LIV Олимпиада Эстонии по математике

10 февраля 2007 г. Региональный тур **10 класс**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

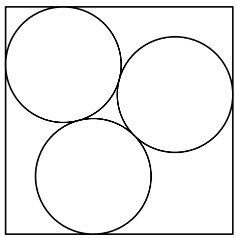
1. Найти значение выражения:

$$2007 \cdot 2008 \cdot 2009 + 2 \cdot 2006 \cdot 2007 \cdot 2008 - \\ - 2006 \cdot 2007^2 - 2007 \cdot 2008^2 - 2006 \cdot 2008 \cdot 2009.$$

2. Андрей решил вложить свои сбережения в акции АО Верная Прибыль. За первый год цена их акций и поднялась на 25%, но за второй год опустилась на 25%, а за третий год опустилась ещё на 20%. На сколько процентов должна подняться цена акций за четвёртый год, чтобы стоимость инвестиций Андрея была в конечном итоге на 5% выше, чем вначале?

3. Найти все четвёрки действительных чисел (a, b, c, d), где c и d — корни квадратного уравнения $x^2 + ax + b = 0$, а a и b — корни квадратного уравнения $x^2 + cx + d = 0$.

4. Внутри квадрата нарисованы три окружности с радиусом 1, которые касаются сторон квадрата и попарно друг друга, как показано на рисунке. Найти длину стороны квадрата.



5. Найти все положительные целые числа k, для которых найдутся такие положительные целые числа a и b, что

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = k.$$

6. В распоряжении транспортной фирмы имеется грузовик с грузоподъёмностью 3 тонны. Каково наименьшее число рейсов, за которое этот грузовик может перевезти любой 10-тонный груз, состоящий из пакетов массой, не превышающей 1 тонну?

LIV Олимпиада Эстонии по математике

10 февраля 2007 г. Региональный тур **11 класс**

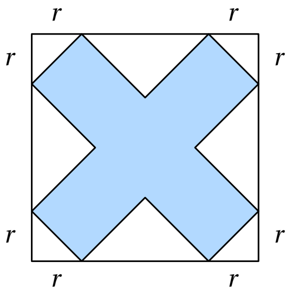
Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Найти все действительные числа x, при которых

$$\bigl|x - |x-1|\bigr| = 1.$$

2. При некотором положительном действительном числе a та часть графика функции $y = \dfrac{a}{x}$, где $x > 0$, пересекает окружность $x^2 + y^2 = 1$ в двух точках так, что x-координата одной точки пересечения ровно в два раза больше x-координаты другой точки пересечения. Найти a и соответствующие координаты точек пересечения.

3. На каждой стороне единичного квадрата выбирают две точки так, что расстояние от каждой выбранной точки до ближайшей вершины квадрата составляет r. При каком значении r площадь закрашенной на рисунке фигуры максимальна, и чему равна эта максимальная площадь?



4. На дугах BC, CA и AB описанной окружности остроугольного треугольника ABC, из которых каждая соединяет ровно две вершины треугольника, выбирают соответственно точки A_1, B_1 и C_1 так, что $|AB_1| = |AC_1|$, $|BC_1| = |BA_1|$ и $|CA_1| = |CB_1|$. Доказать, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

5. Пусть p — простое число. Найти все пары (a, b) положительных целых чисел, при которых

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{p}.$$

6. В клетчатом поле размерами 2007×2007 некоторые клетки закрашивают в чёрный цвет, и для каждой строки, столбца и диагонали (длиной от 1 до 2007) считают количество встречающихся там чёрных клеток. Доказать, что строк, столбцов и диагоналей, где встречается чётное число чёрных клеток, вместе чётное количество.

LIV Олимпиада Эстонии по математике

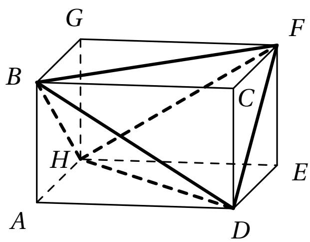
10 февраля 2007 г. Региональный тур **12 класс**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Три вершины параллелограмма имеют соответственно координаты $(0,-1)$, $(-n,0)$ и $(1,1)$, где n — фиксированное положительное целое число. Найти координаты всех точек, которые могут быть четвёртой вершиной этого параллелограмма.

2. При некотором действительном числе $a>1$ парабола $y=x^2-a$ касается окружности $x^2+y^2=1$ в двух разных точках. Найти a и соответствующие координаты точек касания.

3. Какую часть объёма прямоугольного параллелепипеда $ABCDEFGH$ составляет объём фигуры $BDFH$?



4. На клавиатуре могут присутствовать клавиши двух типов: обычные и модальные. Для запуска программы можно определить комбинацию клавиш, которая состоит из одной обычной клавиши и любого количества модальных клавиш. Одной комбинации клавиш можно поставить в соответствие только одну программу. Найти наименьшее количество клавиш на такой клавиатуре, с помощью которого можно запустить по меньшей мере 100 разных программ.

5. Пусть p — простое число. Найти все пары (a,b) положительных целых чисел, при которых

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{p}.$$

6. Доказать, что в произвольном треугольнике ABC выполняется неравенство

$$|AB|^2+|BC|^2>\frac{1}{3}\left(|AB|^2+|BC|^2+|CA|^2\right).$$