$.

3. Ruudustikus mõõtmetega 8×8 on osa ruute värvitud mustaks ja ülejäänud valgeks. Igal sammul valime välja ühe ruudu ning muudame ristkülikus, mille vasak ülemine nurk on kogu ruudustiku nurk ja parem alumine nurgaruut on valitud ruut, kõigi ruutude värvid vastupidiseks. Kas selliste sammudega on võimalik antud ruudustiku ruutude mis tahes esialgse värvimise korral jõuda olukorrani, kus kõik ruudud on valged?

4. Nimetame naturaalarvu *ilusaks*, kui ta esitub mingi kahekohalise arvu ja sellest numbrite järjekorra vahetamisel saadud arvu summana. Näiteks arv $110 = 37 + 73$ on ilus. Leia kõik ilusad arvud, mis on täisarvude ruudud.

Eesti LV matemaatikaolümpiaad

2. veebruar 2008 Piirkonnavoor **10. klass**

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Ühe idamaise filosoofiasuuna järgi koosneb maailm valgusest ja pimedusest. On teada, et kui maailmas oleks pimedust 30% rohkem ja valgust 40% rohkem, siis oleks valgust kaks korda niipalju kui pimedust. Kui suure osa maailmast moodustab valgus?

2. Leia kõik reaalarvud a, mille korral võrranditel $(a-1)x+1=0$ ning $(a+1)x+a-1=0$ on üks ja sama lahend.

3. Olgu a ja b sellised nullist erinevad reaalarvud, et $a+b\neq 0$. Leia võrrandi $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{x}=\frac{1}{a+b+x}$ kõik lahendid.

4. Olgu H teravnurkse kolmnurga ABC kõrguste lõikepunkt. Tõesta, et

$$\frac{|AB|}{|CH|}=\tan\angle ACB.$$

5. Leia suurim algarv, mida ei saa esitada kahe kordarvu summana.

6. Joosep ja Juula mängivad järgmist mängu. Algul on kuhjas 2008 kivi. Käigul olles võtab kumbki mängija kuhjast ära mingi arvu kive, mis on kuhjas järel olevate kivide arvu tegur, kusjuures kuhja peab vähemalt üks kivi alles jääma. Esimese käigu teeb Joosep, edasi käiakse kordamööda ning võidab see, kelle vastane ei saa enam käiku teha. Tõesta, et Joosepil on võimalik võita Juula mis tahes vastumängu korral.

Eesti LV matemaatikaolümpiaad

2. veebruar 2008 Piirkonnavoor **11. klass**

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Lahenda võrrand $\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = \sqrt{x}$.

2. Täisnurkse võrdhaarse kolmnurga hüpotenuus paikneb x-teljel ning täisnurga tipp on punktis $(1;2)$.

a) Leia selle kolmnurga kaateteid sisaldavate sirgete võrrandid.

b) Leia selle kolmnurga ümberringjoone võrrand.

3. On antud võrdkülgne kolmnurk ABC ja ring, mis puutub sirgeid AC ja BC vastavalt punktides A ja B. Kas selle ringi sisse jääb kolmnurgast rohkem kui pool, vähem kui pool või täpselt pool?

4. Antud on positiivne täisarv n. Tambet nimetab positiivset täisarvu d arvu n Tambeti teguriks, kui nii d kui ka $d+1$ on arvu n tegurid. Olgu T arvu n Tambeti tegurite arv. Tõesta, et $T(T+1) \leqslant n$.

5. Olgu a, b ja c sellised nullist erinevad arvud, et $a+b+c=0$. Leia avaldise

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}$$

väärtus.

6. Ribal, mis koosneb n kõrvutiasuvast ruudust, on osa ruute värvitud mustaks ja ülejäänud valgeks. Igal sammul valime välja ühe ruudu ja muudame kõigil ülejäänud ruutudel peale valitud ruudu värvi vastupidiseks. Leia kõik naturaalarvud n, mille korral on selliste sammudega võimalik antud riba ruutude mis tahes esialgse värvimise korral jõuda olukorrani, kus kõik ruudud on valged.

Eesti LV matemaatikaolümpiaad

2. veebruar 2008 Piirkonnavoor **12. klass**

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Jada esimene liige on 1 ja kolme esimese liikme summa 21. Leia kõik arvud, mis võivad olla selle jada neljandaks liikmeks, kui jada on

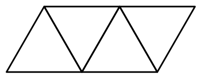
a) aritmeetiline;

b) geomeetriline.

2. Leia kõik sellised reaalarvupaarid (c,d), mille korral ruutfunktsiooni $f(x) = cx^2+dx+d$ teine tuletis on $f''(x) = 2$ ja esimese tuletise f' nullkoht on ühtlasi ka funktsiooni f nullkoht.

3. Tahvlile kirjutatakse täisarvud 1 kuni n, igaüks ühe korra (n on mingi positiivne täisarv). Iga arv, mis pole 2 aste, asendatakse arvuga 1. Tõesta, et pärast seda on tahvlil olevate arvude aritmeetiline keskmine väiksem kui 3.

4. Võrdkülgne kolmnurk küljepikkusega n on võrekujuliselt jaotatud võrdkülgseteks kolmnurkadeks küljepikkusega 1 ehk *ühikkolmnurkadeks*. Joonisel on näidatud neljast ühikkolmnurgast koostatud rööpkülik, mida võib pöörata ja peegeldada. Milline on suurim arv rööpkülikuid, mida saab paigutada sellele võrdkülgsele kolmnurgale nii, et iga rööpkülik katab parajasti neli ühikkolmnurka ning erinevad rööpkülikud omavahel ei kattu?



5. Rööpküliku $ABCD$ tipust A tõmmatakse kaks kiirt, mis jaotavad rööpküliku diagonaali BD kolmeks võrdseks osaks. Tõesta, et need kiired poolitavad rööpküliku küljed BC ja CD.

6. Olgu a ja b täisarvud. Tõesta, et kui $ab+1$ jagub 8-ga, siis ka $a+b$ jagub 8-ga.

LV Олимпиада Эстонии по математике

2 февраля 2008 г. Региональный тур **7 класс**

I часть. *Время, отводимое для решения: 40 минут.*
На этом листке написать только ответы, для решения можно использовать дополнительную бумагу.
Верный ответ каждой задачи даёт 2 балла.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Записать числа в свободные клетки так, чтобы после выполнения последнего действия получили ответ 0.

$$\boxed{} \xrightarrow{-(-3)} \boxed{} \xrightarrow{:4} \boxed{} \xrightarrow{+(-5)} \boxed{0}$$

2. Числу 2008 соответствует число 1000, числу 2009 соответствует число 1001 и т.д., как показано на рисунке. Какому числу соответствует число 2008?

$$\begin{array}{cccccc} 2008 & 2009 & 2010 & \ldots & x-1 & x \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \ldots & \downarrow & \downarrow \\ 1000 & 1001 & 1002 & \ldots & 2007 & 2008 \end{array}$$

. . . .

3. Катя загадала одно натуральное число между 150 и 270. Произведение цифр этого числа оказалось 81. Какое число загадала Катя?

. . . .

4. Сколько найдется таких натуральных чисел между числами 100 и 200, в записи которых содержится цифра 3 или цифра 7?

. . . .

5. На протяжении двух последних лет 3 месяца оказались холоднее нормы, а все остальные месяцы оказались теплее нормы. Сколько процентов месяцев оказалось за этот период теплее нормы?

. . . .

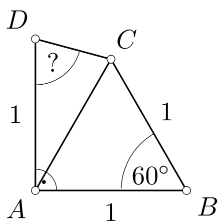
6. Цифровые часы в 24-часовом режиме показывают часы и минуты (например 21:25). В какое время сумма цифр на табло наибольшая?

. . . .

7. В координатной системе дана точка $A(-2;3)$. Найди все такие отличные от неё точки, которые отстоят как от оси x, так и от оси y на том же расстоянии, что и A.

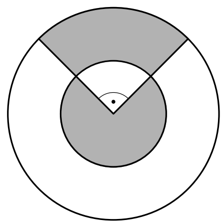
. . . .

8. В четырёхугольнике $ABCD$ длина сторон AB, BC и AD равна 1. Угол BAD — прямой, а $\angle ABC = 60^\circ$. Найти величину угла ADC.



. . . .

9. Найти точную площадь закрашенной зоны, если диаметр внешнего круга равен 2 см, а внутреннего круга — 1 см.



. . . .

10. Сколько рёбер различной длины может быть у прямой треугольной призмы? Обвести кружком подходящие числа.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

LV Олимпиада Эстонии по математике

2 февраля 2008 г. Региональный тур **8 класс**

I часть. *Время, отводимое для решения: 40 минут.*
На этом листке написать только ответы, для решения можно использовать дополнительную бумагу.
Верный ответ каждой задачи даёт 2 балла.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Записать числа в свободные клетки так, чтобы после выполнения последнего действия получили ответ 1.

$$\boxed{} \xrightarrow{\cdot\frac{3}{4}} \boxed{} \xrightarrow{:\,0{,}5} \boxed{} \xrightarrow{+\frac{1}{3}} \boxed{1}$$

2. Числу 2008 соответствует число 999, числу 2010 соответствует число 1001 и т.д., как показано на рисунке. Какому числу соответствует число 2009?

$$\begin{array}{cccccc} 2008 & 2010 & 2012 & \ldots & x-2 & x \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \ldots & \downarrow & \downarrow \\ 999 & 1001 & 1003 & \ldots & 2007 & 2009 \end{array}$$

. . . .

3. Найти наименьшее положительное целое число, которое при делении на 5 даёт в остатке 3, а при делении на 7 даёт в остатке 2.

. . . .

4. Сколько найдётся таких двузначных положительных чисел, в записи которых есть цифра 1 или цифра 5?

. . . .

5. Сколько найдётся способов выбрать из 5 учеников команду в 3 человека, если двое из них, Петя и Митя, отказываются находиться вместе в одной команде?

. . . .

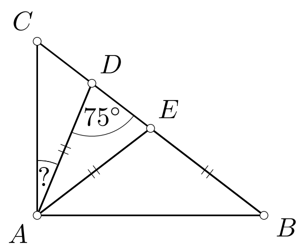
6. 200-литровая ванна воды была разлита равномерным слоем на полу квартиры в 40 квадратных метров. Найти толщину образовавшегося слоя воды.

. . . .

7. Окружность проходит через точки $A(-3;-3)$, $B(5;-3)$, $C(5;3)$ и $D(-3;3)$. Найти координаты центра этой окружности.

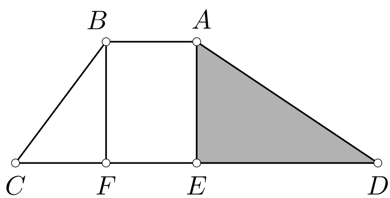
. . . .

8. Треугольник ABC — прямоугольный, с прямым углом у вершины A. Отрезки AD, AE и EB имеют равную длину, а $\angle ADE = 75^\circ$. Найти величину угла CAD.



. . . .

9. Основаниями трапеции $ABCD$ являются AB и CD. Отрезки AE и BF перпендикулярны основанию. Известно, что $|DE| = 3$ см, $|EF| = 1{,}5$ см и $|FC| = 1{,}5$ см. Какую часть от площади трапеции составляет площадь треугольника AED?



. . . .

10. Сколько рёбер различной длины может быть у прямого параллелепипеда? Обвести кружком подходящие числа.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

LV Олимпиада Эстонии по математике

2 февраля 2008 г. Региональный тур **9 класс**

I часть. *Время, отводимое для решения: 40 минут.*
На этом листке написать только ответы, для решения можно использовать дополнительную бумагу.
Верный ответ каждой задачи даёт 2 балла.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. На сколько различных положительных целых чисел делится число $\dfrac{2008^2 - 1907^2}{3915}$?

. . . .

2. Найти сумму цифр произведения $2^{2008} \cdot 5^{2011}$.

. . . .

3. Числу 1000 соответствует число 2008, числу 999 соответствует число 2006 и т.д., как показано на рисунке. Какое число соответствует числу -2008?

$$\begin{array}{cccccc} 1000 & 999 & 998 & \ldots & -2007 & -2008 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \ldots & \downarrow & \downarrow \\ 2008 & 2006 & 2004 & \ldots & x+2 & x \end{array}$$

. . . .

4. Произведение $5 \cdot 6$ делится на N положительных целых чисел, произведение $5 \cdot 6 \cdot 7$ делится на M положительных целых чисел. Найти $\dfrac{M}{N}$.

. . . .

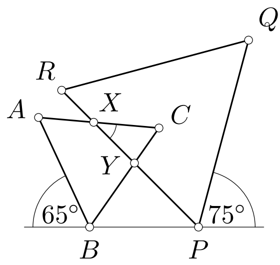
5. Найти $x + 2y$, если известно, что $3x + 2y = 14$ и $x + 6y = 22$.

. . . .

6. Даны круг с площадью 4π см^2 и треугольник с такой же площадью, длина одной стороны которого равна радиусу круга. Какова длина высоты, проведённой к этой стороне треугольника?

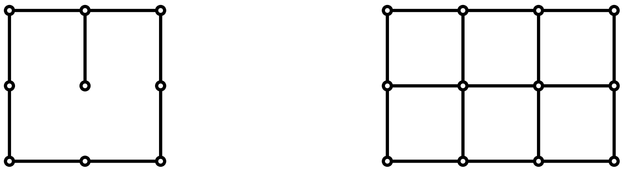
. . . .

7. Треугольники ABC и PQR — равносторонние. Найти величину угла CXY.



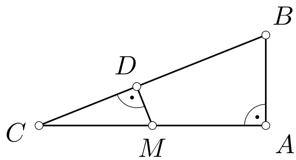
. . . .

8. У Жени есть штемпель, оттиск которого показан слева. Каково наименьшее количество нажатий штемпеля, необходимое для того, чтобы образовать показанное на рисунке изображение?



. . . .

9. На катете AC прямоугольного треугольника ABC отмечена точка M так, что она делит этот катет на две равные части. На гипотенузе BC отмечена точка D так, что отрезок MD перпендикулярен гипотенузе. Найти площадь треугольника ABC, если $|MD| = 3{,}5$ см и $|BC| = 10$ см.



. . . .

10. Сколько рёбер различной длины может быть у прямой четырёхугольной призмы? Обвести кружком подходящие числа.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

LV Олимпиада Эстонии по математике

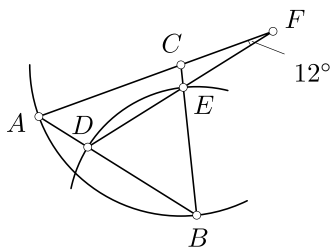
2 февраля 2008 г. Региональный тур **7 класс**

II часть. *Время, отводимое для решения: 2 часа.*
Решения задач написать на отдельном листе.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов. Написать только ответ недостаточно!
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. От веса школьного портфеля Васи 30% составляли спортивные принадлежности, 40% — учебные материалы, а оставшиеся 30% — прочие вещи. Вася пошёл на другую тренировку, поэтому вес спортивных принадлежностей увеличился на 20% по сравнению с их изначальным весом. Теперь портфель настолько наполнился спортивными принадлежностями и прочими вещами, что для учебных материалов не осталось места. На сколько, вследствие этого, уменьшился вес портфеля?

2. Найти все такие числа, при которых как само число, так и число, полученное изменением его порядка цифр на противоположный, являются трёхзначными и делятся как на 4, так и на 9.

3. Точки A и B находятся на окружности, центр которой в точке C. Окружность с центром B пересекает стороны BA и BC треугольника ABC соответственно в точках D и E. Прямые AC и DE пересекаются в точке F, причем $\angle AFD = 12^\circ$. Найти величины углов треугольника ABC.



LV Олимпиада Эстонии по математике

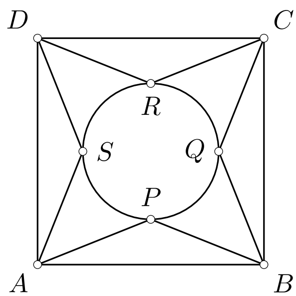
2 февраля 2008 г. Региональный тур **8 класс**

II часть. *Время, отводимое для решения: 2 часа.*
Решения задач написать на отдельном листе.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов. Написать только ответ недостаточно!
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Спортсмен-любитель едет на велосипеде на тренировку по бегу до стадиона, расположенного на расстоянии 5 км от дома, а потом возвращается обратно по той же дороге. Дорога состоит лишь из подъёмов и спусков. Средняя скорость спортсмена на велосипеде равна 15 км/ч во время подъёма и 25 км/ч во время спуска. На бег по стадиону он затрачивает на 4 минуты больше, чем на езду туда и обратно на велосипеде. Сколько кругов стадиона длиной 400 м пробегает спортсмен, если его скорость бега равна 10 км/ч?

2. Петя записал на бумаге 5 положительных целых чисел, все из которых были меньше 150. Оказалось, что каждое число было в полтора раза больше предыдущего. Какие числа Петя записал на бумаге?

3. Треугольники APB, BQC, CRD и DSA на рисунке — равные и равнобедренные. Площадь звезды $APBQCRDS$ составляет половину площади квадрата $ABCD$. Найти отношение площадей круга и квадрата.



LV Олимпиада Эстонии по математике

2 февраля 2008 г. Региональный тур **9 класс**

II часть. *Время, отводимое для решения: 4 часа.*
Решения задач написать на отдельном листе.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов. Написать только ответ недостаточно!
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. На разговорной карточке денег ровно столько, чтобы по ней можно было разговаривать 30 минут и отослать 15 сообщений, либо чтобы разговаривать 15 минут и отослать 35 сообщений. Можно ли по этой карточке разговаривать 24 минуты и отослать 24 сообщения?

2. На стороне AB треугольника ABC выбрана точка D. Прямая, проходящая через точку D и параллельная стороне BC, пересекает сторону AC в точке E, прямая, проходящая через точку E и параллельная стороне AB, пересекает сторону BC в точке F, а прямая, проходящая через точку F и параллельная стороне AC, пересекает сторону AB в точке G. Доказать, что $|AD| = |BG|$.

3. На клетчатом поле размером 8×8 часть клеток закрашена чёрным, а остальные — белым. На каждом шагу выбирают одну клетку, и в прямоугольнике, левый верхний угол которого является углом всего поля, а правая нижняя угловая клетка — выбранной клеткой, изменим цвет всех клеток на противоположный. Возможно ли с помощью описанных шагов, исходя из любой изначальной раскраски поля, достичь положения, где все клетки белые?

4. Назовём натуральное число *красивым*, если оно представимо в виде суммы какого-либо двузначного числа и числа, полученного из этого двузначного числа изменением порядка цифр. Например, число $110 = 37 + 73$ красиво. Найти все такие красивые числа, которые являются квадратами целых чисел.

LV Олимпиада Эстонии по математике

2 февраля 2008 г. Региональный тур **10 класс**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Согласно одному восточному направлению философии мир состоит из света и тьмы. Известно, что если бы в мире было на 30% больше тьмы и на 40% больше света, то света было бы в два раза больше тьмы. Какую часть мира составляет свет?

2. Найти все такие действительные числа a, при которых уравнения $(a-1)x+1=0$ и $(a+1)x+a-1=0$ имеют один и тот же корень.

3. Пусть a и b — такие отличные от нуля действительные числа, что $a+b\neq 0$. Найти все решения уравнения $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{x}=\frac{1}{a+b+x}$.

4. Пусть H — точка пересечения высот остроугольного треугольника ABC. Доказать, что

$$\frac{|AB|}{|CH|}=\tan\angle ACB.$$

5. Найти наибольшее простое число, которое нельзя представить в виде суммы двух составных чисел.

6. Юра и Юля играют в следующую игру. Сначала в куче 2008 камушков. На своем ходу каждый игрок забирает из кучи какое-то количество камушков, которое является делителем количества находящихся в куче камушков, причём в куче должен остаться по крайней мере один камушек. Первый ход делает Юра, затем ходы делаются по очереди. Выигрывает тот, чей противник больше не может совершить ход. Доказать, что Юра способен выиграть у Юли при любой игре противника.

LV Олимпиада Эстонии по математике

2 февраля 2008 г. Региональный тур **11 класс**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Решить уравнение $\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = \sqrt{x}$.

2. Гипотенуза равнобедренного прямоугольного треугольника находится на оси x, а вершина прямого угла — в точке $(1;2)$.

а) Найти уравнения прямых содержащих катеты данного треугольника.

б) Найти уравнение описанной окружности данного треугольника.

3. Даны равносторонний треугольник ABC и круг, который касается прямых AC и BC соответственно в точках A и B. Внутри этого круга находится более половины треугольника, менее половины треугольника или ровно половина треугольника?

4. Дано положительное целое число n. Вася называет положительное целое число d васиным делителем числа n, если как d, так и $d+1$ являются делителями числа n. Пусть T — количество васиных делителей числа n. Доказать, что $T(T+1) \leqslant n$.

5. Пусть a, b и c — такие отличные от нуля числа, что $a+b+c=0$. Найти значение выражения

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}.$$

6. На полосе, которая состоит из n расположенных рядом клеток, часть клеток закрашена чёрным, а остальные — белым. На каждом шагу выбирают одну клетку и меняют цвет всех остальных клеток кроме выбранной на противоположный. Найти все натуральные числа n, при которых с помощью описанных шагов, исходя из любой начальной раскраски клеток данной полосы, можно достичь положения, где все клетки белые.

LV Олимпиада Эстонии по математике

2 февраля 2008 г. Региональный тур **12 класс**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. В прогрессии первый член равен 1, а сумма трёх первых членов равна 21. Найти все числа, которые могли бы быть четвёртым этой прогрессии, если прогрессия

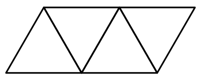
а) арифметическая;

б) геометрическая.

2. Найти все такие пары действительных чисел (c, d), при которых вторая производная квадратичной функции $f(x) = cx^2 + dx + d$ равна $f''(x) = 2$, а в точке, в которой в нуль обращается первая производная f', обращается в нуль и сама функция f.

3. На доске записываются целые числа от 1 до n, каждое один раз (n — положительное целое число). Каждое число, которое не является степенью числа 2, заменяется на число 1. Доказать, что после этого среднее арифметическое чисел на доске меньше 3.

4. Равносторонний треугольник с длиной стороны n разбит решёткой на равносторонние треугольники с длиной стороны 1, или *единичные треугольники*. На рисунке изображен параллелограмм, составленный из четырёх единичных треугольников, который можно поворачивать и зеркально отражать. Каково наибольшее количество параллелограммов, которое можно разместить на данный равносторонний треугольник так, чтобы каждый параллелограмм покрывал ровно четыре единичных треугольника и различные параллелограммы не пересекались друг с другом?



5. Из вершины A параллелограмма $ABCD$ проводят два луча, которые делят диагональ параллелограмма BD на три равные части. Доказать, что эти лучи делят стороны параллелограмма BC и CD пополам.

6. Пусть a и b — целые числа. Доказать, что если $ab + 1$ делится на 8, то и $a + b$ делится на 8.

I osa vastused

1. 17, 20 ja 5
2. 3016
3. 199
4. 36
5. 87,5%
6. 19:59
7. $(-2;-3)$, $(2;-3)$ ja $(2;3)$
8. 75°
9. $\dfrac{3\pi}{8}$ cm^2
10. 1, 2, 3 ja 4

Lahendused

1. Kolmandas lahtris on arv $0-(-5)=5$, teises lahtris arv $5\cdot 4=20$ ning esimeses lahtris arv $20+(-3)=17$.

2. Arvu ja talle vastava arvu vahe on alati 1008. Arvule 2008 vastab seega arv $2008+1008=3016$.

3. Arv 81 jagub numbritest ainult 1, 3 ja 9-ga. Otsitav arv peab olema kolmekohaline ja tema esimene number saab olla ainult 1. Seega kaks viimast numbrit on 9 ja 9.

4. Kui kolmekohaline arv $\overline{1AB}$ ei sisalda numbrit 3 ega 7, siis A kohale sobib 8 numbrit ja B kohale samuti 8 numbrit. Seega niisuguseid arve on $8\cdot 8=64$. Ülejäänud arvud sisaldavad numbrit 3 või 7. Et arve kujul $\overline{1AB}$ on üldse 100 tükki, siis otsitavaid arve on $100-64=36$.

5. Kaks aastat koosneb 24 kuust, millest 21 on olnud normist soojemad. Nende kuude osakaal on seega $\dfrac{21}{24}=\dfrac{7}{8}=87{,}5\%$.

6. Tundide arvu numbrite summa on suurim, kui tundide arv on 19. Minutite arvu numbrite summa on suurim, kui minutite arv on 59.

7. Otsitavad punktid on parajasti punkti A kõikvõimalikud peegeldused koordinaattelgede suhtes. Ühte niisugust peegeldust kirjeldab punkti koordinaadi märgi muutmine vastupidiseks. Punktist $A(-2;3)$ saame seega punktid $(-2;-3)$, $(2;-3)$ ja $(2;3)$.

8. Kolmnurk ABC on võrdkülgne, seetõttu $\angle CAB = 60^\circ$ ja $|AC| = 1$. Kolmnurk ADC on võrdhaarne tipunurgaga 30°. Selle kolmnurga alusnurk on $\angle ADC = \dfrac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ$.

9. Sisemise ringi pindala on $\dfrac{\pi}{4}$ cm^2, värvitud on sellest kolmveerand ehk $\dfrac{3\pi}{16}$ cm^2. Välimise rõnga pindala on $\dfrac{\pi \cdot 2^2}{4}$ cm^2 $-$ $\dfrac{\pi}{4}$ cm^2 $=$ $\dfrac{3\pi}{4}$ cm^2, värvitud on sellest veerand ehk $\dfrac{3\pi}{16}$ cm^2. Üldse on värvitud $\dfrac{3\pi}{16}$ cm^2 $+$ $\dfrac{3\pi}{16}$ cm^2 $=$ $=$ $\dfrac{3\pi}{8}$ cm^2.

10. Püstprisma alusel võib olla 3, 2 või 1 erineva pikkusega serva. Püstprisma kõrgus võib aluse mõne serva pikkusega kokku langeda või olla neist kõigist erinev. Kolmnurksel püstprismal saab olla niisiis kas 4, 3, 2 või 1 erineva pikkusega serva.

I osa vastused

1. $\frac{4}{9}$, $\frac{1}{3}$ ja $\frac{2}{3}$
2. 3018
3. 23
4. 34
5. 7
6. 5 mm
7. $(1;0)$
8. $22{,}5^\circ$
9. $\frac{2}{5}$
10. 1, 2 ja 3

Lahendused

1. Kolmandas lahtris on arv $1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$, teises lahtris arv $\frac{2}{3}\cdot 0{,}5=\frac{1}{3}$ ning esimeses lahtris arv $\frac{1}{3}:\frac{3}{4}=\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{3}=\frac{4}{9}$.

2. Arvu ja talle vastava arvu vahe on alati 1009. Arv, mis vastab arvule 2009, on seega $2009+1009=3018$.

3. Jagamisel 5-ga annavad jäägi 3 arvud 3, 8, 13, 18, 23, 28 jne. Nende hulgas esimene, mis jagamisel 7-ga annab jäägi 2, on arv 23.

4. Kui kahekohaline arv $\overline{AB}$ ei sisalda numbrit 1 ega numbrit 5, siis A kohale sobib 7 numbrit (arv ei saa alata nulliga) ning B kohale 8 numbrit. Seega niisuguseid arve on $7\cdot 8=56$. Ülejäänud arvud sisaldavad numbrit 1 või numbrit 5. Et kahekohalisi arve 10-st 99-ni on üldse 90, siis otsitavaid arve on $90-56=34$.

5. Võistkonna valimiseks tuleb 5 õpilasest 2 välja jätta. On 3 varianti, kus esimene omavahel konfliktis olevatest õpilastest ei kuulu võistkonda ja teine kuulub, samuti 3 varianti, kus teine nendest õpilastest ei kuulu võistkonda ja esimene kuulub, ning 1 variant, kus kumbki õpilane ei kuulu võistkonda. Kokku $3+3+1=7$.

6. 200 liitrit on $0{,}2\ \mathrm{m}^3$. Veekihi paksus on $\frac{0{,}2\ \mathrm{m}^3}{40\ \mathrm{m}^2}=0{,}005$ m ehk 5 mm.

7. Antud punktid määravad ristküliku, mille küljed on paralleelsed koordinaattelgedega. Ringjoone keskpunkti x-koordinaat on seega punktide A ja B x-koordinaatide keskmine ehk $\frac{-3+5}{2} = 1$, ringjoone keskpunkti y-koordinaat on punktide A ja D y-koordinaatide keskmine ehk $\frac{-3+3}{2} = 0$. Keskpunkt on niisiis $(1; 0)$.

8. Kolmnurk DAE on võrdhaarne alusnurgaga 75°, seega tema tipunurk on $180^\circ - 2 \cdot 75^\circ = 30^\circ$. Kolmnurk AEB on samuti võrdhaarne tipunurgaga $180^\circ - 75^\circ = 105^\circ$, seega tema alusnurk on $\frac{180^\circ - 105^\circ}{2} = 37{,}5^\circ$. Järelikult $\angle CAD = 90^\circ - 30^\circ - 37{,}5^\circ = 22{,}5^\circ$.

9. Kolmnurga BFC pindala on pool ristküliku $ABFE$ pindalast, viimane omakorda võrdub kolmnurga AED pindalaga. Kolmnurga AED pindala moodustab trapetsi pindalast $\frac{1}{0{,}5+1+1} = \frac{1}{2{,}5} = \frac{2}{5}$ ehk 40%.

10. Püströöptahuka alusel võib olla 2 või 1 erineva pikkusega serva, sest aluse vastasservad on võrdse pikkusega. Püströöptahuka kõrgus võib aluse mõne serva pikkusega kokku langeda või olla nendest erinev. Erineva pikkusega servi võib seega olla 3, 2 või 1.

I osa vastused

1. 2

2. 8

3. -4008

4. 2

5. 9

6. 4π cm

7. 40°

8. 3

9. 35 cm^2

10. 1, 2, 3, 4 ja 5

Lahendused

1. Et $\dfrac{2008^2 - 1907^2}{3915} = \dfrac{(2008-1907)(2008+1907)}{3915} = \dfrac{101 \cdot 3915}{3915} = 101$ ja 101 on algarv, siis antud arv jagub kahe erineva positiivse täisarvuga: 1 ja 101.

2. Avaldise võime esitada kujul $2^{2008} \cdot 5^{2011} = 2^{2008} \cdot 5^{2008} \cdot 5^3 = 125000\ldots00$, sest $2^{2008} \cdot 5^{2008} = 10^{2008} = 1000\ldots00$. Arvu numbrite summa on niisiis $1+2+5+0+\ldots+0 = 8$.

3. Arvust 1000 arvuni -2008 jõudmiseks tuleb teha $1000-(-2008) = 3008$ sammu. Alumise rea arv väheneb iga sammuga 2 võrra. Seega 3008 sammu järel tekib arv $2008 - 2 \cdot 3008 = 2008 - 6016 = -4008$.

4. Et 7 on algarv, siis arvu $5 \cdot 6$ igale jagajale x vastab kaks arvu $5 \cdot 6 \cdot 7$ jagajat: x ja $7x$. Järelikult on teisel arvul jagajaid kaks korda rohkem kui esimesel.

5. Liidame võrduste $3x + 2y = 14$ ja $x + 6y = 22$ pooled, saame $4x + 8y = 36$. Jagame tulemuse pooled 4-ga, saame $x + 2y = 9$.

6. Kui r on ringi raadius, siis kehtib seos $\pi r^2 = 4\pi \text{ cm}^2$, millest $r = 2$ cm. Kui h on kolmnurga kõrgus, siis kehtib seos $\dfrac{1}{2} \cdot r \cdot h = 4\pi \text{ cm}^2$, millest $h = 4\pi$ cm.

7. Et kolmnurgad on võrdkülgsed, siis $\angle BPR = 180^\circ - 75^\circ - 60^\circ = 45^\circ$ ja $\angle PBC = 180^\circ - 65^\circ - 60^\circ = 55^\circ$. Kolmnurgast BPY leiame nüüd $\angle BYP = 180^\circ - 55^\circ - 45^\circ = 80^\circ$. Järelikult ka $\angle CYX = 80^\circ$. Et $\angle XCY = 60^\circ$, siis $\angle CXY = 180^\circ - 80^\circ - 60^\circ = 40^\circ$.

8. Keskmise rea kolm horisontaaljoont saab moodustada ainult kolme erineva templivajutusega. Pärast neid kolme vajutust on ka kõik ülejäänud jooned olemas.

9. Kolmnurga BCM pindala on $\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 3{,}5\ \mathrm{cm}^2 = \frac{35}{2}\ \mathrm{cm}^2$. Kolmnurga ABC pindala on kolmnurga BCM pindalast kaks korda suurem, sest tema alus AC on kaks korda pikem, kuid kõrgused on samad. Otsitav pindala on seega $35\ \mathrm{cm}^2$.

10. Püstprisma alusel võib olla 4, 3, 2 või 1 erineva pikkusega serva. Püstprisma kõrgus võib aluse mõne serva pikkusega kokku langeda või olla neist kõigist erinev. Nelinurksel püstprismal saab olla niisiis kas 5, 4, 3, 2 või 1 erineva pikkusega serva.

II osa lahendused

1. *Vastus:* 34%.

Olgu a Juku koolikoti esialgne kaal. Siis spordiasjade kaal on $0{,}3a$, õppevahendite kaal $0{,}4a$ ja niisama asjade kaal $0{,}3a$. Pärast seda, kui Juku läks teise trenni, on tema spordiasjade kaal $1{,}2 \cdot 0{,}3a = 0{,}36a$. Peale spordiasjade jäid koolikotti veel niisama asjad kaaluga $0{,}3a$. Juku koolikoti kaal pärast teise trenni minekut oli seega $0{,}36a + 0{,}3a = 0{,}66a$. Esialgne kaal a vähenes $a - 0{,}66a = 0{,}34a$ võrra ehk 34%.

2. *Vastus:* 216, 252, 468, 612, 828 ja 864.

Olgu $\overline{ABC}$ sellise omadusega arv. Et see arv ja arv $\overline{CBA}$ jaguvad 4-ga, siis peavad mõlemad olema paarisarvud. Sellest järeldub, et A ja C on paarisnumbrid ehk 2, 4, 6 või 8. Peale selle, arvu $\overline{ABC}$ ristsumma peab jaguma 9-ga. Järgmises tabelis on iga A ja C korral näidatud sobiv number B. Paksu kirjaga on tähistatud need kombinatsioonid, mis annavad ülesande tingimustele vastava arvu.

	2	4	6	8
2	***5***	3	***1***	8
4	3	1	8	***6***
6	***1***	8	6	4
8	8	***6***	4	***2***

Otsitavad arvud on seega 252, 216, 468, 612, 864 ja 828.

3. *Vastus:* 52°, 52° ja 76°.

Lahendus 1. Olgu $\angle BAC = x$. Siis ka $\angle ABC = x$, sest $|AC| = |BC|$. Et kolmnurk BDE on võrdhaarne tipunurgaga x, siis tema alusnurk on $\angle BDE = \dfrac{180^\circ - x}{2} = 90^\circ - \dfrac{x}{2}$. Järelikult $\angle ADF = 180^\circ - \angle BDE = 90^\circ + \dfrac{x}{2}$. Tingimusest, et kolmnurga ADF sisenurkade summa on 180°, saame

$$x + 90^\circ + \frac{x}{2} + 12^\circ = 180^\circ$$

ehk $\dfrac{3x}{2} = 78^\circ$, millest $x = 52^\circ$. Kolmnurga ABC nurkade suurused on $\angle BAC = 52^\circ$, $\angle ABC = 52^\circ$ ja $\angle ACB = 180^\circ - 2 \cdot 52^\circ = 76^\circ$.

Lahendus 2. Olgu $\angle BAC = \angle ABC = x$. Et $\angle AFD = 12^\circ$, siis kolmnurga välisnurga omaduse põhjal $\angle FDB = x + 12^\circ$. Kolmnurga BDE nurgad on seega x, $x + 12^\circ$ ja $x + 12^\circ$. Järelikult

$$x + x + 12^\circ + x + 12^\circ = 180^\circ,$$

millest $3x = 156^\circ$ ja $x = 52^\circ$. Kolmnurgas ABC on seega $\angle BAC = \angle ABC = 52^\circ$, millest leiame, et $\angle ACB = 76^\circ$.

II osa lahendused

1. *Vastus:* 15.

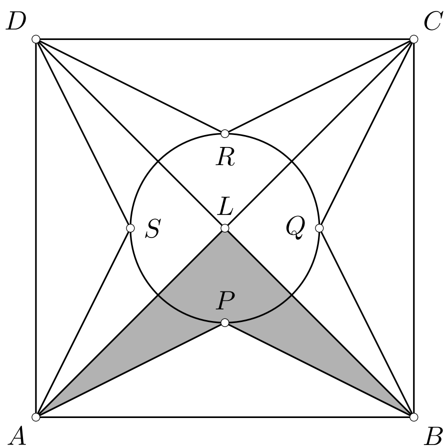
Läbides sama tee edasi-tagasi, sõidab sportlane tõusudel kokku 5 km ja langustel samuti 5 km, sest iga tõus on vastassuunas sõites langus ja vastupidi. Seega kulub tal jalgrattasõidule aega

$$\frac{5\ \mathrm{km}}{15\ \mathrm{km/h}} + \frac{5\ \mathrm{km}}{25\ \mathrm{km/h}} = \frac{1}{3}\ \mathrm{h} + \frac{1}{5}\ \mathrm{h} = \frac{8}{15}\ \mathrm{h} = 32\ \mathrm{min}.$$

Jooksmisele kulutab sportlane seega aega $32 + 4 = 36$ min $= 0{,}6$ h. Joostes keskmise kiirusega 10 km/h, läbib ta vahemaa $0{,}6 \cdot 10 = 6$ km. Staadioniringe kulub selleks $\frac{6}{0{,}4} = 15$.

2. *Vastus:* 16, 24, 36, 54 ja 81.

Olgu a esimene arv. Järgmised arvud on siis $\frac{3}{2}a$, $\frac{9}{4}a$, $\frac{27}{8}a$, $\frac{81}{16}a$. Et ka viimane arv oleks täisarv, peab a jaguma 16-ga. Kui a oleks 32 või suurem, siis oleks viimane arv vähemalt $2 \cdot 81 = 162 > 150$. Järelikult $a = 16$. Sel



Joonis 1

juhul on kõik arvud täisarvud: 16, $\frac{3}{2} \cdot 16 = 24$, $\frac{9}{4} \cdot 16 = 36$, $\frac{27}{8} \cdot 16 = 54$ ja $\frac{81}{16} \cdot 16 = 81$.

3. *Vastus:* $\frac{\pi}{16}$.

Jaotame ruudu diagonaalidega neljaks osaks ning olgu L kujundi keskpunkt (joonis 1). Et kolmnurga ALB pindala on veerand ruudu $ABCD$ pindalast ja nelinurga $ALBP$ pindala on veerand tähe $APBQCRDS$ pindalast, siis nelinurga $ALBP$ pindala on pool kolmnurga ALB pindalast. Seega ka kolmnurga APB pindala moodustab poole kolmnurga ALB pindalast. Et neil kolmnurkadel on ühine alus, siis moodustab kolmnurga APB kõrgus poole kolmnurga ALB kõrgusest. Järelikult on ringi raadius võrdne poolega ruudu poolest küljepikkusest. Seega kui ruudu küljepikkus on 1, siis ringi raadius on $\frac{1}{4}$ ning ringi pindala on $\pi \cdot \frac{1}{4^2}$. Ringi ja ruudu pindalade suhe on seega $\frac{\pi}{16}$.

II osa lahendused

1. *Vastus:* ei.

Olgu x kõneminuti hind ning y sõnumi hind. Ülesande tingimuste kohaselt $30x + 15y = 15x + 35y$. Siit $15x = 20y$ ehk $3x = 4y$. Kõnekaardil on seega raha

$$30x + 15y = 40y + 15y = 55y.$$

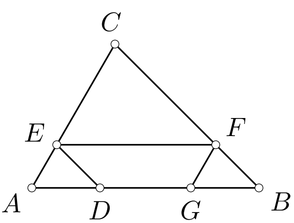
Teiselt poolt, 24 kõneminuti ja 24 sõnumi jaoks kulub raha

$$24x + 24y = 32y + 24y = 56y.$$

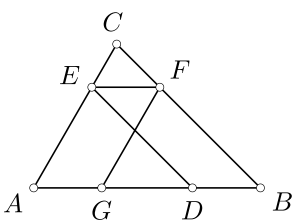
Järelikult ei piisa kõnekaardil olevast rahast niisuguseks kõneminutite ja sõnumite kombinatsiooniks.

2. *Lahendus 1.* Nelinurk $AEFG$ on rööpkülik, sest tema vastasküljed on paralleelsed (joonised 2 ja 3). Nelinurk $BDEF$ on rööpkülik samal põhjusel. Et nendel rööpkülikutel on külg EF ühine, siis on kummaski rööpkülikus selle külje vastasküljed AG ja BD ühepikkused. Lõigud AD ja BG on aga vastavalt lõikudest AG ja BD korraga kas lühemad või pikemad parajasti lõigu DG pikkuse võrra.

Lahendus 2. Kolmnurgad ADE ja GBF on sarnased, sest nende vastavad küljed on paralleelsed. Et sirge EF on paralleelne sirgega AB, on nende kolmnurkade vastavatest tippudest E ja F tõmmatud kõrgused võrdsed. See tähendab, et kolmnurgad ADE ja GBF on võrdsed. Järelikult on nende kolmnurkade vastavad küljed AD ja GB ühepikkused.



Joonis 2



Joonis 3

3. *Vastus:* jah.

Valime ruudustikus kõige parempoolsema veeru V, kus esineb vähemalt üks must ruut, ning selles veerus kõige alumise musta ruudu R. Rakendame ülesandes kirjeldatud ümbervärvimist selle ruuduga määratud ristkülikus. Sellega muutub ruut R valgeks ning temast paremal ja allpool asuvate ruutude värv jääb samaks. Selliste sammudega kõrvaldame veerust V kõik mustad ruudud. Seejärel leiame uue parempoolseima veeru, kus esineb musti ruute, ja kordame eelkirjeldatud operatsioone selle veeru jaoks. Nii jõuame lõpuks olukorrani, kus ruudustiku üheski veerus pole enam musti ruute.

4. *Vastus:* 121.

Olgu arv $n = \overline{ab} + \overline{ba}$ ilus. Siis

$$n = (10a + b) + (10b + a) = 11(a + b).$$

Järelikult n jagub 11-ga. Kui n on mingi täisarvu ruut, siis n jagub 11^2-ga, sest 11 on algarv. Seega $a + b$ jagub 11-ga. Et $0 < a + b \leqslant 18$, siis ainsaks võimaluseks on $a + b = 11$, millest $n = 11^2 = 121$. Arv 121 on tõepoolest ilus, sest valides näiteks $a = 2$, $b = 9$, saame $121 = 29 + 92$.

Eesti LV matemaatikaolümpiaad

2. veebruar 2008 Piirkonnavoor **10. klass**

Lahendused

1. *Vastus:* 65%.

Lahendus 1. Olgu x valguse ja y pimeduse hulk. Kui valgust oleks 40% rohkem ja pimedust 30% rohkem, siis oleks valguse hulk $1{,}4x$ ja pimeduse hulk $1{,}3y$. Ülesande tingimustest saame, et $1{,}4x = 2 \cdot 1{,}3y$, kust $y = \frac{7}{13}x$. Valguse osakaal on seega

$$\frac{x}{x+y} = \frac{x}{x + \frac{7}{13}x} = \frac{13}{20} \qquad \text{ehk} \qquad 65\%.$$

Lahendus 2. Olgu x valguse osakaal maailmas, pimeduse osakaal on siis $1 - x$. Kui pimedust oleks 30% rohkem ja valgust 40% rohkem, siis oleks valguse koguhulk (esialgse maailma ühikutes) $1{,}4x$ ja pimeduse koguhulk $1{,}3(1 - x)$. Ülesande tingimuste kohaselt kehtib $1{,}4x = 2 \cdot 1{,}3(1 - x)$. Siit $1{,}4x = 2{,}6 - 2{,}6x$ ehk $4x = 2{,}6$. Järelikult $x = \frac{2{,}6}{4} = 0{,}65$ ehk valguse osakaal on 65%.

Lahendus 3. Olgu a valguse ja pimeduse koguhulk juhul, kui pimedust oleks 30% rohkem ja valgust 40% rohkem. Siis oleks valguse hulk $\frac{2a}{3}$ ja pimeduse hulk $\frac{a}{3}$. Seega tegelikult on valgust $\frac{2a}{3 \cdot 1{,}4}$ ja pimedust $\frac{a}{3 \cdot 1{,}3}$. Valguse osa maailmas on

$$\frac{\frac{2a}{3 \cdot 1{,}4}}{\frac{2a}{3 \cdot 1{,}4} + \frac{a}{3 \cdot 1{,}3}} = \frac{2}{4{,}2\left(\frac{2}{4{,}2} + \frac{1}{3{,}9}\right)} = \frac{2}{2 + \frac{4{,}2}{3{,}9}} = \frac{2 \cdot 3{,}9}{2 \cdot 3{,}9 + 4{,}2} = \frac{7{,}8}{12} = 0{,}65.$$

2. *Vastus:* 0 ja 3.

Lahendus 1. Esimese võrrandi lahend on $x = \frac{1}{1-a}$, teise võrrandi lahend aga $x = \frac{1-a}{a+1}$. Mõlemad nimetajad on nullist erinevad, sest juhul $a = 1$ või $a = -1$ ühel võrranditest lahend puudub. Kui nüüd võrranditel on üks ja sama lahend, siis kehtib võrdus

$$\frac{1}{1-a} = \frac{1-a}{a+1}.$$

Saame võrrandi $(1-a)^2 = a+1$ ehk $a^2-2a+1 = a+1$, millest $a^2-3a = 0$. Selle ruutvõrrandi lahenditeks on $a = 0$ ja $a = 3$.

Lahendus 2. Kui x on mõlema võrrandi ühine lahend, siis peab ta rahuldama ka võrrandit, mille saame teise võrrandi pooltest esimese võrrandi vastavate poolte lahutamisel:

$$2x + a - 2 = 0.$$

Siit $x = \frac{2-a}{2}$. Asendades selle esimesse võrrandisse, saame

$$\frac{(a-1)(2-a)}{2} + 1 = 0$$

ehk $(a-1)(2-a) + 2 = 0$. Avades sulud ja koondades sarnased liikmed, tekib ruutvõrrand $a^2 - 3a = 0$, mille lahenditeks on $a = 0$ ja $a = 3$.

3. *Vastus:* $x = -a$ ja $x = -b$.

Kirjutame võrrandi kujul

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a+b+x} - \frac{1}{x}$$

Viime mõlemal poolel liikmed ühisele nimetajale:

$$\frac{a+b}{ab} = \frac{x-a-b-x}{(a+b+x)x}$$

Paremal poolel jääb pärast x-de koondamist lugejasse $-(a+b)$. Jagades seejärel võrrandi pooli nullist erineva suurusega $a+b$, saame

$$\frac{1}{ab} = -\frac{1}{(a+b+x)x},$$

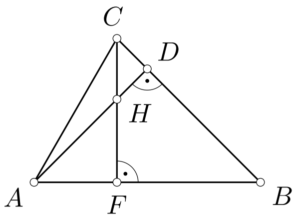
millest $ab = -(a+b+x)x$. Avades sulud ja viies liikmed vasakule, tekib ruutvõrrand $x^2 + (a+b)x + ab = 0$ ehk

$$(x+a)(x+b) = 0.$$

Siit $x = -a$ või $x = -b$. Lihtne on veenduda, et mõlemad sobivad esialgse võrrandi lahendiks.

4. Olgu D ja F vastavalt tippudest A ja C tõmmatud kõrguste aluspunktid (joonis 4). Siis $\tan \angle ACB = \frac{|AD|}{|DC|}$. Kolmnurk ADB on sarnane kolmnurgaga CFB, sest mõlemad on täisnurksed ja neil on üks teravnurk ühine. Samal põhjusel on kolmnurk CFB sarnane kolmnurgaga CDH. Kolmnurkade ADB ja CDH sarnasuse tõttu

$$\frac{|AD|}{|AB|} = \frac{|CD|}{|CH|},$$



Joonis 4

millest omakorda

$$\frac{|AB|}{|CH|} = \frac{|AD|}{|CD|} = \tan\angle ACB.$$

5. *Vastus:* 11.

Arvu 11 ei saa esitada kahe kordarvu summana, sest ainuke kordarv, mis on väiksem kui pool arvust 11, on 4, ent kui üks liidetav on 4, peab teine liidetav olema algarv 7.

Tõestame, et kõiki suuremaid algarve saab esitada kordarvude summana. Iga 11-st suurem algarv p on paaritu ja avaldub seetõttu kujul $p = 9 + 2k$, kus $k \geqslant 2$. Viimases esituses on mõlemad liidetavad kordarvud.

6. Kui Joosep võtab kuhjast ära ühe kivi, siis jääb järele paaritu arv kive. Et paaritu arvu tegurid on kõik paaritud arvud, siis peab Juula nüüd kuhjast võtma paaritu arvu kive, kuid ei tohi võtta kõiki. Sellega jääb Joosepile jälle paarisarv kive ja ta võib eelnevat korrata, võttes kuhjast uuesti ühe kivi. Mäng lõpeb hetkel, mil kuhja on alles jäänud üksainus kivi. Eelneva järgi võib selline olukord tekkida ainult Joosepi vastasel.

Lahendused

1. *Vastus:* $x = 3 + 2\sqrt{2}$.

Kirjutame võrrandi kujul $(\sqrt{x} - 1) \cdot \sqrt{x} = \sqrt{x} + 1$. Võttes $y = \sqrt{x}$, saame võrrandi $(y-1)y = y+1$ ehk $y^2 - 2y - 1 = 0$, mille lahendid on $y_1 = 1 + \sqrt{2}$ ja $y_2 = 1 - \sqrt{2}$. Lahend y_2 ei sobi, sest $y = \sqrt{x}$ peab olema mittenegatiivne. Järelikult $x = y_1^2 = 3 + 2\sqrt{2}$. See sobib esialgse võrrandi lahendiks, sest sel juhul $\sqrt{x} - 1 \neq 0$.

2. *Vastus:* a) $y = x + 1$ ja $y = -x + 3$; b) $(x-1)^2 + y^2 = 4$.

Lahendus 1. a) Selle kolmnurga kaatetid moodustavad hüpotenuusiga, st x-teljega nurga $45°$ ning peavad seega paiknema sirgetel $y = x + a$ ja $y = -x + b$, kus a ja b on mingid reaalarvud. Et tipp koordinaatidega $(1;2)$ paikneb mõlemal sirgel, saame $2 = 1 + a$ ja $2 = -1 + b$, kust $a = 1$ ja $b = 3$.

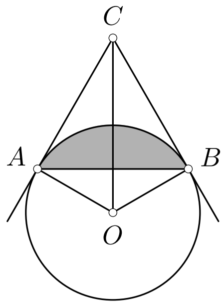
b) Täisnurkse võrdhaarse kolmnurga ümberringjoone keskpunkt asub hüpotenuusi keskpunktis ning langeb kokku täisnurga tipust hüpotenuusile tõmmatud kõrguse aluspunktiga. See kõrgus on risti hüpotenuusiga, st paralleelne y-teljega, tema üks otspunkt on $(1;2)$ ja teine otspunkt asub x-teljel. Kõrguse aluspunkti koordinaadid on järelikult $(1;0)$. Ümberringjoone raadius on kaugus keskpunkti $(1;0)$ ja kolmnurga tipu $(1;2)$ vahel, st 2. Seega ümberringjoone võrrand on $(x-1)^2 + y^2 = 4$.

Lahendus 2. b) Samamoodi nagu lahenduses 1 leiame, et ümberringjoone keskpunkti koordinaadid on $(1;0)$ ja raadius 2 ning ümberringjoone võrrand on $(x-1)^2 + y^2 = 4$.

a) Kolmnurga ülejäänud kaks tippu asuvad seega x-teljel, kaugusel 2 punktist $(1;0)$, st nende koordinaadid on $(-1;0)$ ja $(3;0)$. Üks kaatet paikneb punkte $(1;2)$ ja $(-1;0)$ läbival sirgel, mille võrrand on $\dfrac{x-(-1)}{1-(-1)} = \dfrac{y-0}{2-0}$ ehk $y = x + 1$, teine kaatet aga paikneb punkte $(1;2)$ ja $(3;0)$ läbival sirgel, mille võrrand on $\dfrac{x-3}{1-3} = \dfrac{y-0}{2-0}$ ehk $y = -x + 3$.

3. *Vastus:* vähem kui pool.

Olgu ülesandes antud ringjoone raadius 1 ning O ringjoone keskpunkt (joonis 5). Siis $\angle OAC = \angle OBC = 90°$, millest $\angle AOB = 120°$. Võrdkülgse kolmnurga ABC küljepikkuse leiame kolmnurga OAC abil: $|AC| =$



Joonis 5

$= |AO| \cdot \tan\angle AOC = 1 \cdot \tan 60^\circ = \sqrt{3}$. Seega kolmnurga ABC pindala on (võrdkülgse kolmnurga pindala valemi põhjal)

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\sqrt{3}\right)^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

Ringi sisse jääva kolmnurgaosa pindala S' arvutame ringi sektori AOB ja kolmnurga AOB pindalade vahena. Ringi sektori pindala on $\frac{\pi \cdot 1^2}{3} = \frac{\pi}{3}$, kolmnurga AOB pindala aga $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}$. Seega

$$S' = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Niisiis on vaja võrrelda suurusi S' ja $\frac{1}{2}S$ ehk $\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}$ ja $\frac{3\sqrt{3}}{8}$. Korrutades mõlemat suurust 24-ga, saame vastavalt $8\pi - 6\sqrt{3}$ ja $9\sqrt{3}$. Võrdleme suurusi 8π ja $15\sqrt{3}$. Et

$$8\pi < 8 \cdot 3{,}15 = 25{,}2 < 25{,}5 = 15 \cdot 1{,}7 < 15\sqrt{3},$$

siis $S' < \frac{1}{2}S$ ehk ringi sisse jääb vähem kui pool kolmnurga pindalast.

4. Olgu s arvu n suurim Tambeti tegur. Siis kõik Tambeti tegurid asuvad 1 ja s vahel, mistõttu $T \leqslant s$. Siis aga $T + 1 \leqslant s + 1$, millest

$$T(T + 1) \leqslant s(s + 1).$$

Et s ja $s+1$ on ühistegurita ning mõlemad on arvu n tegurid Tambeti teguri omaduse tõttu, siis on ka $s(s + 1)$ arvu n tegur. Seega

$$s(s + 1) \leqslant n.$$

Kokkuvõttes $T(T + 1) \leqslant n$.

5. *Vastus:* -3.

Lahendus 1. Teisendame avaldist järgmiselt:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}=\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{a}{c}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{b}{a}\right)=$$
$$=\frac{a+c}{b}+\frac{b+a}{c}+\frac{c+b}{a}=\frac{-b}{b}+\frac{-c}{c}+\frac{-a}{a}=-3.$$

Lahendus 2. Viies kõik murrud ühisele nimetajale, saame

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}=\frac{a^2c+b^2c+b^2a+c^2a+c^2b+a^2b}{abc}=$$
$$=\frac{(a+b+c)(ab+bc+ca)-3abc}{abc}=\frac{-3abc}{abc}=-3.$$

Lahendus 3. Asendame antud murdudes $c=-a-b$, viime murrud ühisele nimetajale ning jagame lugejat ja nimetajat nullist erineva arvuga $a+b$:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{b}{-a-b}+\frac{-a-b}{b}+\frac{-a-b}{a}+\frac{a}{-a-b}=$$
$$=\frac{a^2(a+b)+b^2(a+b)-ab^2-a(a+b)^2-b(a+b)^2-a^2b}{ab(a+b)}=$$
$$=\frac{a^2+b^2-ab-(a+b)^2}{ab}=\frac{-3ab}{ab}=-3.$$

6. *Vastus:* kõik paaris naturaalarvud.

Kui n on paarisarv, siis juhul, kui musti ruute on esialgu paarisarv, saame nende arvu vähendada kahe võrra kahe ülesandes kirjeldatud värvimisega, valides sammu tegemiseks esimene kord mingi ühe ja teine kord teise musta ruudu. Valitud ruute värvitakse siis kokkuvõttes ümber üks kord (nende värv muutub seega mustast valgeks), kõiki ülejäänud ruute kaks korda (nende värv jääb samaks). Nii saame mustade ruutude koguarvu vähendada kahekaupa kuni nullini. Kui aga esialgu on musti ruute paaritu arv, siis on valgeid ruute samuti paaritu arv. Valime ühe musta ruudu ja rakendame selle puhul ülesandes kirjeldatud sammu. Valitud ruut jääb ikka mustaks, kuid ülejäänud mustad ruudud muutuvad valgeks ja valged ruudud mustaks. Seega tekib olukord, kus musti ruute on paarisarv ning edasi saame nende arvu muuta nulliks ülalkirjeldatud operatsioonidega.

Kui n on paaritu arv ning ka musti ruute on esialgu paaritu arv, siis valgeid ruute on paarisarv. Sõltumata sellest, kumba värvi ruudu me sammu tegemiseks valime, on ülejäänud ruutude hulgas mustade ja valgete ruutude arvu paarsus sama. See tähendab, et sammu tegemisel mustade ruutude arvu paarsus ei muutu ja jääb ikka paarituks. Et 0 on paarisarv, siis ei saa mustade ruutude arv kahaneda nulliks.

Lahendused

1. *Vastus:* a) 19; b) 64 või -125.

a) Olgu d aritmeetilise jada (a_n) vahe. Siis aritmeetilise jada kolme esimese liikme summa on

$$1 + (1 + d) + (1 + 2d) = 3 + 3d = 21,$$

kust $d = 6$ ja $a_4 = 1 + 3d = 19$.

b) Olgu q geomeetrilise jada (b_n) tegur. Geomeetrilise jada kolme esimese liikme summa on

$$1 + q + q^2 = 21,$$

kust saame ruutvõrrandi $q^2 + q - 20 = 0$ lahenditega $q_1 = 4$ ja $q_2 = -5$. Esimesel juhul $b_4 = 1 \cdot q_1^3 = 64$, teisel juhul $b_4 = 1 \cdot q_2^3 = -125$.

2. *Vastus:* $(1, 0)$ ja $(1, 4)$.

Lahendus 1. Funktsiooni $f(x) = cx^2 + dx + d$ tuletis on $f'(x) = 2cx + d$ ning teine tuletis on $f''(x) = 2c$. Et $f''(x) = 2$, siis $c = 1$. Esimese tuletise nullkoha leiame nüüd võrrandist $2x + d = 0$, seega $x = -\frac{d}{2}$. Et sama arv peab olema ka funktsiooni $f(x)$ nullkoht, siis

$$\frac{d^2}{4} - d \cdot \frac{d}{2} + d = 0$$

ehk $-d^2 + 4d = 0$, millest $d = 0$ või $d = 4$.

Lahendus 2. Kui arv x on funktsiooni $f(x) = cx^2 + dx + d$ ja tema tuletise $f'(x) = 2cx + d$ ühine nullkoht, siis rahuldab ta võrrandeid

$$cx^2 + dx + d = 0,$$
$$2cx + d = 0.$$

Korrutame esimest võrrandit 2-ga ja teist x-ga ning lahutame esimesest teise. Saame $dx + 2d = 0$. Siit $d = 0$ või $x = -2$. Teisel juhul leiame võrrandist $2cx + d = 0$, et $d = 4$. Kordaja c määrame samamoodi nagu lahenduses 1 teise tuletise abil, saades tulemuseks $c = 1$.

Lahendus 3. Nagu lahenduses 1 näitame, et $c = 1$. Edasi olgu a funktsioonide f ja f' ühine nullkoht. Siis f graafik puutub oma haripunktiga x-telge kohal a, mistõttu $f(x) = (x-a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$. Et samal ajal $f(x) = x^2 + dx + d$, siis $-2a = d$ ja $a^2 = d$. Seega $-2a = a^2$, kust $a = 0$ või $a = -2$. Vastavalt saame $d = 0$ või $d = 4$.

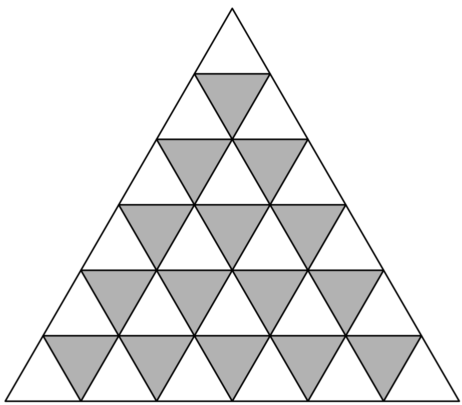
3. Olgu 2^k suurim 2 aste, mis pole suurem kui n. Pärast ülesandes kirjeldatud operatsioone on tahvlil arvud $2^0, 2^1, \ldots, 2^k$ ning lisaks $n-(k+1)$ ühte. Et geomeetrilise jada summa valemi põhjal $2^0 + 2^1 + \ldots + 2^k = 2^{k+1} - 1$, siis tahvlil olevate arvude aritmeetiline keskmine on

$$\frac{2^{k+1} - 1 + n - (k+1)}{n} = \frac{2^{k+1} + n - k - 2}{n} = \frac{2 \cdot 2^k}{n} + 1 - \frac{k+2}{n}.$$

Siin $\frac{2^k}{n} \leqslant 1$ ning $\frac{k+2}{n} > 0$, mistõttu vaadeldav aritmeetiline keskmine on väiksem kui $2 + 1$ ehk 3.

4. *Vastus:* suurim täisarv, mis ei ületa $\frac{n(n-1)}{4}$ (ehk $\left\lfloor \frac{n(n-1)}{4} \right\rfloor$).

Värvime kolmnurgad mustaks ja valgeks nii, nagu joonisel 6. Ridade kaupa lugedes saame mustade kolmnurkade arvuks $0 + 1 + 2 + \ldots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$. Iga rööpkülik katab alati täpselt kaks musta kolmnurka, seega ei saa kolmnurgale paigutada rohkem kui $\frac{n(n-1)}{4}$ rööpkülikut. Et rööpkülikute arv on täisarv, siis saab rööpkülikute arv olla ülimalt nii suur kui suurim täisarv, mis ei ületa arvu $\frac{n(n-1)}{4}$.



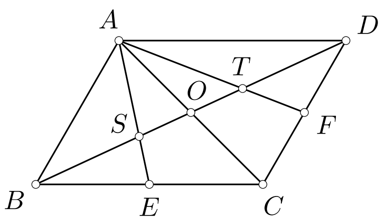
Joonis 6

Tõestame, et sellise arvu rööpkülikuid saab tõepoolest kolmnurgale paigutada. Täidame kõigepealt kolmnurga alumise rea, alates vasakust otsast, järjest rööpkülikutega. Kui sellega sai rea viimane must kolmnurk kaetud, siis võtame järgmise rea. Vastasel korral jääb mustast kolmnurgast paremale veel üks katmata valge kolmnurk. Katame need kaks kolmnurka rööpkülikuga ja jätkame kaetud reale vahetult eelnevas reas rööpkülikute paigutamist, liikudes nüüd paremalt vasakule. Liikudes nii igas reas suunda vahetades reakaupa ülespoole, katame iga rööpkülikuga kaks musta kolmnurka. Kui viimane must kolmnurk teises reas saab kaetud, siis on rööpkülikute arvu ülempiir saavutatud. Kui viimane must kolmnurk jääb katmata, siis on musti kolmnurki ühtekokku paaritu arv, seega on $\frac{n(n-1)}{4}$ murdarv ning me oleme ära paigutanud suurima seda arvu mitteületava täisarvu rööpkülikuid.

5. *Lahendus 1.* Olgu S ja T punktid diagonaalil BD, mille korral $|BS| = |ST| = |TD|$ ning lõigaku kiir AS külge BC punktis E ja kiir AT külge CD punktis F (joonis 7). Samuti olgu O rööpküliku diagonaalide lõikepunkt. Punkt O on mõlema diagonaali ning seega ka lõigu ST keskpunkt. Järelikult on lõik BO kolmnurga ABC mediaan ning võrduste $|BS| = |ST| = 2|SO|$ tõttu on S kolmnurga ABC mediaanide lõikepunkt. Seega on ka AE selle kolmnurga mediaan ning seega punkt E poolitab külje BC. Analoogiliselt tõestame, et F on lõigu CD keskpunkt.

Lahendus 2. Kasutame samu tähistusi nagu lahenduses 1. Nelinurk $ASCT$ on rööpkülik, sest tema diagonaalid AC ja ST poolitavad teineteist. Et S on lõigu BT keskpunkt ning ES ja CT on paralleelsed, siis ES on kolmnurga BCT kesklõik. Seega on E lõigu BC keskpunkt. Analoogiliselt tõestame, et F on lõigu CD keskpunkt.

Lahendus 3. Olgu jällegi tähistused samad nagu lahenduses 1, lisaks olgu E' ja F' vastavalt külgede BC ja CD keskpunktid. Kolmnurgad ADS ja $E'BS$ on sarnased, sest $|AD| = 2|BE'|$, $|DS| = 2|BS|$ ja $\angle ADS = \angle E'BS$. Seega $\angle ASD = \angle E'SB$, millest järeldub, et punktid A, S ja E' on ühel sirgel. Järelikult $E' = E$. Analoogiliselt $F' = F$.



Joonis 7

6. *Lahendus 1.* Kui $ab+1$ jagub 8-ga, siis on ab paaritu. Järelikult on ka a ja b paaritud ning saavad 8-ga jagades anda jäägiks ainult 1, 3, 5 või 7. Arv $ab+1$ jagub 8-ga parajasti nende a ja b jäägikombinatsioonide korral, mil ab annab 8-ga jagades jäägiks 7. Arvutame korrutise jäägid tegurite jääkide kaudu:

	1	3	5	7
1	1	3	5	***7***
3	3	1	***7***	5
5	5	***7***	1	3
7	***7***	5	3	1

Jäägi 7 saame ainult siis, kui üks arvudest a ja b annab 8-ga jagades jäägi 1 ja teine 7, või siis, kui üks arvudest annab jäägi 3 ja teine 5. Mõlemal juhul annab $a+b$ aga 8-ga jagades jäägi 0 ehk $a+b$ jagub 8-ga.

Lahendus 2. Eeldame, et $ab+1$ jagub 8-ga. Siis peavad a ja b olema mõlemad paaritud. Esituses $ab+a+b+1=(a+1)(b+1)$ on mõlemad tegurid paarisarvud, samuti on esituses $ab-a-b+1=(a-1)(b-1)$ mõlemad tegurid paarisarvud. Et $a+1$ ja $a-1$ on kaks järjestikust paarisarvu, siis üks neist jagub 4-ga. Seega üks arvudest $ab+a+b+1$ ja $ab-a-b+1$ jagub 8-ga. Leides vastava arvu vahe arvuga $ab+1$, saame, et ka arv $a+b$ jagub 8-ga.

Lahendus 3. Kasutame fakti, et iga paaritu arvu ruut annab 8-ga jagades jäägi 1. Siit saame, et iga paaritu a korral $a\cdot(-a)\equiv -1 \pmod 8$. Kui $ab+1$ jagub 8-ga, siis on a ja b paaritud ning $ab\equiv -1 \pmod 8$. Ent kongruentsil $ax\equiv -1 \pmod 8$ on paaritu a korral mooduli 8 järgi ainult üks lahend x. Seega $-a\equiv b \pmod 8$ ehk $a+b\equiv 0 \pmod 8$. See tähendabki, et $a+b$ jagub 8-ga.

Märkus. Ülesande väide kehtib ka sellisel kujul: kui $ab+1$ jagub 24-ga, siis ka $a+b$ jagub 24-ga. Võib tõestada, et arvu 24 ei saa siin enam asendada suurema arvuga.

Lp hindaja!

Käesolevas esitame kõigepealt hindamise üldised põhimõtted ning seejärel järjekorras konkreetsed hindamisjuhised iga ülesande kohta eraldi.

1. Õpilase lahenduseks tuleb esmajoones lugeda see, mida õpilane on ülesande kohta vormistanud puhtandina (sh mustandipaberile selgesti arusaadavalt kirja pandud mõttekäigud, kui need on ametlikult puhtandipaberilt viidatud). Töö mustandi arvestamine või mittearvestamine ülesande lahenduse hulka on hindaja otsustada (või piirkonna hindamiskomisjoni ühine otsus kõigi ülesannete suhtes), kuid see peab toimuma kõigis töödes ühtmoodi.

2. Alljärgnevas on 7.–9. klassi olümpiaadi I osa (testi) ning kõikide ülejäänud ülesannete hindamisjuhised esitatud erinevalt.

Testi iga küsimuse jaoks on eraldi loetletud või kirjeldatud vastused, mille eest tuleks anda vastavalt kaks punkti või üks punkt (st vastavaid punkte ühe küsimuse piires *ei tule* liita). Testiülesannete lahendusi õpilased ei pea esitama, vaid kirjutavad ülesannete lehel vastavale punktiirile või ülesande tekstis viidatud kohta ainult vastuse.

Seevastu kõigi teiste ülesannete kohta tuleb esitada täielikud lahendused, ainult vastustest ei piisa. Nende ülesannete lahendused on hindamisjuhistes jaotatud võimalust mööda osadeks (etappideks) ning näidatud lahenduse iga osa eest antav punktide arv (st ühe ülesande eest antava punktisumma saamiseks *tuleb* lahenduse erinevate osade eest antud punktid liita).

3. Žürii lahendustes ja käesolevates hindamisjuhistes on ülesannete arvulised vastused esitatud enamasti ainult ühel, lihtsaimal või kõige tõenäolisemalt esineval kujul. Hindamisel (sh testid!) tuleb võrdselt õigeks lugeda ka sama vastuse teised mõistlikud esitusviisid – sh taandatud hariliku murruna, segaarvuna, kümnendmurruna, sõnadega välja kirjutatuna –, seejuures ka osana pikemalt (nt täislausega, koos sobiva liigisõnaga või koos selgitustega) antud vastusest. Juhud, kus ülesande sisu tingib erandeid sellest üldreeglist, on eraldi mainitud vastava ülesande hindamisjuhises.

Ühik arvu järel on vastuses vajalik juhul, kui ülesandes on küsitud suurust, mis teatud ühikutes avaldub. Näiteks küsimusele „Kui suur pindala …?“ saab õige vastus olla „120 cm^2“, kuid mitte „120“ (kui ülesande tekstis pole kasutatud ühikuta pikkusi/pindalasid). Seejuures on vastused „120 cm^2“ ja „1,2 dm^2“ samaväärsed. Ühik vastuses ei ole nõutav, kui ülesandes on küsitud kindlate ühikute arvu. Näiteks küsimusele „Mitu ruutsentimeetrit …?“ antud vastused „120“ ja „120 cm^2“ tuleb võrdväärseks lugeda samal alusel nagu küsimusele „Mitu karu …?“ antud vastused „3“ ja „3 karu“ (vastus koos liigisõnaga). Niisuguse küsimuse vastuseks on arv ning ühikul või liigisõnal on vaid puhtkeeleline roll. Küsimusele „Mitu ruutsentimeetrit …?“ antud vastused „120 cm^2“ ja „1,2 dm^2“ ei ole samaväärsed.

4. Mõnede ülesannete kohta, mida saab lahendada mitmel oluliselt erineval viisil, anname eraldi hindamisskeemid erinevate lahendusviiside jaoks. Rõhutame, et iga konkreetset mittetäielikku lahendust tuleb hinnata ainult *ühe* sellise skeemi järgi (selle järgi, mille kohaselt ta saaks kõige rohkem punkte).

5. Enamiku ülesannete korral (v.a testid ja tõestusülesanded) on hindamisjuhiste lõpus eraldi näidatud, mitu punkti anda ainult õige vastuse eest. See hinne on mõeldud juhuks, kui puhtandis on antud ainult ülesande vastus ning mustand selle ülesande kohta puudub või on selle ülesande hindaja otsustanud mustandit mitte arvestada.

6. Kahtlemata esineb õpilaste töödes ka mõttekäike, mis ei mahu meie poolt pakutud skeemidesse. Selliste lahenduste hindamisel tuleb lähtuda sellest, *kui suur osa* antud ülesandest on õpilasel lahendatud, kasutades lahenduse üksikute osade kaalu määramisel võimaluse korral võrdluseks punktide jaotust meie pakutud hindamisskeemides.

7. *Mis tahes* täieliku ja matemaatiliselt korrektse lahenduse eest tuleb igal juhul anda maksimumpunktid, sõltumata selle lahenduse pikkusest või otstarbekusest võrreldes teiste lahendusviisidega.

I osa hindamisjuhised

1.
- Lahtritesse on kirjutatud õiged arvud 17, 20 ja 5 sellises järjekorras: 2 p
- Kahte lahtrisse on kirjutatud õiged arvud: 1 p

2.
- Antud õige vastus 3016: 2 p

3.
- Antud õige vastus 199: 2 p

4.
- Antud õige vastus 36: 2 p

5.
- Antud õige vastus 87,5 (protsendimärgiga või ilma): 2 p
- Antud vastuseks $\frac{7}{8}$: 1 p

6.
- Antud õige vastus 19:59: 2 p
- Antud vastuseks numbrite summa 24: 1 p

7.
- Antud vastuseks õiged punktid $(-2;-3)$, $(2;-3)$, $(2;3)$: 2 p
- Antud vastuseks õiged punktid ja lisaks ka ülesandes mainitud punkt $(-2;3)$: 2 p
- Antud vastuseks kaks õiget punkti ja mitte ühtegi valet või kolm õiget punkti ja üks vale punkt (mõlemal juhul ülesande punkti $(-2;3)$ arvestamata): 1 p
- Antud vastuseks vähem kui kaks õiget punkti või rohkem kui üks vale punkt (punkti $(-2;3)$ arvestamata): 0 p

8.
- Antud õige vastus 75°: 2 p
- Antud vastuseks arv 75 ilma kraadimärgita: 1 p

9.
- Antud õige vastus $\frac{3\pi}{8}$ cm^2: 2 p
- Antud vastuseks $\frac{3\pi}{8}$ ilma ühikuta või vale ühikuga: 1 p
- Antud vastuseks 1,18 cm^2, 1,18 või täpsem ligikaudne väärtus õige ühikuga või ilma ühikuta: 1 p

10.
- Märgitud õiged arvud 1, 2, 3, 4: 2 p
- Märgitud ainult kolm õiget arvu: 1 p
- Märgitud kolm või kõik neli õiget arvu ja lisaks üks vale arv: 1 p

Eesti LV matemaatikaolümpiaad

2. veebruar 2008 | Piirkonnavoor | **8. klass**

I osa hindamisjuhised

1.
- Lahtritesse on kirjutatud õiged arvud $\frac{4}{9}$, $\frac{1}{3}$ ja $\frac{2}{3}$ sellises järjekorras: 2 p
- Kahte lahtrisse on kirjutatud õiged arvud: 1 p

2.
- Antud õige vastus 3018: 2 p

3.
- Antud õige vastus 23: 2 p

4.
- Antud õige vastus 34: 2 p

5.
- Antud õige vastus 7: 2 p

6.
- Antud õige vastus 5 mm (või 0,5 cm või sama väärtus mingites teistes ühikutes): 2 p
- Antud vastuseks 5 cm või 0,5 mm või sarnane (õigest 10 korda suurem või väiksem) väärtus mingites teistes ühikutes: 1 p
- Antud vastuseks arv ilma ühikuta: 0 p

7.
- Antud vastuseks õige punkt $(1;0)$: 2 p

8.
- Antud õige vastus $22{,}5^\circ$: 2 p
- Antud vastuseks arv 22,5 ilma kraadimärgita: 1 p

9.
- Antud õige vastus $\frac{2}{5}$ või 40%: 2 p

10.
- Märgitud õiged arvud 1, 2, 3: 2 p
- Märgitud ainult kaks õiget arvu: 1 p
- Märgitud kaks või kõik kolm õiget arvu ja lisaks üks vale arv: 1 p

Eesti LV matemaatikaolümpiaad

2. veebruar 2008 Piirkonnavoor **9. klass**

I osa hindamisjuhised

1.	◦ Antud õige vastus 2:	2 p
	◦ Antud vastuseks ainult õiged tegurid 1 ja 101:	1 p
	◦ Antud avaldise väärtus 101:	0 p
2.	◦ Antud õige vastus 8:	2 p
	◦ Antud vastuseks ainult arv $1250\ldots0$ või selle numbrite loetelu:	1 p
3.	◦ Antud õige vastus -4008:	2 p
4.	◦ Antud õige vastus 2:	2 p
5.	◦ Antud õige vastus 9:	2 p
6.	◦ Antud õige vastus 4π cm:	2 p
	◦ Antud vastuseks 4π ilma ühikuta või vale ühikuga:	1 p
	◦ Antud vastuseks 12,56 cm, 12,56 või täpsem ligikaudne väärtus õige ühikuga või ilma ühikuta:	1 p
7.	◦ Antud õige vastus 40°:	2 p
	◦ Antud vastuseks arv 40 ilma kraadimärgita:	1 p
8.	◦ Antud õige vastus 3:	2 p
9.	◦ Antud õige vastus 35 cm^2:	2 p
	◦ Antud vastuseks arv 35 ilma ühikuta või vale ühikuga:	1 p
10.	◦ Märgitud õiged arvud 1, 2, 3, 4, 5:	2 p
	◦ Märgitud ainult neli õiget arvu:	1 p
	◦ Märgitud neli või kõik viis õiget arvu ja lisaks üks vale arv:	1 p

II osa hindamisjuhised

1.
- Avaldatud eri liiki asjade esialgsed kaalud ühe muutuja kaudu: 1 p
- Avaldatud spordiasjade uus kaal sama muutuja kaudu: 2 p
- Leitud kogu koolikoti sisu uus kaal: 2 p
- Leitud kogu koolikoti sisu vana ja uue kaalu vahe: 1 p
- Leitud õige lõppvastus: 1 p

Ainult õige vastuse eest ilma selgitusteta anda 2 punkti.

2.
- Tähele pandud, et arvu viimane number peab olema paaris: 1 p
- Tähele pandud, et arvu esimene number peab olema paaris: 1 p
- Leitud iga esimese ja viimase numbri paari jaoks võimalik teine number, nii et arv jaguks 9-ga: 2 p
- Eraldatud juhud, kus arv jagub ka 4-ga: 2 p
- Kirja pandud õige lõppvastus: 1 p

Ainult täieliku õige vastuse eest (kõik 6 õiget arvu) ilma selgitusteta anda 3 punkti. Kui vastuseks on antud 5 õiget arvu või sellised 4 õiget arvu, mis ei ole saadavad üksteisest ümberpööramisel, anda 2 punkti. Kui vastuseks on 2 või 3 õiget arvu, mis ei ole saadavad üksteisest ümberpööramisel, anda 1 punkt.

3.
- Valitud sobiv nurk, mille kaudu teisi avaldada: 1 p
- Ära kasutatud kolmnurga ABC võrdhaarsus: 1 p
- Ära kasutatud kolmnurga BDE võrdhaarsus: 2 p
- Jõutud ühe muutujaga lineaarvõrrandini, millest saab leida ühe otsitava nurga: 2 p
- Leitud õige lõppvastus: 1 p

Kui lahenduses on jõutud *kahe muutujaga lineaarvõrrandisüsteemini*, mille lahend annaks vähemalt ühe otsitava nurga, kuid seda süsteemi ei ole lahendatud, anda kokku 4 punkti.

Ainult õige vastuse eest ilma selgitusteta anda 2 punkti.

II osa hindamisjuhised

1.
- Tehtud tähelepanek, et kokku sõidab sportlane 5 km tõusu ja 5 km langust: 2 p
- Leitud jalgrattasõiduks kokku kulunud aeg: 2 p
- Leitud jooksu kogupikkus: 2 p
- Leitud õige lõppvastus (jooksuringide arv): 1 p

Ainult õige vastuse eest ilma selgitusteta anda 2 punkti.

2.
- Esitatud kõik arvud ühe täisarvu kaudu: 1 p
- Tehtud vajalikud järeldused selle täisarvu jaguvuse kohta: 3 p
- Põhjendatud, et sobib vähim sellise omadusega positiivne arv: 2 p
- Antud õige arvuviisik: 1 p

Lahenduses võib olla arvud esitatud ühe arvu kaudu teistel viisidel kui žürii lahenduses, nt suurima arvu kaudu, keskmise arvu kaudu jne.

Ainult täieliku õige vastuse eest (viis õiget arvu) ilma selgitusteta anda 2 punkti.

Kui töös on ainult vastus ning selle viiest arvust mõned on valed, kuid arv, mille kaudu teised arvud esitati, on õige, siis anda 1 punkt.

3.
- Tähe pindala jaotatud ruudu diagonaalidega 4 võrdseks osaks: 1 p
- Järeldatud, et ühe tähest väljapoole jääva kolmnurga pindala on pool suurem a kolmnurga pindalast ehk $\frac{1}{8}$ ruudu pindalast: 2 p
- Järeldatud, et ringi raadius on $\frac{1}{4}$ ruudu küljepikkusest: 2 p
- Leitud õige lõppvastus (ringi ja ruudu pindalade suhe): 2 p

Ainult õige vastuse eest ilma selgitusteta anda 2 punkti.

Eesti LV matemaatikaolümpiaad

2. veebruar 2008 — Piirkonnavoor — **9. klass**

II osa hindamisjuhised

1.
- Pandud kirja sobiv(ad) võrrand(id), millest saab leida kõneminuti ja sõnumi hinna suhte: 2 p
- Leitud kõneminuti ja sõnumi hinna suhe (avaldatud üks neist teise kaudu): 1 p
- Kõnekaardil olev rahasumma avaldatud ühe muutuja (kõneminuti või sõnumi hinna) kaudu: 2 p
- 24 kõneminuti ja 24 sõnumi kogumaksumus avaldatud sama muutuja kaudu: 1 p
- Tehtud õige lõppjäreldus: 1 p

Ainult õige vastuse „ei“ eest ilma selgitusteta anda 0 punkti.

2. Vastavalt žürii lahendustele 1 ja 2 anname kaks hindamisskeemi.

Lahendus rööpkülikute abil.

- Näidatud, et $AEFG$ ja $BDEF$ on rööpkülikud: 3 p
- Näidatud, et need rööpkülikud on samade küljepikkustega: 2 p
- Järeldatud sellest ülesandes mainitud lõikude pikkuste võrdsus: 2 p

Kui on näidatud, et ainult üks nelinurkadest $AEFG$ ja $BDEF$ on rööpkülik, siis anda skeemi esimese rea eest 2 punkti.

Lahendus sarnaste kolmnurkade abil.

- Näidatud, et kolmnurgad ADE ja GBF on sarnased: 3 p
- Näidatud sobivate lõikude pikkuste võrdsus, millest tuleneb, et kolmnurgad ADE ja GBF on võrdsed: 2 p
- Järeldatud sellest ülesandes mainitud lõikude pikkuste võrdsus: 2 p

3.
- Esitatud idee värvida musti ruute järjest valgeks, liikudes paremalt vasakule ja alt üles: 2 p
- Esitatud sobiva protseduuri täpne kirjeldus koos piisavate põhjendustega, miks see toimib: 5 p

Ainult õige vastuse „jah“ eest ilma selgitusteta anda 0 punkti.

4. Järgnevatest hindamisskeemidest esimene vastab žürii lahendustele, järgmised aga õpilaste töödes eeldatavasti sagedamini esinevatele lahenduskäikudele.

Lahendus 11*-ga jaguvuse abil (žürii lahendus).*

- Esitatud ilus arv kujul (nt $11(a+b)$), millest on võimalik järeldada jaguvust 11^2-ga juhul, kui ilus arv on täisruut: 2 p
- Põhjendatud, et ilus arv, mis on täisruut, peab jaguma 11^2-ga: 3 p
- Põhjendatud, et ainus selline ilus arv on 121: 2 p

Lahendus täisruutude eraldamisega.

- Pandud tähele, et ilus arv kui kahe kahekohalise arvu summa ei ole väiksem kui 20 ega suurem kui 198: 1 p
- Leitud selles piirkonnas asuvad täisruudud (arvude 5 kuni 14 ruudud): 1 p
- Näidatud, et nende seas on 121 ilus arv: 2 p
- Põhjendatud, et ülejäänud vaadeldavad täisruudud ei ole ilusad: 3 p

Lahendus täieliku läbivaatamisega.

- Esitatud skeem, mis kirjeldab kõik ilusad arvud 22-st 198-ni: 5 p
- Leitud nende hulgast täisruudud: 2 p

Nimetatud skeem võib olla vormistatud näiteks 9×9 tabeli kujul, kus read vastavad arvu kümneliste numbrile ja veerud üheliste numbrile, või ka mõnede tähelepanekute abil lihtsamalt, näiteks kasutatud avaldise $\overline{ab} + \overline{ba}$ sümmeetrilisust.

Ainult õige vastuse 121 eest ilma selgitusteta anda 1 punkt. Kui lisaks on kontrollitud, et 121 on ilus arv, siis anda 2 punkti.

Hindamisjuhised

1. Seda ülesannet saab ilmselt lahendada paljudel eri viisidel. Esitame esmalt üldise hindamisskeemi ja seejärel selle täpsustused žürii lahenduste 1, 2 ja 3 jaoks.

Üldine hindamisskeem.

- Koostatud valguse osakaalu esitav avaldis, mis ei sisalda muutujaid või kust need lihtsustamisel välja taanduvad, või selline ühe muutujaga lineaarvõrrand, mille lahendiks on otsitav valguse osakaal: 5 p
- Lihtsustatud see avaldis (või lahendatud võrrand) ja leitud õige lõppvastus: 2 p

Lahendus lähtudes valguse ja pimeduse absoluuthulkadest.

- Koostatud võrrand, mis seob valguse ja pimeduse absoluuthulki: 2 p
- Avaldatud üks neist absoluuthulkadest teise kaudu: 1 p
- Koostatud avaldis, mis esitab valguse osakaalu: 2 p
- Lihtsustatud see avaldis ja leitud õige lõppvastus: 2 p

Lahendus lähtudes valguse ja pimeduse tegelikest osakaaludest.

- Võetud kasutusele valguse ja pimeduse osakaalud avaldatuna ühe muutuja kaudu (nt x ja $1-x$): 1 p
- Leitud valguse ja pimeduse koguhulkade avaldised juhul, kui valgust oleks 40% rohkem ja pimedust 30% rohkem: 2 p
- Koostatud võrrand, kust saab leida kasutatava muutuja väärtuse: 2 p
- Lahendatud see võrrand ja leitud õige lõppvastus: 2 p

Lahendus lähtudes valguse ja pimeduse osakaaludest juhul, kui valgust oleks 40% rohkem ja pimedust 30% rohkem.

- Esitatud avaldised valguse ja pimeduse hulkade jaoks juhul, kui valgust oleks 40% rohkem ja pimedust 30% rohkem, avaldatuna ühe muutuja kaudu (nt $\frac{2a}{3}$ ja $\frac{a}{3}$, või $2a$ ja a): 1 p
- Leitud avaldised valguse ja pimeduse tegelike hulkade jaoks: 2 p
- Koostatud avaldis, mis esitab valguse osakaalu: 2 p

- Lihtsustatud see avaldis ja leitud õige lõppvastus: 2 p

Ainult õige vastuse eest ilma selgitusteta anda 1 punkt.

2. Vastavalt žürii lahendustele 1 ja 2 anname kaks hindamisskeemi.

Lahendus võrrandite kordajaid siduva võrde abil.

- Koostatud võrre, mis seob antud võrrandite kordajaid: 2 p
- Selgitatud, miks selles võrdes nimetajad on nullist erinevad: 1 p
- Teisendatud saadud võrre ruutvõrrandiks a suhtes: 2 p
- Lahendatud see ruutvõrrand ja antud õige lõppvastus: 2 p

Lahendus võrrandite kombineerimise abil.

- Võrrandite kombineerimisel saadud lineaarvõrrand, kus x kordaja ei sisalda parameetrit a: 2 p
- Selle abil saadud ruutvõrrand a suhtes: 3 p
- Lahendatud see ruutvõrrand ja antud õige lõppvastus: 2 p

Ainult täieliku õige vastuse eest (mõlemad a väärtused) ilma selgitusteta anda 1 punkt, ühe õige a väärtuse eest anda 0 punkti.

3.
- Teisendatud võrrand võrde kujule, selle liidetavaid sobivalt ümber paigutades ja ühele nimetajale viies: 2 p
- Teisendatud saadud võrre ruutvõrrandiks x suhtes: 3 p
- Lahendatud see ruutvõrrand ja antud õige lõppvastus: 2 p

Ainult õige vastuse eest ilma selgitusteta anda 1 punkt.

4. Tipust A tõmmatud kõrguse, millest lähtub alljärgnev skeem, asemel võidakse ülesannet analoogiliselt lahendada ka tipust B tõmmatud kõrguse abil.

- Avaldatud $\tan\angle ACB$ sobivate lõikude pikkuste suhtena: 2 p
- Näidatud, et kolmnurgad ADB ja CDH on sarnased: 3 p
- Järeldatud sellest ülesandes nõutud võrdus: 2 p

5.
- Põhjendatud, et algarv 11 ei esitu kordarvude summana: 2 p
- Tõestatud, et iga 11-st suurem algarv p esitub kujul $p = 9+2k$, kus k on täisarv: 3 p
- Mainitud, et $k \geqslant 2$: 1 p
- Järeldatud, et esituses $p = 9 + 2k$ on mõlemad liidetavad kordarvud: 1 p

Ainult õige vastuse eest ilma selgitusteta anda 1 punkt.

6.
- Leitud sobiv strateegia Joosepi jaoks: 2 p
- Põhjendatud, miks see strateegia alati toimib: 5 p

Hindamisjuhised

1.
- Teisendatud võrrand murruta kujule: 1 p
- Teisendatud võrrand edasi ruutvõrrandiks $\sqrt{x}$ suhtes: 2 p
- Leitud selle ruutvõrrandi lahendid: 1 p
- Põhjendatud, miks üks lahenditest ei sobi: 2 p
- Teise lahendi abil leitud õige lõppvastus: 1 p

Ainult õige vastuse eest ilma selgitusteta anda 1 punkt. Kui vastus sisaldab ka võõrlahendist leitud x väärtust ja lahenduskäik puudub, siis anda 0 punkti.

2.
- Ülesande a) osa lahenduse eest: 3 p
- Ülesande b) osa lahenduse eest: 4 p

  Sealhulgas:
  - Leitud ümberringjoone keskpunkti koordinaadid: *2 p*
  - Leitud ümberringjoone raadius: *1 p*
  - Koostatud nende alusel ümberringjoone võrrand: *1 p*

Ainult täieliku õige vastuse eest (mõlema kaateti võrrandid ja ümberringjoone võrrand) ilma selgitusteta anda 1 punkt, mittetäieliku või osaliselt vale võrrandite komplekti eest ilma selgitusteta anda 0 punkti. Kui lisaks vastusele on tehtud joonis, kus on õigesti kujutatud kolmnurga ja ümberringjoone paiknemine, kuid puuduvad arvutused, siis anda 2 punkti.

3.
- Leitud ühe võrreldava pindala avaldis sobivalt valitud suuruse (nt ringi raadiuse) kaudu: 2 p
- Leitud teise võrreldava pindala avaldis sama suuruse kaudu: 2 p
- Tehtud võrdlus ja antud õige lõppvastus: 3 p

Võrreldavad pindalad võib siin valida mitmel viisil: ringi sisse ja sellest väljapoole jääv kolmnurga pindala, või emb-kumb neist ja kolmnurga kogupindala (nagu on tehtud žürii lahenduses).

Ainult õige vastuse eest (ringi sisse jääv pindala on suurem) ilma selgitusteta anda 0 punkti.

4.
- Vaadeldud suurimat Tambeti tegurit (žürii lahenduses s): 1 p
- Selgesti väljendatud, et $T \leqslant s$: 1 p

- Järeldatud, et $T(T+1) \leqslant s(s+1)$: 1 p
- Mainitud, et s ja $s+1$ on mõlemad n tegurid: 1 p
- Järeldatud, et $s(s+1)$ on n tegur: 2 p
- Kokkuvõttena saadud lõpptulemus $T(T+1) \leqslant n$: 1 p

5. Seda ülesannet saab lahendada paljudel eri viisidel. Esitame siin ainult väga üldise hindamisskeemi, mis peaks olema rakendatav kõigi lahenduste korral.

- Sobivalt ära kasutatud tingimus $a+b+c=0$: 2 p
- Tehtud ülejäänud vajalikud teisendused ja leitud õige lõppvastus: 5 p

Tingimuse $a+b+c=0$ ärakasutamine võib siin esineda otsesel kujul (nagu žürii lahenduses 2) või asenduste $c = -a-b$ vms. kaudu (nagu žürii lahendustes 1 ja 3). Samuti võib see toimuda lahenduse lõpus (nagu žürii lahendustes 1 ja 2) või alguses (nagu žürii lahenduses 3).

Ainult õige vastuse eest ilma selgitusteta anda 1 punkt.

6.
- Leitud sobiv värvimisstrateegia juhul, kui n on paaris ja musti ruute on algul paarisarv: 2 p
- Leitud sobiv värvimisstrateegia juhul, kui n on paaris ja musti ruute on algul paaritu arv: 2 p
- Näidatud, et paaritu n korral leidub alati algseis, mille korral kõigi ruutude valgeks värvimine ei ole võimalik: 3 p

Ainult õige vastuse (kõik paarisarvulised n) eest ilma selgitusteta anda 1 punkt.

Eesti LV matemaatikaolümpiaad

2. veebruar 2008 Piirkonnavoor **12. klass**

Hindamisjuhised

1.
- Leitud aritmeetilise jada neljas liige: 3 p
- Leitud geomeetrilise jada neljanda liikme võimalikud väärtused: 4 p

Kui geomeetrilise jada neljanda liikme kahest võimalikust väärtusest on leitud ainult üks, anda selle osa eest 2 punkti.

Ainult täieliku õige vastuse eest (aritmeetilise jada neljas liige ja geomeetrilise jada neljanda liikme mõlemad võimalikud väärtused) ilma selgitusteta anda 1 punkt, kahe õige väärtuse eest või mõne vale väärtuse esinemisel anda 0 punkti.

2. Vastavalt žürii lahendustele 1, 2 ja 3 anname kolm hindamisskeemi.

Lahendus tuletise nullkoha leidmise abil.

- Näidatud, et $c = 1$: 1 p
- Leitud tuletise $f'(x)$ nullkoht $-\dfrac{d}{2}$: 2 p
- Saadud õige ruutvõrrand d suhtes: 2 p
- Lahendatud see ruutvõrrand ja antud õige lõppvastus: 2 p

Lahendus võrrandite kombineerimise abil.

- Näidatud, et $c = 1$: 1 p
- Kirja pandud õige võrrandisüsteem d leidmiseks: 2 p
- Võrrandite kombineerimisel saadud võrrand $dx + 2d = 0$ (kus x on f ja f' ühine nullkoht) või sellega samaväärne: 2 p
- Lahendatud see võrrand ja antud õige lõppvastus: 2 p

Lahendus ruutfunktsiooni graafiku omaduste abil.

- Näidatud, et $c = 1$: 1 p
- Ruutfunktsiooni graafiku omadustest lähtudes näidatud, et $f(x) = (x - a)^2$, kus a on f ja f' ühine nullkoht: 2 p
- Jõutud võrranditeni $-2a = d$ ja $a^2 = d$: 2 p
- Süsteem lahendatud ja antud õige lõppvastus: 2 p

Ainult õige vastuse eest ilma selgitusteta anda 1 punkt.

3.
- Vaadeldud suurimat 2 astet, mis esineb tahvlile kirjutatavate arvude 1 kuni n hulgas: 1 p

- Leitud tahvlile jäävate arvude summa avaldis, kasutades seost $1 + \ldots + 2^k = 2^{k+1} - 1$: 2 p
- Avaldatud tahvlile jäävate arvude aritmeetiline keskmine: 1 p
- Tõestatud, et see aritmeetiline keskmine on väiksem kui 3: 3 p

Kui leitud aritmeetilise keskmise avaldist on sobivalt grupeeritud, (nt nii nagu žürii lahenduses näidatud), siis anda tõestuse osa eest (skeemi viimases reas) vähemalt 1 punkt.

Kui lisaks on näidatud, et $\frac{2^{k+1}}{n} \leqslant 2$, siis anda tõestuse osa eest vähemalt 2 punkti.

4.
- Tehtud sobiv kolmnurkade värvimine, mille alusel saab näidata, et rööpkülikute arv ei ületa $\left\lfloor \frac{n(n-1)}{4} \right\rfloor$: 2 p
- Leitud rööpkülikute arvu ülempiir $\left\lfloor \frac{n(n-1)}{4} \right\rfloor$: 2 p
- Näidatud, et $\left\lfloor \frac{n(n-1)}{4} \right\rfloor$ rööpkülikut saab alati paigutada: 3 p

Ainult õige vastuse eest ilma selgitusteta anda 1 punkt.

5. Vastavalt žürii lahendustele 1, 2 ja 3 anname siin kolm hindamisskeemi.

Lahendus mediaanide abil.
- Näidatud, et diagonaali jaotuspunktid S ja T on kolmnurkade ABC ja ADC mediaanide lõikepunktid: 5 p
- Järeldatud sellest tõestatav väide: 2 p

Lahendus kolmnurkade kesklõikude abil.
- Näidatud, et $ASCT$ on rööpkülik (kus S ja T on diagonaali jaotuspunktid): 2 p
- Näidatud, et ES on kolmnurga BCT kesklõik (kus E on kiire AS lõikepunkt küljega BC), või analoogiline väide kolmnurga DCS jaoks: 3 p
- Järeldatud sellest tõestatav väide: 2 p

Lahendus näidates, et külgede BC ja CD keskpunktid paiknevad vaadeldavatel kiirtel.
- Näidatud, et kolmnurgad ADS ja EBS on sarnased (kus E on külje BC keskpunkt ja S on tipule B lähem diagonaali jaotuspunkt), või analoogiline väide külje DC suhtes: 5 p
- Järeldatud sellest tõestatav väide: 2 p

Viimast tüüpi lahenduse juures tuleb eriti hoolikalt jälgida, et kolmnurkade sarnasuse näitamisel varjatult ei kasutataks tõestatavat väidet (tipu A, diagonaali kolmeks jaotava punkti ja rööpküliku vastaskülje keskpunkti paiknemist ühel sirgel). Kui seda on tehtud, siis sellise mittekehtivale eeldusele tugineva arutluse osa eest punkte mitte anda.

6. Vastavalt žürii lahendustele 1, 2 ja 3 anname ka siin kolm hindamisskeemi.

Lahendus jääkide tabeli abil.

- Pandud tähele, et ab peab 8-ga jagamisel andma jäägi 7 (või -1, kui vaadatakse ka negatiivseid jääke): 1 p
- Näidatud, et a ja b peavad olema mõlemad paaritud: 2 p
- Koostatud õige jääkide tabel: 2 p
- Näidatud sellele tabelile tuginedes, et mis tahes sobiva jääkide paari summa on 8 (või 0 või -8, kui vaadatakse ka negatiivseid jääke): 2 p

Kui a ja b paarsust ei ole uuritud ning selle asemel on vaadeldud tervet 8×8 jääkide tabelit, siis anda tabeli koostamise osa eest 4 punkti.

Lahendus korrutiste $(a+1)(b+1)$ *ja* $(a-1)(b-1)$ *abil.*

- Näidatud, et a ja b peavad olema mõlemad paaritud: 2 p
- Vaadeldud korrutisi $(a+1)(b+1)$ ja $(a-1)(b-1)$: 2 p
- Näidatud, et üks arvudest $(a+1)(b+1)$ ja $(a-1)(b-1)$ peab jaguma 8-ga: 2 p
- Järeldatud sellest tõestatav väide: 1 p

Lahendus kongruentside abil.

- Tähele pandud, et $a^2 \equiv 1 \pmod 8$ mis tahes paaritu a korral: 2 p
- Tõestatud võrrandi $ax \equiv -1 \pmod 8$ lahendi ühesusele tuginedes, et peab olema $b \equiv -a \pmod 8$: 4 p
- Järeldatud sellest tõestatav väide: 1 p

Kokkuvõtteks

Selleaastast komplekti võib paremini õnnestunuks lugeda kui paari viimase aasta omi.

Lõppvooru pääsemise piirid protsentides maksimaalsest võimalikust punktisummast olid läbi klasside võrdlemisi ühesugused ja mitte liiga madalad ega kõrged. Natuke võib nuriseda 11. klassi puhul, sest maksimumilähedast punktisummat ei saanud keegi.

Suuremaid vigu ülesannete tekstides nähtavasti ei olnud. Siiski, 8. klassi II osa 2. ülesandes oli progressioon ebakorrektselt kirjeldatud: kuna esimesel arvul eelmist ei ole, oleks pidanud tekstis esinema täpsustus “alates teisest”. 11. klassi 3. ülesande hindamisskeemis oli õige vastus antud valesti (vastupidine tegelikule); lahenduse juures oli vastus õige. Tuleb tunnistada, et tegijal juhtub, ja loota, et parandajaid see apsakas väga segadusse ei viinud.

Nagu eelmistel aastatel, vaatas žürii ka nüüd mõnedes klassides piirkondadest saadetud töödest läbi ainult niipalju ülesandeid, kui oli vaja huvipäevale ja lõppvooru kutsutavate õiglaseks määramiseks. See tähendab, et kõikide huvipäevale ja lõppvooru kutsutavate õpilaste töödes vaadati läbi kõik ülesanded ning ükski õpilane, kelle töös mõned ülesanded jäid läbi vaatamata, ei tõuseks kutsutavate hulka ka siis, kui talle kõikide nende ülesannete eest antaks maksimaalsed punktid.

Läbi vaatamata jäänud ülesanded on tabelites eristatud halli (veebiversioonis oranži) taustavärviga. 9., 11. ja 12. klassi tööde kontrollijad vaatasid läbi kõikides töödes kõik ülesanded.

Kontrollijate kommentaarid (Elts Abel, Mart Abel)

Üldised märkused

Tänud piirkonnaolümpiaadi korraldajatele hea töö eest.

Tähelepanekud on tehtud žüriile saadetud 91 töö põhjal. Läbi vaadati kõikides töödes test ning ülesanded 2 ja 3. Esimene ülesanne vaadati läbi 34 parimas töös. Vastav märge on tehtud ka tööle. Tööle on püütud lisada ka selgitused, kui tuli punkte ümber hinnata/ühtlustada kas hindamisjuhiste erineva tõlgitsuse või märkamata jäänud õige lahenduse osa või vea tõttu. Ikka on endine meie palve tööde parandajatele piirkondades: märkige vigane koht ja lisage võimalusel ka väike selgitus õpilase lahendusele.

Test

Testis eraldusid mõned ülesanded, mis osutusid raskemaks ja ilmnesid ka mõned tüüpvead.

Ül. 1. Hästi lahendatud. Mõnes töös oli eksitud esimese arvu 17 leidmisel, saades selle asemele 23.

Ül. 2. Hästi lahendatud. Esines (ilmselt liitmisviga) arv 2016 õige arvu 3016 asemel.

Ül. 3. Hästi lahendatud.

Ül. 4. See loendamisülesanne valmistas raskusi. Soovitame õpilastel uurida selle lahendust.

Ül. 5. Ülesanne nõudis teksti tähelepanelikku lugemist. Andmed esitati kahe aasta kohta, milles on kokku 24 kuud. Mitmed lahendajad aga arvestasid ilmselt vaid ühe aastaga ja said vastuseks 75%.

Ül. 6. Kui esines vale vastus, siis ikka 23:59. Sekundite osas eksimusi peaaegu polnud. Huvitav oleks teada, milline mõttekäik viis sellise vastuseni.

Ül. 7. Punktide koordinaate leiti küllaltki hästi. Osad lahendajaist aga ei ümbritsenud arvudepaare sulgudega. Mõned piirkonnad hindasid seda vastust 1 punktiga, mõned 2 punktiga (hindamisjuhistes polnud seda võimalust koostajad ette näinud). Ühtlustamisena (kooskõlas analoogilise probleemiga ka 8. kl testis) otsustasime sulgude puudumisel hinnata vastust 1 punktiga.

Ül. 8. Hästi lahendatud ülesanne.

Ül. 9. Ülesanne, milles oli kõige rohkem eksimusi (mõned ka parandajatepoolsed tähelepanematused täpsuse ja ühiku olemasolu suhtes).

Ül. 10. Keskmiselt lahendatud ülesanne. Mõned eksimused olid ka vastuste hindamisel.

Ülesanne 1

Seda ülesannet kõikides töödes üle ei vaadatud. Protokolli järgi otsustades (ja koostajate arvates) oli see kolmest ülesandest lihtsaim. Vaadatud tööde põhjal võib konstateerida, et õige vastuseni jõutakse erinevaid teid pidi. Õpilased armastavad endiselt manipuleerida protsentidega, kuid lubatavad tehted ei ole alati päris korrektselt vormistatud. Soovitame selles osas veel tööd teha ja õppida.

Ülesanne 2

Ülesanne kuulub arvuteooria valdkonda. Seda võib lahendada kümmekonna erineva meetodiga. Kuna hindamisjuhistes oli antud ainult üks võimalustest, siis teiste lahenduste hindamisel tuli meil ühtlustada erinevates piirkondades välja töötatud kriteeriume.

Ülesande lahenduse võis lugeda täielikuks, kui oli selgitatud, kuidas on leitud nõutud omadustega arvud. Saadud arvude sobivuse kontroll ei ole veel lahendus. Lahendus peab selgitama, kuidas saadud arvud leiti.

Ühtlustamisel lähtuti allpool antud meetodite korral järgmisest üldisest skeemist.

- Saadud on 6 õiget arvu (koos kontrolliga või ilma): 3 p
- Lisatud valitud lahendusmeetodi jaoks olulised tähelepanekud nende arvude lisaomaduste kohta (algavad ja lõpevad paarisarvuga, jaguvad arvuga 36, arvu viimasest kahest numbrist koostatud arv jagub 4-ga jne): 2 p
- Lahenduses sisaldub osa, mis näitab, et on välja eraldatud kõik vaadeldava lisaomadusega arvud: 1 p
- Selgitatakse, kuidas eraldatakse nende lisaomadustega arvude seast välja vajalikud 6 arvu: 1 p

Lahendusvõte 1

1. Jaguvusest arvudega 4 ja 9 järeldub jaguvus arvuga 36.
2. Leitakse kõik kolmekohalised arvud, mis on arvu 36 kordsed (neid on 25).
3. Vaadeldakse ümberpööratud arve ja otsitakse välja need (nõutud 6 arvu), mis samuti jaguvad 36-ga.

Lahendusvõte 2

Eelmises võttes saadud 25 arvuni jõuti ka teisiti. Tuginedes 4-ga jaguvuse tunnusele, pandi kirja kõik kahekohalised arvud, mis jaguvad 4-ga ja lisati nende ette sajaline nii, et numbrite ristsumma jaguks 9-ga.

Lahendusvõte 3

1. Leitakse kõik arvukolmikud, mille ristsumma on kas 9, 18 või 27 (neid samuti 25).
2. Moodustatakse neist arvukolmikuist kõikvõimalikud 4-ga jaguvad arvud.
3. Otsitakse välja kõik arvud, mis ka ümberpööramisel jaguvad nii 9-ga kui ka 4-ga.

Ülesanne 3

Geomeetriaülesanne osutus kõige raskemaks, raskemaks kui koostajad olid prognoosinud. Läbivaadatud 91 töö seas oli kaks täislahendust ja kolm 4–6 punktilist lahendust. Enamik küll leidis kaks vajalikku võrdhaarset kolmnurka ja leidis ka teatud nurkade suurusi (1–3 punkti), kuid ei taibanud avaldada ühe kolmnurga nurki mingi väljavalitud nurga kaudu, st koostada võrrandit. Ikka ja jälle esines lahendusi, kus andmeid (nurki) püüti jooniselt mõõta ja siis nende andmetega edasi lahendada. Joonis on geomeetriaülesandes ainult illustratsiooniks, kui ei ole teisiti öeldud.

Kontrollijate kommentaarid (Raili Vilt, Oleg Košik)

Üldised märkused

Vaadates tulemusi, osutus tänavune 8. klassi komplekt eelmiste aastatega võrreldes mõnevõrra raskemaks. Samas aitas see selgemini eristada paremaid õpilasi. Ka ei saa öelda, et komplekt oli liiga raske – head tööd (žüriile saadetud tööde alampiir oli 24 punkti) esinesid praktiliselt kõigis maakondades.

Test

Test oli lahendatud üldiselt hästi. Kergemateks osutusid ülesanded 1, 3 ja 7 ning raskeimateks 10, 4 ja 6.

Ül. 7. Ringjoone keskpunkti koordinaatide leidmisega tuli toime enamus õpilasi. Hindamisjuhendi järgi tuli 2 punkti anda õige vastuse eest ja eraldi märkust, millise vastuse eest anda 1 punkt, ei olnud. Kahjuks ei osanud ette näha, et õpilased kirjutavad punkti koordinaadid kujul $1;0$, õige $(1;0)$ asemel. Vastuse $1;0$ eest olid osad piirkonnad andnud 1 punkti. Lähtudes sellest ja et tõesti vaid korrektne vastus on väärt 2 punkti, hindasime saabunud töödes vastuse kujul $1;0$ ühe punkti vääriliseks.

Ülesanne 1

Üheks laialt levinud veaks oli see, et õpilased, lähtudes kiirusest tõusudel ja langustel, arvutasid keskmise kiiruse nende kiiruste aritmeetilise keskmisena. Selline lähenemine muidugi pole õige ja ei vasta tegelikkusele.

Samuti tegid õpilased tihti mingi oletuse tõusude ja languste kohta (näiteks et teel kodust staadionini on neid võrdselt) selle asemel, et ülesande tingimustest järeldada, et neid on kogu edasi-tagasi teekonna kohta ühepalju. Kahjuks ei suutnud tihti ka kontrollijad eristada töid, kus õpilased tegid tähelepaneku asemel vaid oletuse. Vastavalt hindamisjuhendile jäid sellised lahendused kahest punktist ilma.

Ülesanne 2

Väga tihti jätsid lahendajad analüüsimata, kas õige viisiku kõrval leidub ka mõni teine sobiv viisik. Selles ülesandes on see analüüs väga oluline, sest kui veel üks selline leiduks, võiks see sama hästi olla Pärdi kirjitatud viisikuks. Üsna tihti karistasid kohalikud kontrollijad muude võimaluste vaatamata jätmist liiga leebelt (või ei karistanud üldse) ja punkte tuli oluliselt maha võtta.

Esines ka žürii lahendusest erinevaid lahendusi. Võib näiteks tähele panna, et väikseim arv peab olema alati paaris, ning vaadata järjest läbi kõik paarisarvud alates kahest. Arvu 30 puhul aga selgub, et viimane arv tuleb juba suurem kui 150.

Ülesanne 3

Selles ülesandes märkisid küll mitmed lahendajad õigesti ära, et ringi raadius moodustab veerandi ruudu küljepikkusest, kuid jätsid selle väite põhjendamata või ei saanud põhjendamisega hakkama. Kuna see moodustab suurema osa ülesande lahendusest, võtsime mõne töö puhul punkte täiendavalt maha.

Mõnikord tuli aga punkte ka juurde anda, kui töös esinesid mõned kasulikud tähelepanekud, kuigi lahendus tervikuna polnud õige.

Kahjuks tuli mitmel korral kokku puutuda olukordadega, kus õpilased ei andnud ülesande küsimusele vormikohast vastust. Näiteks olid ringi ja ruudu pindalad leitud, kuid suhe välja arvutamata; või ringi ja ruudu pindalade suhte asemel anti vastuseks hoopis ruudu ja ringi pindalade suhe. Samuti nagu testiülesannete puhul ei ole korrektne kasutada vastuses π ligikaudset väärtust.

Kontrollijate kommentaarid (Indrek Zolk, Kalle Kaarli)

Test

Piirkondlikud parandajad on testi parandanud väga täpselt, kõrvalekaldumisi hindamisjuhendist oli ainult mõnel üksikul juhul. Mitmel lahendajal oli ülesandes 6 ja ka 9 probleemiks ühiku puudumine või vale ühik. Silmapaistvalt raskemaid või ka lihtsamaid ülesandeid ei olnud – iga ülesande jaoks leidus piisavalt töid, kus see oli õigesti lahendatud ning ka mitmeid töid, kus mitte.

Ülesanne 1

Ülesanne oli väga hästi lahendatud. Põhilised kaks põhjust, miks hindamise ühtlustamisel tuli punkte korrigeerida, olid järgmised.

- Olgu kaardil olev raha on K krooni, kõneminuti hind x ja sõnumi hind y krooni. Mitmed õpilased näitasid, et võrdus $24x + 24y = K$ ei kehti. Aga sellest ei piisa, sest sellest ei pruugi järelduda $24x + 24y > K$.

- Mõned õpilased võtsid ette konkreetsed kõneminuti ja sõnumi hinnad ning lahendasid ülesande nendest lähtuvalt. See tõepoolest ei kitsenda üldisust, aga siis tuleb kuidagi põhjendada, et tegelikult pole olulised konkreetsed hinnad, vaid ainult nende suhe.

Ülesanne 2

Ülesanne oli lihtne ja üldjuhul lahendati seda päris hästi. Tüüpvigu on raske välja tuua. Ka parandajatele märkimisväärseid etteheiteid ei ole.

Ülesanne 3

See ülesanne oli paljudele tuttav arvutimängu kujul. Kuid võib arvata, et ka need, kellele ülesanne uus oli, suures osas leidsid õige vastuse ja oleksid suutelised iga konkreetse värvikombinatsiooni korral jõudma nõutud tulemuseni. Kahjuks oli vähe neid, kes suutsid sihile viivat algoritmi piisava selgusega kirjeldada. Väga tihti räägiti liikumisest mööda ruudustikku ja mustade ruutude valgeks tegemisest ilma sõnagagi mainimata, mis siis tegelikult igal sammul teha tuleb ja miks järgnevad sammud ei muuda juba tehtut. Sellistel juhtudel tuli nii mõnigi kord teha asendus $7 \to 0$. See tähendab, selle ülesande parandamine jättis soovida.

Ülesanne 4

Ülesanne oli hästi lahendatud. Palju leidus nii lakoonilisi lahendusi kahekohalise arvu üldkuju kaudu, lahendusi, kus otsiti täisruutude seast ilusaid arve ning lahendusi, kus loetleti kõik ilusad arvud ja otsiti nende seast täisruute. Mitmed lahendajad olid kahe silma vahele jätnud pisiasja: näidanud küll ära, et ükski muu arv peale 121 ei saa olla korraga ilus ja täisruut, aga unustanud kontrollida (st tuua näide konkreetsest esitusest summana), et 121 on tõepoolest ilus arv.

Kontrollijate kommentaarid (Uve Nummert, Reimo Palm)

Ülesanne 1

Ülesanne oli lahendatud väga hästi. Esines nii võrrandisüsteemiga kui ühe võrrandiga lahendusi. Suuremad punktimuutused tekkisid sellest, et mitmel puhul oli parandaja lahendust vaadanud ja selle eest punkte antud ainult kuni esimese veani, kuigi see viga võis olla lahenduses ainuke.

Ülesanne 2

Lahendustes, kus leiti kummagi võrrandi lahendid ja võrdsustati need omavahel, või asendati esimese võrrandi lahend teise võrrandisse, oli probleemiks juhu $a = 1$ käsitlemine (ning samuti $a = -1$, kui lahenduses $a + 1$ jagajana esines).

Et nende väärtuste mittesobivust oli selgitatud väga erineva põhjalikkusega, siis ühtlustamisel said lõpuks selle eest hindamisjuhises ettenähtud punkti kõik need, kellel tingimus $a \neq 1$ (ja vajadusel ka $a \neq -1$) oli töös vähemalt mainitud. Tegelikult tulnuks siin siiski ka põhjendada, *miks* need a väärtused ei rahulda ülesanne tingimusi (nt sellepärast, et ühel võrranditest puudub siis lahend).

Tallinna piirkonnas oli see, kas nende juhtude mittepõhjendamise eest punkt maha võtta või mitte, millegipärast sõltuvusse seatud sellest, kas leitud vastuste $a = 0$ ja $a = 3$ sobivust on kontrollitud — kuigi see kontroll ei ütle midagi väärtuste $a = 1$ ja $a = -1$ mittesobivuse kohta.

Ülesanne 3

Siin said ühtlustamise käigus punkte juurde paljud, kellel antud võrrandi võrdekujule viimine oli mustandis tehtud. See oli olemas peaaegu kõigil, kes seda ülesannet üldse lahendada olid üritanud, kuid paljud ei olnud oluliselt kaugemale jõudmata arvanud, et see vääriks puhtandisse kirjapanemist.

Tagantjäreletarkusena oli võrdekujule teisendamise eest hindamisskeemis lubatud 2 punkti ka ilmselt liiga palju: järgmine samm, 3 punktiga hinnatud ruutvõrrandi kujule teisendamine, osutus lahendajatele juba oluliselt raskemaks. Samas aga ei paistnud lahendustest ka mingit muud mõistlikku vaheetappi, mille eest siin võinuks punkte anda, nii et võrdekujule teisendamise eest punktide mitteandmine tähendanuks, et selle ülesande eest oleks saadud ainult kas 0 või siis vähemalt 5 punkti.

Ülesanne 4

Neile, kes oskasid avaldada tangensi sobivate lõikude suhtena ning tähele panna vajalike kolmnurkade sarnasust, oli ülesanne lihtne. Paraku oli eeldatust rohkem neid, kellele need kaks asja raskusi valmistasid.

Päris mitmes töös väideti, et kuna tangens on täisnurkses kolmnurgas teravnurga vastas- ja lähiskaateti pikkuste suhe, siis peabki antud kolmnurk olema täisnurkne. Kohati oli selline jutt piirkondades ka 1 punkti vääriliseks loetud.

Hakkas silma, et väga vähesed õpilased järgivad tava, et sarnaste kolmnurkade vastavad tipud kirjutatakse samas järjekorras.

Ülesanne 5

Sageli jäeti põhjendamata, miks algarvu 11 ei saa esitada kahe kordarvu summana. See ei järeldu sellest, et arvu 13 ja kõik temast suuremad arvud saab sellisel viisil esitada. Selle põhjenduse puudumine maksis vastavalt hindamisskeemile 2 punkti.

Paljud kirjutasid, et algarv on alati paaritu.

Ülesanne 6

Mitmel puhul kirjeldati lihtsalt ühte konkreetset mängu käiku, ilma püüdmata formuleerida üldisemaid seaduspärasusi või strateegiaid. Sellisete lahenduste punktide arv ühtlustati 0 peale.

Paljud lahendajad ei arvestanud, et igal arvul on olemas tegur 1. Sellest tulenevalt püüti konstrueerida strateegiad, mille tulemusena ühele mängijatest jääb käigul olles algarv kive. Kui seejuures muu arutlus ei sõltunud oluliselt sellest, kas allesjäävate kivide arv on algarv või 1, siis võtsime selle eksiarvamuse eest 2 punkti maha.

Mitmes töös peeti arvu 1757 algarvuks.

Kontrollijate kommentaarid (Härmel Nestra, Toomas Krips)

Üldised märkused

Võrreldes paari eelmise aastaga on seekord 11. klassis lõppvooru pääsemise piir kõrgem. Samas oli maksimaalne teenitud punktisumma vaid 36 punkti. Lõppvooru pääsenud on tabelis seega üsna tihedalt üksteise kannul koos.

Niisuguses tulemuses mängis tõenäoliselt otsustavat rolli see, et 5. ülesanne osutus tavatult lihtsaks ja samal ajal 6. ja eriti 4. ülesanne olid rasked.

Ülesanne 1

Tegu oli üsnagi tüüpilise kooliülesandega. Enamikule õpilastele antud ülesanne raskusi ei valmistanud, samas väga paljud ei olnud tuttavad faktiga, et ruutjuur on mittenegatiivne. Lahenduse, kus võõrlahend oli kõrvaldamata ja lõppvastuses olid nii õige kui ka võõrlahend välja arvutatud, eest andsime 5 punkti (päris mitmes piirkonnas olid säärased tööd ka 4 punkti saanud, sest rangelt võttes polnud lõppvastus sellisel juhul õige). Lahendused, kus ruutvõrrand oli valesti lahendatud, ent ometi osati pärast võõrlahendit kõrvaldada, said 4 punkti.

Päris mitmed unustasid ka lõppvastuse kirja panna või läks meelest ära, et otsiti arvu x, mitte tema ruutjuurt. Säärased tööd kaotasid 1 punkti.

Ülesanne 2

Ülesanne oli keskmise raskusastmega, kuigi tegu oli üsna tüüpilise kooliülesandega.

Paljud leidsid ümberringjoone keskpunkti ja/või alusnurkade koordinaadid ilmselt jooniselt, st polnud näha, kuidas need leitud olid. Millegi jooniselt (või lihtsalt halva põhjendusega) leidmise eest võtsime 1 punkti maha. Õigete kaatetite pikkuste valemite eest ilma korraliku põhjenduseta sai 2 punkti. Mõned õpilased ei tundnud ümberringjoone võrrandit: mõni kirjutas vastuseks pindala valemi, mõni pani keskpunktiks täisnurga, mõni mediaanide keskpunkti.

Mainimist, et antud punkt asub tippudest sama kaugel või et täisnurkse kolmnurga ümberringjoone keskpunkt on hüpotenuusi keskpunkt (juhul, kui tipud olid teada) või et täisnurkses kolmnurgas toetub kõrgus ümberringjoone keskpunktile, lugesime piisavaks põhjenduseks ümberringjoone keskpunkti leidmisele.

Ülesanne 3

Selles ülesandes sai punkte muudetud paljudes töödes, kuid väikeses ulatuses, tüüpiliselt 2 punkti vähemaks. Põhjuseks oli see, et skeem jaotas punktid pindalade arvutamise ja hindamise vahel 4:3, kuid enamasti anti piirkondades hindamise 3 punkti kätte ka siis, kui peale pindalade oli õige ainult lõppvastus, hinnang oli saadud ei-tea-kust või ebakorrektsete põhjenduste kaudu.

Enamasti valmistaski õpilastele raskusi just hindamine, mille tagajärjena oli üllatavalt vähe täislahendusi. Tüüpviga oli see, et ümardamisel ei jälgitud, mida hinnati ülevalt ja mida alt, mis aga on võrratuse tõestamisel oluline. See, kui alla ümardamise järel saadud suurus on millestki väiksem, ei näita, et esialgne suurus ka oli sellest väiksem. Suurus, mis osutub väiksemaks, tuleb ümardada üles, ja suurus, mis osutub suuremaks, alla. Sellise vea korral on punktimuutuste kommentaaris kirjutatud „hindamine huupi“.

Meie andsime hindamise osa (korrektset viisi seda läbi viia vt žürii lahendusest) eest 1 punkti, kui seda oli korrektselt alustatud (mitte kohe huupi ümardama hakatud, vaid nt viidud võrreldavad suurused ühisele nimetajale), ja 2 punkti, kui oli mõni samm edasigi korrektselt tehtud ja suudetud anda võrreldavate suuruste lihtsam kuju.

Pindalade arvutamise osa punktide edasisel jagamisel oli hindamisskeem ebaõnnestunud, sest erinevate lahenduste puhul võis võrreldava kahe pindala arvutamine olla väga erineva töömahuga, kuid skeemis oli mõlema jaoks ette nähtud 2 punkti. Seepärast püüdsime osaliste/vigaste lahenduste puhul anda punkte nii, et iga olulise pindala (suur kolmnurk, sektor, väike kolmnurk) väljendamine samades ühikutes maksis 1 punkti ja muu abitegevus ka kokku 1 punkti.

Ootamatult osutus, et üsna mitmetele õpilastele valmistas raskusi ülesande püstitusest arusaamine, sest puutumise mõiste oli tundmatu. Ringjoont asetati kolmnurga suhtes ükskõik kuidas.

Ülesanne 4

Ülesanne oli raske, nagu žürii juba ette kartis. Pärast üleparandamist saadi selle ülesande eest maksimaalselt 6 punkti. Tegu oli ülesandega, kus enamasti oli juba piirkondades üsna hästi aru saadud, milline töö viib lahenduse poole ja milline mitte, ning väga suures ulatuses punkte muuta oli vaja vaid üksikutel kordadel.

Ülesande raskus seisnes nähtavasti selles, et sihile viiva lahendusidee peale oli raske tulla. Paljud püüdsid midagi välja võluda paarsuskaalutluste abil, lahutusega algteguriteks või kõigi tegurite arvu analüüsiga, kuid need siin abiks ei ole ja meilt sedasorti mõttekäigud punkte ei saanud. Samuti ei andnud me punkte erijuhtude vaatlemise eest.

Nii mõneski töös oli eeldatud, et kõik Tambeti tegurid on järjestikused arvud, ja põhjendatud seda kuidagi ebamääraselt maksimaalsuskaalutlustega või „halvima juhuga“. Selline argument oma ebamäärasuses pole veenev ja seega ka mitte punktivääriline. Osalisi punkte võisid need tööd saada, kui oli ka midagi konkreetselt kasulikku lahenduse suunas tehtud.

Mõni õpilane, kes leidis küll õige lahendusidee, ei suutnud seda veenvalt lahenduseks välja arendada, sest võttis suurima Tambeti teguri hinnangu umbropsu ja valesti.

Ülesanne 5

Ülesanne osutus väga lihtsaks, peaaegu kõik õpilased said maksimumpunktid. Erinevaid lahendusi oli palju. Lahendused, mis mingi lahenduse alguse ära tegid, ent kuhugi välja ei jõudnud, said 1 punkti, samuti sai 1 punkti lihtsalt vastuse kirja panemine kas ilma põhjenduseta või põhjendusega stiilis „proovime nende kolme arvuga järele“.

Ülesanne 6

Nagu diskreetse matemaatika ülesannetes ikka, muutusid üleparandamisega siin punktid palju ja suures ulatuses. Peamiselt oli tegu langetamisega.

Kuigi hindamisskeemi kahes esimeses punktis, mis kokku vastavad paaris n juhule ja maksid 4 punkti, on otsesõnu nõutud vaid õige strateegia leidmist, nõudsime meie siiski lisaks ka põhjendust, et see strateegia tõesti töötab.

Üks tüüpilisi eksimusi õpilaste poolt oli, et ka paaris n juhtu püüti lahendada paljalt paarsuskaalutlustele tuginedes. Kuid paarsuskaalutlused ei näita, et 0 musta ruutu on tõepoolest võimalik saavutada; selle näitamiseks on vaja leida võte mustade ruutude arvu vähendamiseks, mis töötab alati, kui musti ruute on. Selle õnge läksid ka piirkondade parandajad ja andsid ülemäära punkte.

Tundub, et žürii lahenduses toodud võte 2 käiguga mustade ruutude arvu 2 võrra vähendada ei olnud õpilaste seas kõige kasutatum. Rohkem rõhuti sellele, et valida vaheldumisi musti ja valgeid ruute (mis teeb küll sisuliselt sama välja). Kuigi mitte nii elegantne, on sellel lähenemisel mitu eelist. Esiteks, on lihtne näidata, et iga seis paaris n korral on saavutatav selle strateegiaga jooksvas protsessis, mis algab 0 valge ruuduga ja lõpeb 0 musta ruuduga, seega ei pea vaatama eraldi paaris ja paaritu valgete ruutude arvuga seise. Teiseks, on lihtne näidata, et vahelduva värvi strateegia ei kitsendagi üldisust, nii et ka paaritu n korral võib tegelikult piirduda selle strateegia uurimisega.

Kontrollijate kommentaarid (Hendrik Nigul, Aleksei Lissitsin)

Ülesanne 1

Üks lihtsaimatest ülesannetest komplektis. Rohkem kui kolm neljandikku osalejatest sai sellega hakkama.

Ülesanne 2

Selle ülesande raskusaste on võrreldav eelmise ülesande omaga.

Ülesanne 3

Levinud oli selle ülesande lahendamine rühmadeks jagamise ning iga rühma aritmeetilise keskmise arvutamise kaudu. Mõnedes piirkondades anti sellise lahenduse eest vähem punkte, kui polnud tõestatud, et kahe kolmest väiksema aritmeetilise keskmisega grupi ühendi keskmine on samuti väiksem kui kolm. Otsustasime, et taolises ülesandes seda loomulikku fakti tõestada ei ole vaja.

Üesanne 4

See ülesanne oli kahtlemata antud komplektis kõige raskem. Et küsitakse maksimaalset võimalikku kujundite arvu, peab lahendus koosnema kahest osast:

- Tõestusest, et $\left\lfloor \dfrac{n(n-1)}{4} \right\rfloor$ rööpkülikut saab alati paigutada.
- Tõestusest, et rohkem kujundeid ei mahu.

Tüüpiliselt üritati lahendus teha üheosalisena. Hakatakse paigutama kujundeid, pannes neid *võimalikult tihedalt*. Mõnikord õnnestus sel juhul näidata, et niipalju kujundeid tõesti mahub panna. Ent kindlasti jäi sellisel juhul puudu tõestus, et rohkem kujundeid mitte kuidagi ei mahu.

Üesanne 5

On vist väga haruldane, et geomeetriaülesande eest niipalju punkte saadakse. Tegemist oli ühe lihtsaima ülesandega komplektis. Lahendamiseks piisas sisuliselt teadmisest, et mediaanide lõikepunkt jaotab mediaani suhtes $1:2$. Siiski oli ka siin õpilasi, kes arutluskäigus ei lähtunud ülesandes antud tingimustest, vaid eeldasid varjatult tõestamist vajavat väidet.

Üesanne 6

See arvuteooria ülesanne oli väga paraja raskusastmega. Tüüpilises arutluskäigus märgati, et a ja b on mõlemad paaritud. Võtmekoht oli aga a ja b lahtikirjutamine kujul $2k+1$. Seejärel märgati, et vähemalt üks arvudest on kujul $a = 4m+1$, teine aga kujul $b = 2n+1$. Siis aga $a + b = (4m + 2n + 1) + 1 = (ab - 8mn) + 1$ ehk $a+b$ jagub kaheksaga.

Loomulikult esines ka teisi lahenduskäike, mis sarnanesid näidislahendustele.