Eesti LV matemaatikaolümpiaad

2. veebruar 2008 Piirkonnavoor **7. klass**

I osa vastused

1. 17, 20 ja 5

2. 3016

3. 199

4. 36

5. 87,5%

6. 19:59

7. $(-2;-3)$, $(2;-3)$ ja $(2;3)$

8. 75°

9. $\dfrac{3\pi}{8}$ cm^2

10. 1, 2, 3 ja 4

Lahendused

1. Kolmandas lahtris on arv $0-(-5)=5$, teises lahtris arv $5\cdot 4=20$ ning esimeses lahtris arv $20+(-3)=17$.

2. Arvu ja talle vastava arvu vahe on alati 1008. Arvule 2008 vastab seega arv $2008+1008=3016$.

3. Arv 81 jagub numbritest ainult 1, 3 ja 9-ga. Otsitav arv peab olema kolmekohaline ja tema esimene number saab olla ainult 1. Seega kaks viimast numbrit on 9 ja 9.

4. Kui kolmekohaline arv $\overline{1AB}$ ei sisalda numbrit 3 ega 7, siis A kohale sobib 8 numbrit ja B kohale samuti 8 numbrit. Seega niisuguseid arve on $8\cdot 8=64$. Ülejäänud arvud sisaldavad numbrit 3 või 7. Et arve kujul $\overline{1AB}$ on üldse 100 tükki, siis otsitavaid arve on $100-64=36$.

5. Kaks aastat koosneb 24 kuust, millest 21 on olnud normist soojemad. Nende kuude osakaal on seega $\dfrac{21}{24}=\dfrac{7}{8}=87{,}5\%$.

6. Tundide arvu numbrite summa on suurim, kui tundide arv on 19. Minutite arvu numbrite summa on suurim, kui minutite arv on 59.

7. Otsitavad punktid on parajasti punkti A kõikvõimalikud peegeldused koordinaattelgede suhtes. Ühte niisugust peegeldust kirjeldab punkti koordinaadi märgi muutmine vastupidiseks. Punktist $A(-2;3)$ saame seega punktid $(-2;-3)$, $(2;-3)$ ja $(2;3)$.

8. Kolmnurk ABC on võrdkülgne, seetõttu $\angle CAB = 60^\circ$ ja $|AC| = 1$. Kolmnurk ADC on võrdhaarne tipunurgaga 30°. Selle kolmnurga alusnurk on $\angle ADC = \dfrac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ$.

9. Sisemise ringi pindala on $\dfrac{\pi}{4}\ \mathrm{cm}^2$, värvitud on sellest kolmveerand ehk $\dfrac{3\pi}{16}\ \mathrm{cm}^2$. Välimise rõnga pindala on $\dfrac{\pi \cdot 2^2}{4}\ \mathrm{cm}^2 - \dfrac{\pi}{4}\ \mathrm{cm}^2 = \dfrac{3\pi}{4}\ \mathrm{cm}^2$, värvitud on sellest veerand ehk $\dfrac{3\pi}{16}\ \mathrm{cm}^2$. Üldse on värvitud $\dfrac{3\pi}{16}\ \mathrm{cm}^2 + \dfrac{3\pi}{16}\ \mathrm{cm}^2 = \dfrac{3\pi}{8}\ \mathrm{cm}^2$.

10. Püstprisma alusel võib olla 3, 2 või 1 erineva pikkusega serva. Püstprisma kõrgus võib aluse mõne serva pikkusega kokku langeda või olla neist kõigist erinev. Kolmnurksel püstprismal saab olla niisiis kas 4, 3, 2 või 1 erineva pikkusega serva.

I osa vastused

1. $\frac{4}{9}$, $\frac{1}{3}$ ja $\frac{2}{3}$

2. 3018

3. 23

4. 34

5. 7

6. 5 mm

7. $(1;0)$

8. $22{,}5°$

9. $\frac{2}{5}$

10. 1, 2 ja 3

Lahendused

1. Kolmandas lahtris on arv $1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$, teises lahtris arv $\frac{2}{3}\cdot 0{,}5=\frac{1}{3}$ ning esimeses lahtris arv $\frac{1}{3}:\frac{3}{4}=\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{3}=\frac{4}{9}$.

2. Arvu ja talle vastava arvu vahe on alati 1009. Arv, mis vastab arvule 2009, on seega $2009+1009=3018$.

3. Jagamisel 5-ga annavad jäägi 3 arvud 3, 8, 13, 18, 23, 28 jne. Nende hulgas esimene, mis jagamisel 7-ga annab jäägi 2, on arv 23.

4. Kui kahekohaline arv $\overline{AB}$ ei sisalda numbrit 1 ega numbrit 5, siis A kohale sobib 7 numbrit (arv ei saa alata nulliga) ning B kohale 8 numbrit. Seega niisuguseid arve on $7\cdot 8=56$. Ülejäänud arvud sisaldavad numbrit 1 või numbrit 5. Et kahekohalisi arve 10-st 99-ni on üldse 90, siis otsitavaid arve on $90-56=34$.

5. Võistkonna valimiseks tuleb 5 õpilasest 2 välja jätta. On 3 varianti, kus esimene omavahel konfliktis olevatest õpilastest ei kuulu võistkonda ja teine kuulub, samuti 3 varianti, kus teine nendest õpilastest ei kuulu võistkonda ja esimene kuulub, ning 1 variant, kus kumbki õpilane ei kuulu võistkonda. Kokku $3+3+1=7$.

6. 200 liitrit on $0{,}2\ \mathrm{m}^3$. Veekihi paksus on $\frac{0{,}2\ \mathrm{m}^3}{40\ \mathrm{m}^2}=0{,}005$ m ehk 5 mm.

7. Antud punktid määravad ristküliku, mille küljed on paralleelsed koordinaattelgedega. Ringjoone keskpunkti x-koordinaat on seega punktide A ja B x-koordinaatide keskmine ehk $\frac{-3+5}{2} = 1$, ringjoone keskpunkti y-koordinaat on punktide A ja D y-koordinaatide keskmine ehk $\frac{-3+3}{2} = 0$. Keskpunkt on niisiis $(1; 0)$.

8. Kolmnurk DAE on võrdhaarne alusnurgaga 75°, seega tema tipunurk on $180^\circ - 2 \cdot 75^\circ = 30^\circ$. Kolmnurk AEB on samuti võrdhaarne tipunurgaga $180^\circ - 75^\circ = 105^\circ$, seega tema alusnurk on $\frac{180^\circ - 105^\circ}{2} = 37{,}5^\circ$. Järelikult $\angle CAD = 90^\circ - 30^\circ - 37{,}5^\circ = 22{,}5^\circ$.

9. Kolmnurga BFC pindala on pool ristküliku $ABFE$ pindalast, viimane omakorda võrdub kolmnurga AED pindalaga. Kolmnurga AED pindala moodustab trapetsi pindalast $\frac{1}{0{,}5+1+1} = \frac{1}{2{,}5} = \frac{2}{5}$ ehk 40%.

10. Püströöptahuka alusel võib olla 2 või 1 erineva pikkusega serva, sest aluse vastasservad on võrdse pikkusega. Püströöptahuka kõrgus võib aluse mõne serva pikkusega kokku langeda või olla nendest erinev. Erineva pikkusega servi võib seega olla 3, 2 või 1.

I osa vastused

1. 2

2. 8

3. -4008

4. 2

5. 9

6. 4π cm

7. 40°

8. 3

9. 35 cm^2

10. 1, 2, 3, 4 ja 5

Lahendused

1. Et $\dfrac{2008^2-1907^2}{3915} = \dfrac{(2008-1907)(2008+1907)}{3915} = \dfrac{101\cdot 3915}{3915} = 101$ ja 101 on algarv, siis antud arv jagub kahe erineva positiivse täisarvuga: 1 ja 101.

2. Avaldise võime esitada kujul $2^{2008}\cdot 5^{2011} = 2^{2008}\cdot 5^{2008}\cdot 5^3 = 125000\ldots 00$, sest $2^{2008}\cdot 5^{2008} = 10^{2008} = 1000\ldots 00$. Arvu numbrite summa on niisiis $1+2+5+0+\ldots+0=8$.

3. Arvust 1000 arvuni -2008 jõudmiseks tuleb teha $1000-(-2008) = 3008$ sammu. Alumise rea arv väheneb iga sammuga 2 võrra. Seega 3008 sammu järel tekib arv $2008-2\cdot 3008 = 2008-6016 = -4008$.

4. Et 7 on algarv, siis arvu $5\cdot 6$ igale jagajale x vastab kaks arvu $5\cdot 6\cdot 7$ jagajat: x ja $7x$. Järelikult on teisel arvul jagajaid kaks korda rohkem kui esimesel.

5. Liidame võrduste $3x+2y=14$ ja $x+6y=22$ pooled, saame $4x+8y=36$. Jagame tulemuse pooled 4-ga, saame $x+2y=9$.

6. Kui r on ringi raadius, siis kehtib seos $\pi r^2 = 4\pi$ cm^2, millest $r=2$ cm. Kui h on kolmnurga kõrgus, siis kehtib seos $\dfrac{1}{2}\cdot r\cdot h = 4\pi$ cm^2, millest $h=4\pi$ cm.

7. Et kolmnurgad on võrdkülgsed, siis $\angle BPR = 180^\circ-75^\circ-60^\circ = 45^\circ$ ja $\angle PBC = 180^\circ-65^\circ-60^\circ = 55^\circ$. Kolmnurgast BPY leiame nüüd $\angle BYP = 180^\circ-55^\circ-45^\circ = 80^\circ$. Järelikult ka $\angle CYX = 80^\circ$. Et $\angle XCY = 60^\circ$, siis $\angle CXY = 180^\circ-80^\circ-60^\circ = 40^\circ$.

8. Keskmise rea kolm horisontaaljoont saab moodustada ainult kolme erineva templivajutusega. Pärast neid kolme vajutust on ka kõik ülejäänud jooned olemas.

9. Kolmnurga BCM pindala on $\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 3{,}5\ \mathrm{cm}^2 = \frac{35}{2}\ \mathrm{cm}^2$. Kolmnurga ABC pindala on kolmnurga BCM pindalast kaks korda suurem, sest tema alus AC on kaks korda pikem, kuid kõrgused on samad. Otsitav pindala on seega $35\ \mathrm{cm}^2$.

10. Püstprisma alusel võib olla 4, 3, 2 või 1 erineva pikkusega serva. Püstprisma kõrgus võib aluse mõne serva pikkusega kokku langeda või olla neist kõigist erinev. Nelinurksel püstprismal saab olla niisiis kas 5, 4, 3, 2 või 1 erineva pikkusega serva.

Eesti LV matemaatikaolümpiaad

2. veebruar 2008 Piirkonnavoor **7. klass**

II osa lahendused

1. *Vastus:* 34%.

Olgu a Juku koolikoti esialgne kaal. Siis spordiasjade kaal on $0{,}3a$, õppevahendite kaal $0{,}4a$ ja niisama asjade kaal $0{,}3a$. Pärast seda, kui Juku läks teise trenni, on tema spordiasjade kaal $1{,}2 \cdot 0{,}3a = 0{,}36a$. Peale spordiasjade jäid koolikotti veel niisama asjad kaaluga $0{,}3a$. Juku koolikoti kaal pärast teise trenni minekut oli seega $0{,}36a + 0{,}3a = 0{,}66a$. Esialgne kaal a vähenes $a - 0{,}66a = 0{,}34a$ võrra ehk 34%.

2. *Vastus:* 216, 252, 468, 612, 828 ja 864.

Olgu $\overline{ABC}$ sellise omadusega arv. Et see arv ja arv $\overline{CBA}$ jaguvad 4-ga, siis peavad mõlemad olema paarisarvud. Sellest järeldub, et A ja C on paarisnumbrid ehk 2, 4, 6 või 8. Peale selle, arvu $\overline{ABC}$ ristsumma peab jaguma 9-ga. Järgmises tabelis on iga A ja C korral näidatud sobiv number B. Paksu kirjaga on tähistatud need kombinatsioonid, mis annavad ülesande tingimustele vastava arvu.

	2	4	6	8
2	***5***	3	***1***	8
4	3	1	8	***6***
6	***1***	8	6	4
8	8	***6***	4	***2***

Otsitavad arvud on seega 252, 216, 468, 612, 864 ja 828.

3. *Vastus:* 52°, 52° ja 76°.

Lahendus 1. Olgu $\angle BAC = x$. Siis ka $\angle ABC = x$, sest $|AC| = |BC|$. Et kolmnurk BDE on võrdhaarne tipunurgaga x, siis tema alusnurk on $\angle BDE = \dfrac{180^\circ - x}{2} = 90^\circ - \dfrac{x}{2}$. Järelikult $\angle ADF = 180^\circ - \angle BDE = 90^\circ + \dfrac{x}{2}$. Tingimusest, et kolmnurga ADF sisenurkade summa on 180°, saame

$$x + 90^\circ + \frac{x}{2} + 12^\circ = 180^\circ$$

ehk $\dfrac{3x}{2} = 78^\circ$, millest $x = 52^\circ$. Kolmnurga ABC nurkade suurused on $\angle BAC = 52^\circ$, $\angle ABC = 52^\circ$ ja $\angle ACB = 180^\circ - 2 \cdot 52^\circ = 76^\circ$.

Lahendus 2. Olgu $\angle BAC = \angle ABC = x$. Et $\angle AFD = 12^\circ$, siis kolmnurga välisnurga omaduse põhjal $\angle FDB = x + 12^\circ$. Kolmnurga BDE nurgad on seega x, $x + 12^\circ$ ja $x + 12^\circ$. Järelikult

$$x + x + 12^\circ + x + 12^\circ = 180^\circ,$$

millest $3x = 156^\circ$ ja $x = 52^\circ$. Kolmnurgas ABC on seega $\angle BAC = = \angle ABC = 52^\circ$, millest leiame, et $\angle ACB = 76^\circ$.

II osa lahendused

1. *Vastus:* 15.

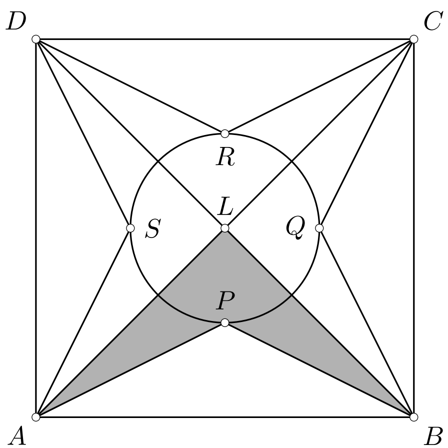
Läbides sama tee edasi-tagasi, sõidab sportlane tõusudel kokku 5 km ja langustel samuti 5 km, sest iga tõus on vastassuunas sõites langus ja vastupidi. Seega kulub tal jalgrattasõidule aega

$$\frac{5\text{ km}}{15\text{ km/h}} + \frac{5\text{ km}}{25\text{ km/h}} = \frac{1}{3}\text{ h} + \frac{1}{5}\text{ h} = \frac{8}{15}\text{ h} = 32\text{ min}.$$

Jooksmisele kulutab sportlane seega aega $32 + 4 = 36$ min $= 0{,}6$ h. Joostes keskmise kiirusega 10 km/h, läbib ta vahemaa $0{,}6 \cdot 10 = 6$ km. Staadioniringe kulub selleks $\dfrac{6}{0{,}4} = 15$.

2. *Vastus:* 16, 24, 36, 54 ja 81.

Olgu a esimene arv. Järgmised arvud on siis $\frac{3}{2}a$, $\frac{9}{4}a$, $\frac{27}{8}a$, $\frac{81}{16}a$. Et ka viimane arv oleks täisarv, peab a jaguma 16-ga. Kui a oleks 32 või suurem, siis oleks viimane arv vähemalt $2 \cdot 81 = 162 > 150$. Järelikult $a = 16$. Sel



Joonis 1

juhul on kõik arvud täisarvud: 16, $\frac{3}{2} \cdot 16 = 24$, $\frac{9}{4} \cdot 16 = 36$, $\frac{27}{8} \cdot 16 = 54$ ja $\frac{81}{16} \cdot 16 = 81$.

3. *Vastus:* $\frac{\pi}{16}$.

Jaotame ruudu diagonaalidega neljaks osaks ning olgu L kujundi keskpunkt (joonis 1). Et kolmnurga ALB pindala on veerand ruudu $ABCD$ pindalast ja nelinurga $ALBP$ pindala on veerand tähe $APBQCRDS$ pindalast, siis nelinurga $ALBP$ pindala on pool kolmnurga ALB pindalast. Seega ka kolmnurga APB pindala moodustab poole kolmnurga ALB pindalast. Et neil kolmnurkadel on ühine alus, siis moodustab kolmnurga APB kõrgus poole kolmnurga ALB kõrgusest. Järelikult on ringi raadius võrdne poolega ruudu poolest küljepikkusest. Seega kui ruudu küljepikkus on 1, siis ringi raadius on $\frac{1}{4}$ ning ringi pindala on $\pi \cdot \frac{1}{4^2}$. Ringi ja ruudu pindalade suhe on seega $\frac{\pi}{16}$.

II osa lahendused

1. *Vastus:* ei.

Olgu x kõneminuti hind ning y sõnumi hind. Ülesande tingimuste kohaselt $30x + 15y = 15x + 35y$. Siit $15x = 20y$ ehk $3x = 4y$. Kõnekaardil on seega raha

$$30x + 15y = 40y + 15y = 55y.$$

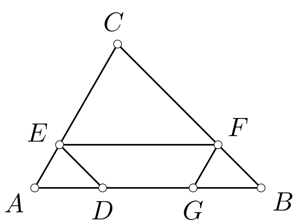
Teiselt poolt, 24 kõneminuti ja 24 sõnumi jaoks kulub raha

$$24x + 24y = 32y + 24y = 56y.$$

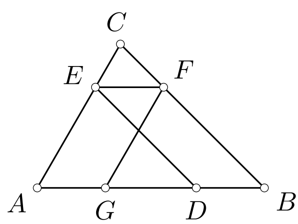
Järelikult ei piisa kõnekaardil olevast rahast niisuguseks kõneminutite ja sõnumite kombinatsiooniks.

2. *Lahendus 1.* Nelinurk $AEFG$ on rööpkülik, sest tema vastasküljed on paralleelsed (joonised 2 ja 3). Nelinurk $BDEF$ on rööpkülik samal põhjusel. Et nendel rööpkülikutel on külg EF ühine, siis on kummaski rööpkülikus selle külje vastasküljed AG ja BD ühepikkused. Lõigud AD ja BG on aga vastavalt lõikudest AG ja BD korraga kas lühemad või pikemad parajasti lõigu DG pikkuse võrra.

Lahendus 2. Kolmnurgad ADE ja GBF on sarnased, sest nende vastavad küljed on paralleelsed. Et sirge EF on paralleelne sirgega AB, on nende kolmnurkade vastavatest tippudest E ja F tõmmatud kõrgused võrdsed. See tähendab, et kolmnurgad ADE ja GBF on võrdsed. Järelikult on nende kolmnurkade vastavad küljed AD ja GB ühepikkused.



Joonis 2



Joonis 3

3. *Vastus:* jah.

Valime ruudustikus kõige parempoolsema veeru V, kus esineb vähemalt üks must ruut, ning selles veerus kõige alumise musta ruudu R. Rakendame ülesandes kirjeldatud ümbervärvimist selle ruuduga määratud ristkülikus. Sellega muutub ruut R valgeks ning temast paremal ja allpool asuvate ruutude värv jääb samaks. Selliste sammudega kõrvaldame veerust V kõik mustad ruudud. Seejärel leiame uue parempoolseima veeru, kus esineb musti ruute, ja kordame eelkirjeldatud operatsioone selle veeru jaoks. Nii jõuame lõpuks olukorrani, kus ruudustiku üheski veerus pole enam musti ruute.

4. *Vastus:* 121.

Olgu arv $n = \overline{ab} + \overline{ba}$ ilus. Siis

$$n = (10a + b) + (10b + a) = 11(a + b).$$

Järelikult n jagub 11-ga. Kui n on mingi täisarvu ruut, siis n jagub 11^2-ga, sest 11 on algarv. Seega $a + b$ jagub 11-ga. Et $0 < a + b \leqslant 18$, siis ainsaks võimaluseks on $a + b = 11$, millest $n = 11^2 = 121$. Arv 121 on tõepoolest ilus, sest valides näiteks $a = 2$, $b = 9$, saame $121 = 29 + 92$.

Eesti LV matemaatikaolümpiaad

2. veebruar 2008 Piirkonnavoor **10. klass**

Lahendused

1. *Vastus:* 65%.

Lahendus 1. Olgu x valguse ja y pimeduse hulk. Kui valgust oleks 40% rohkem ja pimedust 30% rohkem, siis oleks valguse hulk $1{,}4x$ ja pimeduse hulk $1{,}3y$. Ülesande tingimustest saame, et $1{,}4x = 2 \cdot 1{,}3y$, kust $y = \frac{7}{13}x$. Valguse osakaal on seega

$$\frac{x}{x+y} = \frac{x}{x + \frac{7}{13}x} = \frac{13}{20} \qquad \text{ehk} \qquad 65\%.$$

Lahendus 2. Olgu x valguse osakaal maailmas, pimeduse osakaal on siis $1 - x$. Kui pimedust oleks 30% rohkem ja valgust 40% rohkem, siis oleks valguse koguhulk (esialgse maailma ühikutes) $1{,}4x$ ja pimeduse koguhulk $1{,}3(1 - x)$. Ülesande tingimuste kohaselt kehtib $1{,}4x = 2 \cdot 1{,}3(1 - x)$. Siit $1{,}4x = 2{,}6 - 2{,}6x$ ehk $4x = 2{,}6$. Järelikult $x = \frac{2{,}6}{4} = 0{,}65$ ehk valguse osakaal on 65%.

Lahendus 3. Olgu a valguse ja pimeduse koguhulk juhul, kui pimedust oleks 30% rohkem ja valgust 40% rohkem. Siis oleks valguse hulk $\frac{2a}{3}$ ja pimeduse hulk $\frac{a}{3}$. Seega tegelikult on valgust $\frac{2a}{3 \cdot 1{,}4}$ ja pimedust $\frac{a}{3 \cdot 1{,}3}$. Valguse osa maailmas on

$$\frac{\frac{2a}{3 \cdot 1{,}4}}{\frac{2a}{3 \cdot 1{,}4} + \frac{a}{3 \cdot 1{,}3}} = \frac{2}{4{,}2\left(\frac{2}{4{,}2} + \frac{1}{3{,}9}\right)} = \frac{2}{2 + \frac{4{,}2}{3{,}9}} = \frac{2 \cdot 3{,}9}{2 \cdot 3{,}9 + 4{,}2} = \frac{7{,}8}{12} = 0{,}65.$$

2. *Vastus:* 0 ja 3.

Lahendus 1. Esimese võrrandi lahend on $x = \frac{1}{1-a}$, teise võrrandi lahend aga $x = \frac{1-a}{a+1}$. Mõlemad nimetajad on nullist erinevad, sest juhul $a = 1$ või $a = -1$ ühel võrranditest lahend puudub. Kui nüüd võrranditel on üks ja sama lahend, siis kehtib võrdus

$$\frac{1}{1-a} = \frac{1-a}{a+1}.$$

Saame võrrandi $(1-a)^2 = a+1$ ehk $a^2-2a+1 = a+1$, millest $a^2-3a = 0$. Selle ruutvõrrandi lahenditeks on $a = 0$ ja $a = 3$.

Lahendus 2. Kui x on mõlema võrrandi ühine lahend, siis peab ta rahuldama ka võrrandit, mille saame teise võrrandi pooltest esimese võrrandi vastavate poolte lahutamisel:

$$2x + a - 2 = 0.$$

Siit $x = \dfrac{2-a}{2}$. Asendades selle esimesse võrrandisse, saame

$$\frac{(a-1)(2-a)}{2} + 1 = 0$$

ehk $(a-1)(2-a) + 2 = 0$. Avades sulud ja koondades sarnased liikmed, tekib ruutvõrrand $a^2 - 3a = 0$, mille lahenditeks on $a = 0$ ja $a = 3$.

3. *Vastus:* $x = -a$ ja $x = -b$.

Kirjutame võrrandi kujul

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a+b+x} - \frac{1}{x}$$

Viime mõlemal poolel liikmed ühisele nimetajale:

$$\frac{a+b}{ab} = \frac{x-a-b-x}{(a+b+x)x}$$

Paremal poolel jääb pärast x-de koondamist lugejasse $-(a+b)$. Jagades seejärel võrrandi pooli nullist erineva suurusega $a+b$, saame

$$\frac{1}{ab} = -\frac{1}{(a+b+x)x},$$

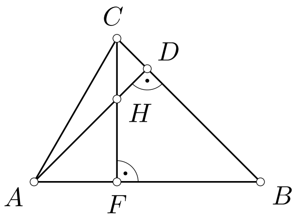
millest $ab = -(a+b+x)x$. Avades sulud ja viies liikmed vasakule, tekib ruutvõrrand $x^2 + (a+b)x + ab = 0$ ehk

$$(x+a)(x+b) = 0.$$

Siit $x = -a$ või $x = -b$. Lihtne on veenduda, et mõlemad sobivad esialgse võrrandi lahendiks.

4. Olgu D ja F vastavalt tippudest A ja C tõmmatud kõrguste aluspunktid (joonis 4). Siis $\tan\angle ACB = \dfrac{|AD|}{|DC|}$. Kolmnurk ADB on sarnane kolmnurgaga CFB, sest mõlemad on täisnurksed ja neil on üks teravnurk ühine. Samal põhjusel on kolmnurk CFB sarnane kolmnurgaga CDH. Kolmnurkade ADB ja CDH sarnasuse tõttu

$$\frac{|AD|}{|AB|} = \frac{|CD|}{|CH|},$$



Joonis 4

millest omakorda

$$\frac{|AB|}{|CH|} = \frac{|AD|}{|CD|} = \tan\angle ACB.$$

5. *Vastus:* 11.

Arvu 11 ei saa esitada kahe kordarvu summana, sest ainuke kordarv, mis on väiksem kui pool arvust 11, on 4, ent kui üks liidetav on 4, peab teine liidetav olema algarv 7.

Tõestame, et kõiki suuremaid algarve saab esitada kordarvude summana. Iga 11-st suurem algarv p on paaritu ja avaldub seetõttu kujul $p = 9 + 2k$, kus $k \geqslant 2$. Viimases esituses on mõlemad liidetavad kordarvud.

6. Kui Joosep võtab kuhjast ära ühe kivi, siis jääb järele paaritu arv kive. Et paaritu arvu tegurid on kõik paaritud arvud, siis peab Juula nüüd kuhjast võtma paaritu arvu kive, kuid ei tohi võtta kõiki. Sellega jääb Joosepile jälle paarisarv kive ja ta võib eelnevat korrata, võttes kuhjast uuesti ühe kivi. Mäng lõpeb hetkel, mil kuhja on alles jäänud üksainus kivi. Eelneva järgi võib selline olukord tekkida ainult Joosepi vastasel.

Lahendused

1. *Vastus:* $x = 3 + 2\sqrt{2}$.

Kirjutame võrrandi kujul $(\sqrt{x} - 1) \cdot \sqrt{x} = \sqrt{x} + 1$. Võttes $y = \sqrt{x}$, saame võrrandi $(y-1)y = y+1$ ehk $y^2 - 2y - 1 = 0$, mille lahendid on $y_1 = 1 + \sqrt{2}$ ja $y_2 = 1 - \sqrt{2}$. Lahend y_2 ei sobi, sest $y = \sqrt{x}$ peab olema mittenegatiivne. Järelikult $x = y_1^2 = 3 + 2\sqrt{2}$. See sobib esialgse võrrandi lahendiks, sest sel juhul $\sqrt{x} - 1 \neq 0$.

2. *Vastus:* a) $y = x + 1$ ja $y = -x + 3$; b) $(x-1)^2 + y^2 = 4$.

Lahendus 1. a) Selle kolmnurga kaatetid moodustavad hüpotenuusiga, st x-teljega nurga 45° ning peavad seega paiknema sirgetel $y = x + a$ ja $y = -x + b$, kus a ja b on mingid reaalarvud. Et tipp koordinaatidega $(1;2)$ paikneb mõlemal sirgel, saame $2 = 1 + a$ ja $2 = -1 + b$, kust $a = 1$ ja $b = 3$.

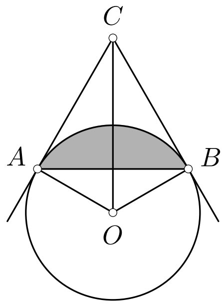
b) Täisnurkse võrdhaarse kolmnurga ümberringjoone keskpunkt asub hüpotenuusi keskpunktis ning langeb kokku täisnurga tipust hüpotenuusile tõmmatud kõrguse aluspunktiga. See kõrgus on risti hüpotenuusiga, st paralleelne y-teljega, tema üks otspunkt on $(1;2)$ ja teine otspunkt asub x-teljel. Kõrguse aluspunkti koordinaadid on järelikult $(1;0)$. Ümberringjoone raadius on kaugus keskpunkti $(1;0)$ ja kolmnurga tipu $(1;2)$ vahel, st 2. Seega ümberringjoone võrrand on $(x-1)^2 + y^2 = 4$.

Lahendus 2. b) Samamoodi nagu lahenduses 1 leiame, et ümberringjoone keskpunkti koordinaadid on $(1;0)$ ja raadius 2 ning ümberringjoone võrrand on $(x-1)^2 + y^2 = 4$.

a) Kolmnurga ülejäänud kaks tippu asuvad seega x-teljel, kaugusel 2 punktist $(1;0)$, st nende koordinaadid on $(-1;0)$ ja $(3;0)$. Üks kaatet paikneb punkte $(1;2)$ ja $(-1;0)$ läbival sirgel, mille võrrand on $\dfrac{x-(-1)}{1-(-1)} = \dfrac{y-0}{2-0}$ ehk $y = x + 1$, teine kaatet aga paikneb punkte $(1;2)$ ja $(3;0)$ läbival sirgel, mille võrrand on $\dfrac{x-3}{1-3} = \dfrac{y-0}{2-0}$ ehk $y = -x + 3$.

3. *Vastus:* vähem kui pool.

Olgu ülesandes antud ringjoone raadius 1 ning O ringjoone keskpunkt (joonis 5). Siis $\angle OAC = \angle OBC = 90^\circ$, millest $\angle AOB = 120^\circ$. Võrdkülgse kolmnurga ABC küljepikkuse leiame kolmnurga OAC abil: $|AC| =$



Joonis 5

$= |AO| \cdot \tan \angle AOC = 1 \cdot \tan 60^\circ = \sqrt{3}$. Seega kolmnurga ABC pindala on (võrdkülgse kolmnurga pindala valemi põhjal)

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\sqrt{3}\right)^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

Ringi sisse jääva kolmnurgaosa pindala S' arvutame ringi sektori AOB ja kolmnurga AOB pindalade vahena. Ringi sektori pindala on $\frac{\pi \cdot 1^2}{3} = \frac{\pi}{3}$, kolmnurga AOB pindala aga $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}$. Seega

$$S' = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Niisiis on vaja võrrelda suurusi S' ja $\frac{1}{2}S$ ehk $\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}$ ja $\frac{3\sqrt{3}}{8}$. Korrutades mõlemat suurust 24-ga, saame vastavalt $8\pi - 6\sqrt{3}$ ja $9\sqrt{3}$. Võrdleme suurusi 8π ja $15\sqrt{3}$. Et

$$8\pi < 8 \cdot 3{,}15 = 25{,}2 < 25{,}5 = 15 \cdot 1{,}7 < 15\sqrt{3},$$

siis $S' < \frac{1}{2}S$ ehk ringi sisse jääb vähem kui pool kolmnurga pindalast.

4. Olgu s arvu n suurim Tambeti tegur. Siis kõik Tambeti tegurid asuvad 1 ja s vahel, mistõttu $T \leqslant s$. Siis aga $T + 1 \leqslant s + 1$, millest

$$T(T+1) \leqslant s(s+1).$$

Et s ja $s+1$ on ühistegurita ning mõlemad on arvu n tegurid Tambeti teguri omaduse tõttu, siis on ka $s(s+1)$ arvu n tegur. Seega

$$s(s+1) \leqslant n.$$

Kokkuvõttes $T(T+1) \leqslant n$.

5. *Vastus:* -3.

Lahendus 1. Teisendame avaldist järgmiselt:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}=\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{a}{c}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{b}{a}\right)=$$
$$=\frac{a+c}{b}+\frac{b+a}{c}+\frac{c+b}{a}=\frac{-b}{b}+\frac{-c}{c}+\frac{-a}{a}=-3.$$

Lahendus 2. Viies kõik murrud ühisele nimetajale, saame

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}=\frac{a^2c+b^2c+b^2a+c^2a+c^2b+a^2b}{abc}=$$
$$=\frac{(a+b+c)(ab+bc+ca)-3abc}{abc}=\frac{-3abc}{abc}=-3.$$

Lahendus 3. Asendame antud murdudes $c=-a-b$, viime murrud ühisele nimetajale ning jagame lugejat ja nimetajat nullist erineva arvuga $a+b$:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{b}{-a-b}+\frac{-a-b}{b}+\frac{-a-b}{a}+\frac{a}{-a-b}=$$
$$=\frac{a^2(a+b)+b^2(a+b)-ab^2-a(a+b)^2-b(a+b)^2-a^2b}{ab(a+b)}=$$
$$=\frac{a^2+b^2-ab-(a+b)^2}{ab}=\frac{-3ab}{ab}=-3.$$

6. *Vastus:* kõik paaris naturaalarvud.

Kui n on paarisarv, siis juhul, kui musti ruute on esialgu paarisarv, saame nende arvu vähendada kahe võrra kahe ülesandes kirjeldatud värvimisega, valides sammu tegemiseks esimene kord mingi ühe ja teine kord teise musta ruudu. Valitud ruute värvitakse siis kokkuvõttes ümber üks kord (nende värv muutub seega mustast valgeks), kõiki ülejäänud ruute kaks korda (nende värv jääb samaks). Nii saame mustade ruutude koguarvu vähendada kahekaupa kuni nullini. Kui aga esialgu on musti ruute paaritu arv, siis on valgeid ruute samuti paaritu arv. Valime ühe musta ruudu ja rakendame selle puhul ülesandes kirjeldatud sammu. Valitud ruut jääb ikka mustaks, kuid ülejäänud mustad ruudud muutuvad valgeks ja valged ruudud mustaks. Seega tekib olukord, kus musti ruute on paarisarv ning edasi saame nende arvu muuta nulliks ülalkirjeldatud operatsioonidega.

Kui n on paaritu arv ning ka musti ruute on esialgu paaritu arv, siis valgeid ruute on paarisarv. Sõltumata sellest, kumba värvi ruudu me sammu tegemiseks valime, on ülejäänud ruutude hulgas mustade ja valgete ruutude arvu paarsus sama. See tähendab, et sammu tegemisel mustade ruutude arvu paarsus ei muutu ja jääb ikka paarituks. Et 0 on paarisarv, siis ei saa mustade ruutude arv kahaneda nulliks.

Lahendused

1. *Vastus:* a) 19; b) 64 või −125.

a) Olgu d aritmeetilise jada (a_n) vahe. Siis aritmeetilise jada kolme esimese liikme summa on

$$1 + (1 + d) + (1 + 2d) = 3 + 3d = 21,$$

kust $d = 6$ ja $a_4 = 1 + 3d = 19$.

b) Olgu q geomeetrilise jada (b_n) tegur. Geomeetrilise jada kolme esimese liikme summa on

$$1 + q + q^2 = 21,$$

kust saame ruutvõrrandi $q^2 + q - 20 = 0$ lahenditega $q_1 = 4$ ja $q_2 = -5$. Esimesel juhul $b_4 = 1 \cdot q_1^3 = 64$, teisel juhul $b_4 = 1 \cdot q_2^3 = -125$.

2. *Vastus:* $(1, 0)$ ja $(1, 4)$.

Lahendus 1. Funktsiooni $f(x) = cx^2 + dx + d$ tuletis on $f'(x) = 2cx + d$ ning teine tuletis on $f''(x) = 2c$. Et $f''(x) = 2$, siis $c = 1$. Esimese tuletise nullkoha leiame nüüd võrrandist $2x + d = 0$, seega $x = -\frac{d}{2}$. Et sama arv peab olema ka funktsiooni $f(x)$ nullkoht, siis

$$\frac{d^2}{4} - d \cdot \frac{d}{2} + d = 0$$

ehk $-d^2 + 4d = 0$, millest $d = 0$ või $d = 4$.

Lahendus 2. Kui arv x on funktsiooni $f(x) = cx^2 + dx + d$ ja tema tuletise $f'(x) = 2cx + d$ ühine nullkoht, siis rahuldab ta võrrandeid

$$cx^2 + dx + d = 0,$$
$$2cx + d = 0.$$

Korrutame esimest võrrandit 2-ga ja teist x-ga ning lahutame esimesest teise. Saame $dx + 2d = 0$. Siit $d = 0$ või $x = -2$. Teisel juhul leiame võrrandist $2cx + d = 0$, et $d = 4$. Kordaja c määrame samamoodi nagu lahenduses 1 teise tuletise abil, saades tulemuseks $c = 1$.

Lahendus 3. Nagu lahenduses 1 näitame, et $c = 1$. Edasi olgu a funktsioonide f ja f' ühine nullkoht. Siis f graafik puutub oma haripunktiga x-telge kohal a, mistõttu $f(x) = (x-a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$. Et samal ajal $f(x) = x^2 + dx + d$, siis $-2a = d$ ja $a^2 = d$. Seega $-2a = a^2$, kust $a = 0$ või $a = -2$. Vastavalt saame $d = 0$ või $d = 4$.

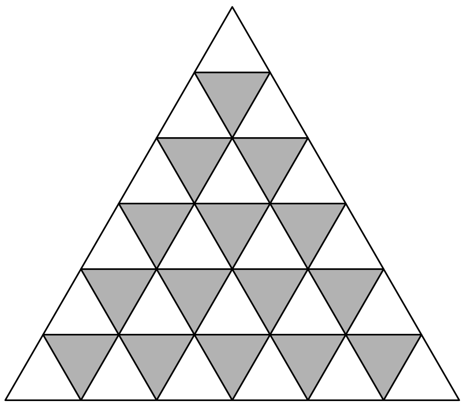
3. Olgu 2^k suurim 2 aste, mis pole suurem kui n. Pärast ülesandes kirjeldatud operatsioone on tahvlil arvud $2^0, 2^1, \ldots, 2^k$ ning lisaks $n-(k+1)$ ühte. Et geomeetrilise jada summa valemi põhjal $2^0 + 2^1 + \ldots + 2^k = 2^{k+1} - 1$, siis tahvlil olevate arvude aritmeetiline keskmine on

$$\frac{2^{k+1} - 1 + n - (k+1)}{n} = \frac{2^{k+1} + n - k - 2}{n} = \frac{2 \cdot 2^k}{n} + 1 - \frac{k+2}{n}.$$

Siin $\frac{2^k}{n} \leqslant 1$ ning $\frac{k+2}{n} > 0$, mistõttu vaadeldav aritmeetiline keskmine on väiksem kui $2+1$ ehk 3.

4. *Vastus:* suurim täisarv, mis ei ületa $\frac{n(n-1)}{4}$ (ehk $\left\lfloor \frac{n(n-1)}{4} \right\rfloor$).

Värvime kolmnurgad mustaks ja valgeks nii, nagu joonisel 6. Ridade kaupa lugedes saame mustade kolmnurkade arvuks $0 + 1 + 2 + \ldots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$. Iga rööpkülik katab alati täpselt kaks musta kolmnurka, seega ei saa kolmnurgale paigutada rohkem kui $\frac{n(n-1)}{4}$ rööpkülikut. Et rööpkülikute arv on täisarv, siis saab rööpkülikute arv olla ülimalt nii suur kui suurim täisarv, mis ei ületa arvu $\frac{n(n-1)}{4}$.



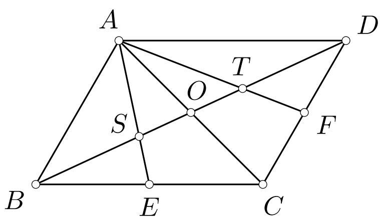
Joonis 6

Tõestame, et sellise arvu rööpkülikuid saab tõepoolest kolmnurgale paigutada. Täidame kõigepealt kolmnurga alumise rea, alates vasakust otsast, järjest rööpkülikutega. Kui sellega sai rea viimane must kolmnurk kaetud, siis võtame järgmise rea. Vastasel korral jääb mustast kolmnurgast paremale veel üks katmata valge kolmnurk. Katame need kaks kolmnurka rööpkülikuga ja jätkame kaetud reale vahetult eelnevas reas rööpkülikute paigutamist, liikudes nüüd paremalt vasakule. Liikudes nii igas reas suunda vahetades reakaupa ülespoole, katame iga rööpkülikuga kaks musta kolmnurka. Kui viimane must kolmnurk teises reas saab kaetud, siis on rööpkülikute arvu ülempiir saavutatud. Kui viimane must kolmnurk jääb katmata, siis on musti kolmnurki ühtekokku paaritu arv, seega on $\frac{n(n-1)}{4}$ murdarv ning me oleme ära paigutanud suurima seda arvu mitteületava täisarvu rööpkülikuid.

5. *Lahendus 1.* Olgu S ja T punktid diagonaalil BD, mille korral $|BS| = |ST| = |TD|$ ning lõigaku kiir AS külge BC punktis E ja kiir AT külge CD punktis F (joonis 7). Samuti olgu O rööpküliku diagonaalide lõikepunkt. Punkt O on mõlema diagonaali ning seega ka lõigu ST keskpunkt. Järelikult on lõik BO kolmnurga ABC mediaan ning võrduste $|BS| = |ST| = 2|SO|$ tõttu on S kolmnurga ABC mediaanide lõikepunkt. Seega on ka AE selle kolmnurga mediaan ning seega punkt E poolitab külje BC. Analoogiliselt tõestame, et F on lõigu CD keskpunkt.

Lahendus 2. Kasutame samu tähistusi nagu lahenduses 1. Nelinurk $ASCT$ on rööpkülik, sest tema diagonaalid AC ja ST poolitavad teineteist. Et S on lõigu BT keskpunkt ning ES ja CT on paralleelsed, siis ES on kolmnurga BCT kesklõik. Seega on E lõigu BC keskpunkt. Analoogiliselt tõestame, et F on lõigu CD keskpunkt.

Lahendus 3. Olgu jällegi tähistused samad nagu lahenduses 1, lisaks olgu E' ja F' vastavalt külgede BC ja CD keskpunktid. Kolmnurgad ADS ja $E'BS$ on sarnased, sest $|AD| = 2|BE'|$, $|DS| = 2|BS|$ ja $\angle ADS = \angle E'BS$. Seega $\angle ASD = \angle E'SB$, millest järeldub, et punktid A, S ja E' on ühel sirgel. Järelikult $E' = E$. Analoogiliselt $F' = F$.



Joonis 7

6. *Lahendus 1.* Kui $ab + 1$ jagub 8-ga, siis on ab paaritu. Järelikult on ka a ja b paaritud ning saavad 8-ga jagades anda jäägiks ainult 1, 3, 5 või 7. Arv $ab+1$ jagub 8-ga parajasti nende a ja b jäägikombinatsioonide korral, mil ab annab 8-ga jagades jäägiks 7. Arvutame korrutise jäägid tegurite jääkide kaudu:

	1	3	5	7
1	1	3	5	**7**
3	3	1	**7**	5
5	5	**7**	1	3
7	**7**	5	3	1

Jäägi 7 saame ainult siis, kui üks arvudest a ja b annab 8-ga jagades jäägi 1 ja teine 7, või siis, kui üks arvudest annab jäägi 3 ja teine 5. Mõlemal juhul annab $a + b$ aga 8-ga jagades jäägi 0 ehk $a + b$ jagub 8-ga.

Lahendus 2. Eeldame, et $ab+1$ jagub 8-ga. Siis peavad a ja b olema mõlemad paaritud. Esituses $ab + a + b + 1 = (a + 1)(b + 1)$ on mõlemad tegurid paarisarvud, samuti on esituses $ab - a - b + 1 = (a - 1)(b - 1)$ mõlemad tegurid paarisarvud. Et $a + 1$ ja $a - 1$ on kaks järjestikust paarisarvu, siis üks neist jagub 4-ga. Seega üks arvudest $ab + a + b + 1$ ja $ab - a - b + 1$ jagub 8-ga. Leides vastava arvu vahe arvuga $ab + 1$, saame, et ka arv $a + b$ jagub 8-ga.

Lahendus 3. Kasutame fakti, et iga paaritu arvu ruut annab 8-ga jagades jäägi 1. Siit saame, et iga paaritu a korral $a \cdot (-a) \equiv -1 \pmod 8$. Kui $ab+1$ jagub 8-ga, siis on a ja b paaritud ning $ab \equiv -1 \pmod 8$. Ent kongruentsil $ax \equiv -1 \pmod 8$ on paaritu a korral mooduli 8 järgi ainult üks lahend x. Seega $-a \equiv b \pmod 8$ ehk $a + b \equiv 0 \pmod 8$. See tähendabki, et $a + b$ jagub 8-ga.

Märkus. Ülesande väide kehtib ka sellisel kujul: kui $ab+1$ jagub 24-ga, siis ka $a + b$ jagub 24-ga. Võib tõestada, et arvu 24 ei saa siin enam asendada suurema arvuga.