Eesti LIV matemaatikaolümpiaad

10. veebruar 2007 Piirkonnavoor **10. klass**

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

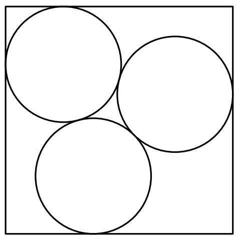
1. Leia avaldise väärtus:

$$2007 \cdot 2008 \cdot 2009 + 2 \cdot 2006 \cdot 2007 \cdot 2008 -$$
$$- 2006 \cdot 2007^2 - 2007 \cdot 2008^2 - 2006 \cdot 2008 \cdot 2009.$$

2. Ain otsustas paigutada oma säästud neljaks aastaks ASi Kindel Kasum aktsiatesse. Esimese aastaga tõusiski nende aktsiate hind 25%, kuid teisel aastal langes 25% ja kolmandal aastal langes veel 20%. Mitu protsenti peaks aktsiate hind neljandal aastal tõusma, et Aini investeeringu väärtus oleks lõppkokkuvõttes siiski 5% suurem kui alguses?

3. Leia kõik sellised reaalarvude nelikud (a, b, c, d), kus c ja d on ruutvõrrandi $x^2 + ax + b = 0$ lahendid ning a ja b on ruutvõrrandi $x^2 + cx + d = 0$ lahendid.

4. Ruudu sisse on joonestatud kolm ringjoont raadiusega 1, mis puutuvad ruudu külgi ja paarikaupa üksteist, nagu joonisel näidatud. Leia ruudu küljepikkus.



5. Leia kõik positiivsed täisarvud k, mille korral leiduvad sellised positiivsed täisarvud a ja b, et

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = k.$$

6. Transpordifirma käsutuses on veok kandevõimega 3 tonni. Milline on vähim arv reise, millega see veok võib ära vedada ükskõik millise 10-tonnise laadungi, mis koosneb pakkidest massiga mitte üle 1 tonni?

Eesti LIV matemaatikaolümpiaad

10. veebruar 2007 Piirkonnavoor **11. klass**

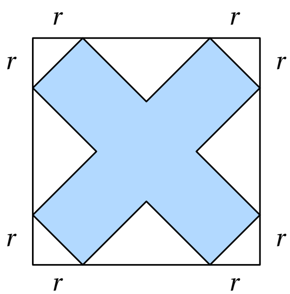
Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Leia kõik reaalarvud x, mille korral

$$\bigl|x - |x-1|\bigr| = 1.$$

2. Teatava positiivse reaalarvu a korral lõikab funktsiooni $y = \dfrac{a}{x}$ graafiku see osa, kus $x > 0$, ringjoont $x^2 + y^2 = 1$ kahes punktis nii, et ühe lõikepunkti x-koordinaat on teise lõikepunkti x-koordinaadist täpselt kaks korda suurem. Leia a ja vastavad lõikepunktide koordinaadid.

3. Ühikruudu igal küljel valitakse kaks punkti nii, et iga valitud punkti kaugus ruudu lähimast tipust on r. Millise r korral on joonisel tumedaks värvitud kujundi pindala maksimaalne ja milline see maksimaalne pindala on?



4. Teravnurkse kolmnurga ABC ümberringjoone kaartel BC, CA ja AB, millest igaüks ühendab parajasti kahte kolmnurga tippu, on valitud vastavalt punktid A_1, B_1 ja C_1 nii, et $|AB_1| = |AC_1|$, $|BC_1| = |BA_1|$ ja $|CA_1| = |CB_1|$. Tõesta, et sirged AA_1, BB_1 ja CC_1 lõikuvad ühes punktis.

5. Olgu p algarv. Leia kõik positiivsete täisarvude paarid (a, b), mille korral

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{p}.$$

6. Ruudustikus mõõtmetega 2007×2007 värvitakse mõned ruudud mustaks ning iga rea, iga veeru ja iga diagonaali (pikkusega 1 kuni 2007) puhul loetakse kokku seal asuvate mustade ruutude arv. Tõesta, et selliseid ridu, veerge ja diagonaale, kus esineb paarisarv musti ruute, on kokku paarisarv.

Eesti LIV matemaatikaolümpiaad

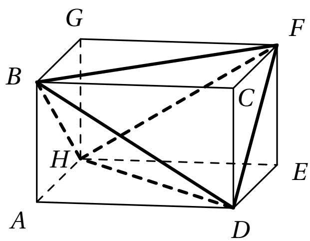
10. veebruar 2007 Piirkonnavoor **12. klass**

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Kolm rööpküliku tippu on vastavalt koordinaatidega $(0,-1)$, $(-n,0)$ ja $(1,1)$, kus n on fikseeritud positiivne täisarv. Leia kõigi selliste punktide koordinaadid, mis võivad olla selle rööpküliku neljandaks tipuks.

2. Teatava reaalarvu $a > 1$ korral puutub parabool $y = x^2 - a$ ringjoont $x^2 + y^2 = 1$ kahes erinevas punktis. Leia a ja vastavad puutepunktide koordinaadid.

3. Kui suure osa risttahuka $ABCDEFGH$ ruumalast moodustab kujundi $BDFH$ ruumala?



4. Klaviatuuril võib olla kahte liiki klahve: tavaklahvid ja modaalklahvid. Programmi käivitamiseks võib defineerida klahvikombinatsiooni, mis koosneb ühest tavaklahvist koos ükskõik millise arvu modaalklahvidega. Ühele klahvikombinatsioonile saab seada vastavusse ainult ühe programmi. Leia vähim klahvide arv sellisel klaviatuuril, millega on võimalik käivitada vähemalt 100 erinevat programmi.

5. Olgu p algarv. Leia kõik positiivsete täisarvude paarid (a,b), mille korral

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{p}.$$

6. Tõesta, et suvalises kolmnurgas ABC kehtib võrratus

$$|AB|^2 + |BC|^2 > \frac{1}{3}\left(|AB|^2 + |BC|^2 + |CA|^2\right).$$