Piirkonnavoor 2007

Eesti LIV matemaatikaolümpiaad

10. veebruar 2007 Piirkonnavoor **7. klass**

I osa. *Lahendamisaega on 40 minutit.*
Sellele lehele kirjuta ainult vastused, lahendamiseks võid kasutada lisapaberit.
Iga ülesande õige vastus annab 2 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Mitu numbrit on arvus $10^{2007} - 2007$?

. . . .

2. Milline number tuleks lisada arvu 3107 lõppu, et saadud viiekohaline arv jaguks 9-ga?

. . . .

3. Tõmba ring ümber kõikidele õigetele võrratustele:

$$\frac{2}{312} < \frac{2}{315} \qquad \frac{11}{175} < \frac{19}{175} \qquad 5 \leqslant 0 \qquad \frac{1}{3} < \frac{150}{450} \qquad \frac{17}{23} > \frac{71}{231}$$

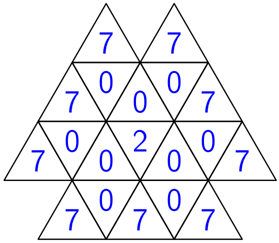
4. Oskar, Kalle ja Viktor on muusikud. Üks neist on laulja, teine pianist ja kolmas viiuldaja. On teada, et Kalle ja laulja on naabrid, pianist ja Oskar on vennad ning laulja on Oskari parim sõber. Milline on Kalle amet?

. . . .

5. Arvuta:

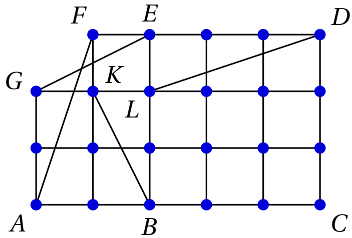
$$1 + \frac{4}{2 + \frac{2}{3}} = \; .\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.$$

6. Mitmel erineval viisil on võimalik moodustada arv 2007, alustades joonisel olevas kujundis kolmnurgast numbriga 2 ja liikudes igal sammul ühest kolmnurgast teise kolmnurka üle ühise külje?



. . . .

7. Ämblikuemanda kootud võrk moodustab korrapärase ruudustiku, mille sõlmede paare B ja K, F ja A, G ja E ning L ja D ühendavad sirged niidid. Kirjuta igasse lünka õige seos „pikem kui“, „lühem kui“ või „niisama pikk kui“.



teekond $BKFA$ on . . . . teekond $GELD$

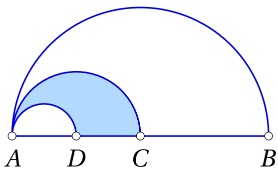
teekond $GELD$ on . . . . teekond $FKBC$

teekond $FKBC$ on . . . . teekond $BKFA$

8. Ristküliku tipust tõmmatud kiired jaotavad ristküliku nurga kuueks nurgaks, millest kolm on suurusega α ja kolm ülejäänut suurusega β. Leia $\alpha + \beta$.

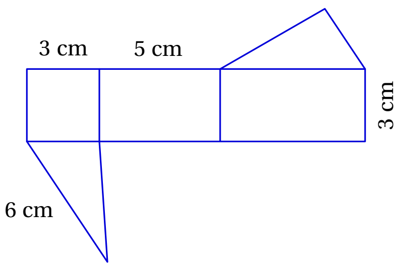
. . . .

9. Punkt C on lõigu AB keskpunkt ning punkt D on lõigu AC keskpunkt. Lõikudele AB, AC ja AD toetub kolm poolringi. Leia joonisel tumedaks värvitud kujundi täpne pindala ruutsentimeetrites, kui $|AB| = 16$ cm.



. . . .

10. Joonisel on antud kolmnurkse püstprisma pinnalaotus, millele on lisatud mõnede lõikude pikkused. Arvuta selle prisma kõigi servade pikkuste summa.



. . . .

Eesti LIV matemaatikaolümpiaad

10. veebruar 2007 Piirkonnavoor **8. klass**

I osa. *Lahendamisaega on 40 minutit.*
Sellele lehele kirjuta ainult vastused, lahendamiseks võid kasutada lisapaberit.
Iga ülesande õige vastus annab 2 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Leia summa $2007^2 + 2007^0 + 2007^0 + 2007^7$ viimane number.

. . . .

2. Leia suurim 15-ga jaguv viiekohaline arv, mille esimese ja viimase numbri kustutamisel jääb järele arv 107.

. . . .

3. On antud kümme esimest liiget sama seaduspärasuse järgi jätkuvast arvude jadast:

$$1, \quad 2, \quad \frac{3}{4}, \quad 5, \quad 6, \quad \frac{7}{8}, \quad 9, \quad 10, \quad \frac{11}{12}, \quad 13, \quad \ldots$$

Tõmba ring ümber arvudest

$$\frac{2005}{2006} \qquad 2006 \qquad 2007 \qquad \frac{2007}{2008} \qquad 2010$$

kõigile neile, mis esinevad ülaltoodud jadas.

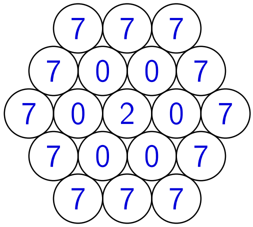
4. Kahel kopal kulub kolme ühesuguse süvendi kaevamiseks poolteist tundi. Mitu koppa on vaja, et kaevata neli samasugust süvendit ühe tunniga?

. . . .

5. Võrrandi $ax - 4 = 0$ lahendi x pöördarvu vastandarv on $\frac{1}{6}$. Leia kordaja a.

. . . .

6. Mitmel erineval viisil on võimalik moodustada arv 2007, alustades joonisel olevas kujundis ringist numbriga 2 ja liikudes igal sammul ühest ringist teise, teda puutuvasse ringi?

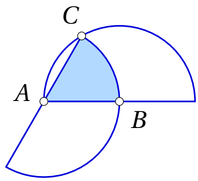


. . . .

7. Ring on raadiustega jaotatud kuueks sektoriks nii, et kolme sektori nurgad on suurusega α ja kolme ülejäänud sektori nurgad suurusega β. Leia $\alpha+\beta$.

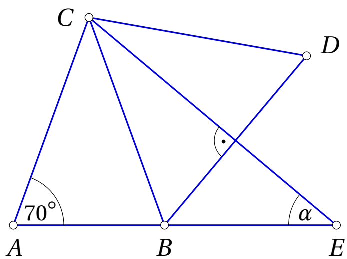
. . . .

8. Kaks võrdset poolringi keskpunktidega A ja B ning raadiusega 1 cm kattuvad osaliselt nii, et ühe poolringi diameetri otspunkt asub teist poolringi piiraval joonel (punktid A ja B kuuluvad mõlema poolringi piirjoontele). Leia joonisel tumedaks värvitud kujundi täpne pindala ruutsentimeetrites.



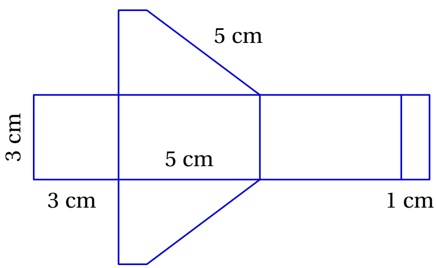
. . . .

9. Leia α, kui punktid A, B ja E asuvad ühel sirgel, lõik CE on risti lõiguga BD ning $|AC| = |BC| = |DB| = |DC|$.



. . . .

10. Püstprisma põhjadeks on täisnurksed trapetsid. Selle prisma pinnalaotusele on lisatud mõnede lõikude pikkused. Arvuta selle prisma täispindala.



. . . .

Eesti LIV matemaatikaolümpiaad

10. veebruar 2007 Piirkonnavoor **9. klass**

I osa. *Lahendamisaega on 40 minutit.*
Sellele lehele kirjuta ainult vastused, lahendamiseks võid kasutada lisapaberit.
Iga ülesande õige vastus annab 2 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Arvuta: $(2007^2 - 2007) - (2006^2 - 2006) =$ . . . .

2. Kirjutises $7{*}32{*}$ asendatakse tärnid sobivate numbritega ja saadakse arv, mis annab jagamisel 15-ga jäägi 2. Leia selliste arvude seast suurim.

. . . .

3. Mitmendal kohal paikneb arv $\frac{59}{60}$ arvude jadas $1, 2, \frac{3}{4}, 5, 6, \frac{7}{8}, 9, 10, \ldots$?

. . . .

4. Neljal kopal kulub neli tundi nelja ühesuguse süvendi kaevamiseks. Kui palju aega kulub kuuel kopal kaheteistkümne samasuguse süvendi kaevamiseks?

. . . .

5. Leia funktsiooni $y = x^2 + 6x + 9$ graafiku haripunkti kaugus y-teljest.

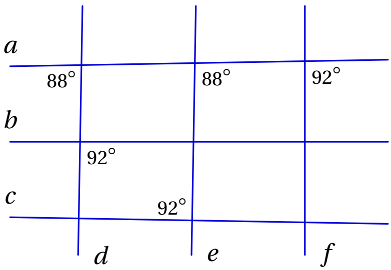
. . . .

6. Mitmel erineval viisil on võimalik moodustada arv 2007, alustades ruudust numbriga 2 ja liikudes igal sammul teise ruutu, millel on senise ruuduga ühine külg või ühine tipp?

7	7	7
0	0	7
2	0	7

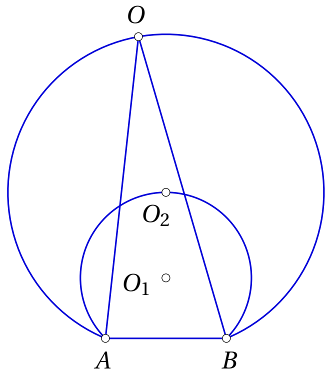
. . . .

7. Joonisel on 6 sirget tähistatud väiketähtedega ja märgitud mõnede nurkade suurused. Leia kõik paralleelsete sirgete paarid.



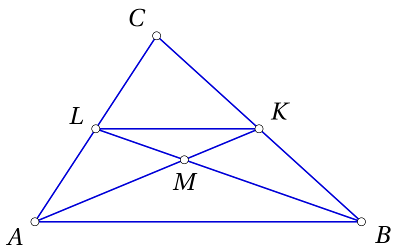
. . . .

8. Antud on lõik AB ja kolm punkti O_1, O_2 ja O nii, et punktid A, B ja O_2 asuvad ringjoonel keskpunktiga O_1 ning punktid A, B ja O asuvad ringjoonel keskpunktiga O_2. Leia nurga AOB suurus, kui nurk AO_1B on täisnurk.



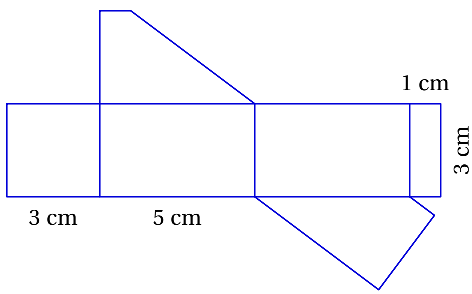
. . . .

9. Kolmnurga ABC mediaanide AK ja BL lõikepunkt on M. Leia kolmnurga ABM pindala, kui kolmnurga MKL pindala on 1,6 cm^2.



. . . .

10. Püstprisma põhjadeks on täisnurksed trapetsid. Selle prisma pinnalaotusele on lisatud mõnede lõikude pikkused. Arvuta prisma ruumala.



. . . .

Eesti LIV matemaatikaolümpiaad

10. veebruar 2007 Piirkonnavoor **7. klass**

II osa. *Lahendamisaega on 2 tundi.*
Ülesannete lahendused kirjuta eraldi lehele.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti. Ainult vastusest ei piisa!
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Perekond Tammel on tänavune aasta mõnes mõttes erakordne: aasta lõpuks on iga pereliikme vanus kahekohaline täisarv, mis on täpselt 7 korda suurem oma numbrite summast. Leia kõigi pereliikmete sünniaastad, kui pereliikmete vanused on parajasti kõik niisuguse omadusega arvud.

2. Kolmnurga ABC tipust C tõmmatakse nurgapoolitaja, mis lõikab tipust B tõmmatud nurgapoolitajat punktis O ja kolmnurga külge AB punktis D. On teada, et $\angle DOB = 54^\circ$ ja $\angle ADO = 95^\circ$. Milline kolmnurga ABC küljedest on kõige lühem?

3. Kaarlil ja Joonasel olid ühesugused ristkülikukujulised postkaardid, mille lühema külje pikkus oli 12 cm. Mõlemad poisid lõikasid oma kaardi kaheks pindalalt võrdseks ristkülikuks, viskasid ühe poole ära ja jätsid teise alles. Seejärel lõikas Kaarel oma järelejäänud ristküliku veelkord kaheks pindalalt võrdseks ristkülikuks ja jättis ühe neist alles. Nüüd selgus, et Kaarli ja Joonase allesjäänud ristkülikud olid võrdse ümbermõõduga. Leia kõik võimalused, milline võis olla esialgse postkaardi pikema külje pikkus, ja põhjenda, miks muid võimalusi ei ole.

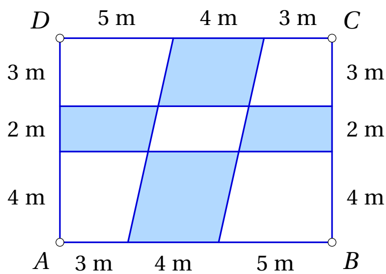
Eesti LIV matemaatikaolümpiaad

10. veebruar 2007 Piirkonnavoor **8. klass**

II osa. *Lahendamisaega on 2 tundi.*
Ülesannete lahendused kirjuta eraldi lehele.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti. Ainult vastusest ei piisa!
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Volli kirjutas tahvlile naturaalarvu. Ta korrutas selle 9-ga ja kustutas korrutise viimase numbri. Saadud arvu korrutas ta 5-ga ja kustutas jällegi korrutise viimase numbri. Nii sai ta tulemuseks arvu 23. Leia kõik naturaalarvud, mis sobivad Volli kirjutatud arvuks.

2. Nelinurga $ABCD$ iga külg on jaotatud kolmeks osaks, joonisel on antud nende osade pikkused meetrites. Leia joonisel tumedaks värvitud kujundite kogupindala.



3. Laual on kolm pähklite kuhja. Ühes kuhjas on 22, teises 14 ja kolmandas 12 pähklit. Ühekorraga võib ühest kuhjast teise ümber tõsta täpselt nii palju pähkleid, kui palju teises kuhjas juba on. Milline on vähim arv ümbertõstmisi, millega saab pähklite arvu kõigis kolmes kuhjas muuta võrdseks?

Eesti LIV matemaatikaolümpiaad

10. veebruar 2007 Piirkonnavoor **9. klass**

II osa. *Lahendamisaega on 4 tundi.*
Ülesannete lahendused kirjuta eraldi lehele.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti. Ainult vastusest ei piisa!
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Nõia-Ellal seisis keldris suur vaat nõiarohtu, mis koosnes 60% konnakoivaleotisest, 30% põdrasamblatõmmisest ja 10% kukejuureteest. Ühel hommikul tõi ta liitrise pudeli täie rohtu tuppa ja määris poole sellest oma valutavatele kontidele. Seejärel kallas ta pudelisse kukejuureteed, kuni pudel sai jälle täis, ning võidis viiendikuga saadud segust oma hõõrdunud varbaid. Lõpuks tõi Nõia-Ella keldrivaadist veel viiendiku liitrit esialgse kontsentratsiooniga rohtu juurde, lisas pudelisse ja sai sellega hästimõjuva külmarohu sissevõtmiseks. Millises vahekorras olid konnakoivaleotis, põdrasamblatõmmis ja kukejuuretee Nõia-Ella külmarohus?

2. Võrdhaarse kolmnurga haarasid ühendav kesklõik puutub kolmnurga siseringjoont. Millises suhtes jaotab haara ja siseringjoone puutepunkt kolmnurga haara?

3. Karupoeg Puhh, Notsu ja Ruu tahavad pimedas metsas minna üle kitsa silla. Neil on ainult üks latern, kuid selleks, et keegi vette ei kukuks, peab igal silda ületaval rühmal olema latern kaasas. Samas võib Puhh üle silla minna ainult üksinda. Leia lühim aeg, millega kogu seltskond üle silla saab, kui igaühel võtab silla ületamine aega 1 minuti.

4. Leia kõik mittenegatiivsed täisarvud n, mille korral arv $200\ldots07$, kus esineb täpselt n nulli, jagub 27-ga.

Eesti LIV matemaatikaolümpiaad

10. veebruar 2007 — Piirkonnavoor — **10. klass**

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

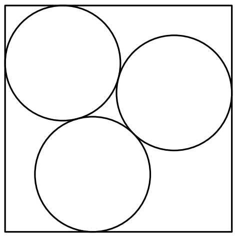
1. Leia avaldise väärtus:

$$2007 \cdot 2008 \cdot 2009 + 2 \cdot 2006 \cdot 2007 \cdot 2008 -$$
$$- 2006 \cdot 2007^2 - 2007 \cdot 2008^2 - 2006 \cdot 2008 \cdot 2009.$$

2. Ain otsustas paigutada oma säästud neljaks aastaks ASi Kindel Kasum aktsiatesse. Esimese aastaga tõusiski nende aktsiate hind 25%, kuid teisel aastal langes 25% ja kolmandal aastal langes veel 20%. Mitu protsenti peaks aktsiate hind neljandal aastal tõusma, et Aini investeeringu väärtus oleks lõppkokkuvõttes siiski 5% suurem kui alguses?

3. Leia kõik sellised reaalarvude nelikud (a, b, c, d), kus c ja d on ruutvõrrandi $x^2 + ax + b = 0$ lahendid ning a ja b on ruutvõrrandi $x^2 + cx + d = 0$ lahendid.

4. Ruudu sisse on joonestatud kolm ringjoont raadiusega 1, mis puutuvad ruudu külgi ja paarikaupa üksteist, nagu joonisel näidatud. Leia ruudu küljepikkus.



5. Leia kõik positiivsed täisarvud k, mille korral leiduvad sellised positiivsed täisarvud a ja b, et

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = k.$$

6. Transpordifirma käsutuses on veok kandevõimega 3 tonni. Milline on vähim arv reise, millega see veok võib ära vedada ükskõik millise 10-tonnise laadungi, mis koosneb pakkidest massiga mitte üle 1 tonni?

Eesti LIV matemaatikaolümpiaad

10. veebruar 2007 Piirkonnavoor **11. klass**

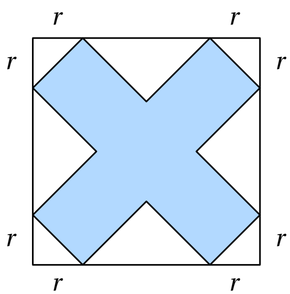
Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Leia kõik reaalarvud x, mille korral

$$\big|x - |x-1|\big| = 1.$$

2. Teatava positiivse reaalarvu a korral lõikab funktsiooni $y = \dfrac{a}{x}$ graafiku see osa, kus $x > 0$, ringjoont $x^2 + y^2 = 1$ kahes punktis nii, et ühe lõikepunkti x-koordinaat on teise lõikepunkti x-koordinaadist täpselt kaks korda suurem. Leia a ja vastavad lõikepunktide koordinaadid.

3. Ühikruudu igal küljel valitakse kaks punkti nii, et iga valitud punkti kaugus ruudu lähimast tipust on r. Millise r korral on joonisel tumedaks värvitud kujundi pindala maksimaalne ja milline see maksimaalne pindala on?



4. Teravnurkse kolmnurga ABC ümberringjoone kaartel BC, CA ja AB, millest igaüks ühendab parajasti kahte kolmnurga tippu, on valitud vastavalt punktid A_1, B_1 ja C_1 nii, et $|AB_1| = |AC_1|$, $|BC_1| = |BA_1|$ ja $|CA_1| = |CB_1|$. Tõesta, et sirged AA_1, BB_1 ja CC_1 lõikuvad ühes punktis.

5. Olgu p algarv. Leia kõik positiivsete täisarvude paarid (a, b), mille korral

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{p}.$$

6. Ruudustikus mõõtmetega 2007×2007 värvitakse mõned ruudud mustaks ning iga rea, iga veeru ja iga diagonaali (pikkusega 1 kuni 2007) puhul loetakse kokku seal asuvate mustade ruutude arv. Tõesta, et selliseid ridu, veerge ja diagonaale, kus esineb paarisarv musti ruute, on kokku paarisarv.

Eesti LIV matemaatikaolümpiaad

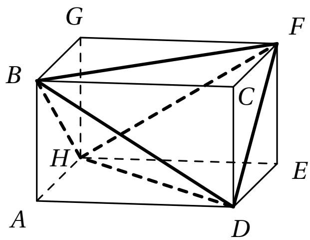
10. veebruar 2007 Piirkonnavoor **12. klass**

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Kolm rööpküliku tippu on vastavalt koordinaatidega $(0,-1)$, $(-n,0)$ ja $(1,1)$, kus n on fikseeritud positiivne täisarv. Leia kõigi selliste punktide koordinaadid, mis võivad olla selle rööpküliku neljandaks tipuks.

2. Teatava reaalarvu $a > 1$ korral puutub parabool $y = x^2 - a$ ringjoont $x^2 + y^2 = 1$ kahes erinevas punktis. Leia a ja vastavad puutepunktide koordinaadid.

3. Kui suure osa risttahuka $ABCDEFGH$ ruumalast moodustab kujundi $BDFH$ ruumala?



4. Klaviatuuril võib olla kahte liiki klahve: tavaklahvid ja modaalklahvid. Programmi käivitamiseks võib defineerida klahvikombinatsiooni, mis koosneb ühest tavaklahvist koos ükskõik millise arvu modaalklahvidega. Ühele klahvikombinatsioonile saab seada vastavusse ainult ühe programmi. Leia vähim klahvide arv sellisel klaviatuuril, millega on võimalik käivitada vähemalt 100 erinevat programmi.

5. Olgu p algarv. Leia kõik positiivsete täisarvude paarid (a,b), mille korral

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{p}.$$

6. Tõesta, et suvalises kolmnurgas ABC kehtib võrratus

$$|AB|^2 + |BC|^2 > \frac{1}{3}\left(|AB|^2 + |BC|^2 + |CA|^2\right).$$

LIV Олимпиада Эстонии по математике

10 февраля 2007 г. Региональный тур **7 класс**

I часть. *Время, отводимое для решения: 40 минут.*
На этом листке написать только ответы, для решения можно использовать дополнительную бумагу.
Верный ответ каждой задачи даёт 2 балла.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Сколько цифр в числе $10^{2007} - 2007$?

. . . .

2. Какую цифру следует добавить в конец числа 3107, чтобы полученное пятизначное число делилось на 9?

. . . .

3. Обвести кружком все верные неравенства:

$$\frac{2}{312} < \frac{2}{315} \qquad \frac{11}{175} < \frac{19}{175} \qquad 5 \leqslant 0 \qquad \frac{1}{3} < \frac{150}{450} \qquad \frac{17}{23} > \frac{71}{231}$$

. . . .

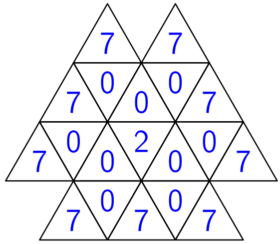
4. Остап, Кирилл и Виктор — музыканты. Один из них певец, второй — пианист, а третий — скрипач. Известно, что Кирилл и певец — соседи, пианист и Остап — братья, а лучший друг Остапа — певец. Какова профессия Кирилла?

. . . .

5. Вычислить:

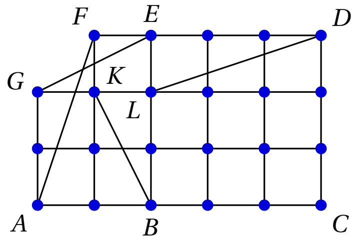
$$1 + \frac{4}{2 + \frac{2}{3}} = \;. . . . .$$

6. Сколькими разными способами можно образовать число 2007, если в фигуре, изображённой на рисунке, начать с треугольника с цифрой 2 и перемещаться каждым шагом из одного треугольника в другой через их общую сторону?



. . . .

7. Сеть, сплетённая паучихой, образует упорядоченное клетчатое поле, пары узлов B и K, F и A, G и E, L и D которой соединяют прямые нити. Записать в каждый пропуск верное соотношение „длиннее чем“, „короче чем“ или „такой же длины как“.



маршрут $BKFA$ . . . . маршрут $GELD$

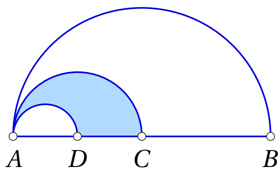
маршрут $GELD$ . . . . маршрут $FKBC$

маршрут $FKBC$ . . . . маршрут $BKFA$

8. Лучи, проведенные из вершины прямоугольника, делят угол прямоугольника на шесть углов, из которых три имеют величину α, а другие три — величину β. Найти $\alpha + \beta$.

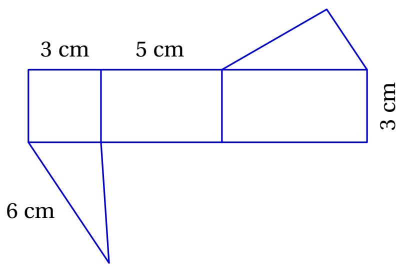
. . . .

9. Точка C — центр отрезка AB, а точка D — центр отрезка AC. На отрезки AB, AC и AD опираются три полукруга. Найти в квадратных сантиметрах точную площадь фигуры, закрашенной на рисунке тёмным цветом, если $|AB| = 16$ см.



. . . .

10. На рисунке приведена развёртка прямой треугольной призмы, на которой указаны длины некоторых отрезков. Вычислить сумму длин всех рёбер этой призмы.



. . . .

LIV Олимпиада Эстонии по математике

10 февраля 2007 г. Региональный тур **8 класс**

I часть. *Время, отводимое для решения: 40 минут.*
На этом листке написать только ответы, для решения можно использовать дополнительную бумагу.
Верный ответ каждой задачи даёт 2 балла.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Найти последнюю цифру в сумме $2007^2 + 2007^0 + 2007^0 + 2007^7$.

. . . .

2. Найти наибольшее пятизначное число, делящееся на 15, при стирании первой и последней цифры которого остаётся число 107.

. . . .

3. Даны десять первых членов последовательности, образованной по некоторой закономерности:

$$1, \quad 2, \quad \frac{3}{4}, \quad 5, \quad 6, \quad \frac{7}{8}, \quad 9, \quad 10, \quad \frac{11}{12}, \quad 13, \quad \ldots$$

Обвести кружком все числа, которые встречаются в этой последовательности:

$$\frac{2005}{2006} \qquad 2006 \qquad 2007 \qquad \frac{2007}{2008} \qquad 2010$$

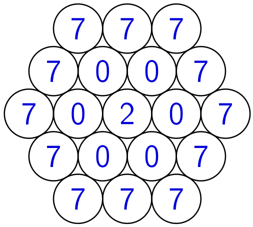
4. У двух экскаваторов уходит на выкапывание трёх одинаковых ям полтора часа. Сколько нужно экскаваторов, чтобы выкопать четыре таких же ямы за один час?

. . . .

5. Противоположное число обратного числа корня x уравнения $ax - 4 = 0$ равняется $\frac{1}{6}$. Найти коэффициент a.

. . . .

6. Сколькими разными способами можно образовать число 2007, если в фигуре, изображённой на рисунке, начать с круга с цифрой 2 и перемещаться каждым шагом из одного круга в другой, касающийся его круг?

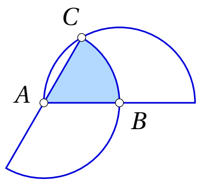


. . . .

7. Радиусы круга делят его на шесть секторов так, что углы трёх секторов имеют величину α, а остальных трёх секторов — величину β. Найти $\alpha+\beta$.

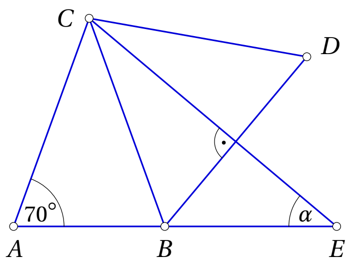
. . . .

8. Два равных полукруга с центрами A и B и радиусом 1 см частично перекрываются, так что конец диаметра одного полукруга лежит на линии, ограничивающей другой полукруг (точки A и B принадлежат граничным линиям обоих полукругов). Найти в квадратных сантиметрах точную площадь фигуры, закрашенной на рисунке тёмным цветом.



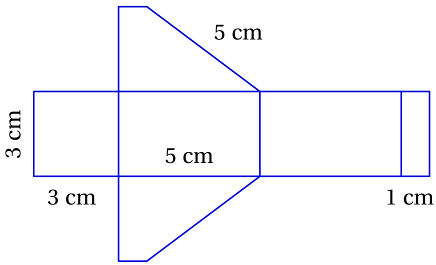
. . . .

9. Найти α, если точки A, B и E лежат на одной прямой, отрезок CE перпендикулярен отрезку BD и $|AC| = |BC| = |DB| = |DC|$.



. . . .

10. Основаниями прямой призмы являются прямоугольные трапеции. На развёртке этой призмы указаны длины некоторых отрезков. Вычислить площадь полной поверхности этой призмы.



. . . .

LIV Олимпиада Эстонии по математике

10 февраля 2007 г. Региональный тур **9 класс**

I часть. *Время, отводимое для решения: 40 минут.*
На этом листке написать только ответы, для решения можно использовать дополнительную бумагу.
Верный ответ каждой задачи даёт 2 балла.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Вычислить: $(2007^2 - 2007) - (2006^2 - 2006) =$ . . . .

2. В записи $7{*}32{*}$ звёздочки заменяют подходящими цифрами и получают число, которое при делении на 15 даёт остаток 2. Найти наибольшее из таких чисел.

. . . .

3. На каком месте находится число $\frac{59}{60}$ в последовательности чисел $1, 2, \frac{3}{4}, 5, 6, \frac{7}{8}, 9, 10, \ldots$?

. . . .

4. У четырёх экскаваторов уходит на выкапывание четырёх одинаковых ям четыре часа. Сколько уйдёт времени у шести экскаваторов на выкапывание двенадцати таких же ям?

. . . .

5. Найти расстояние от вершины графика функции $y = x^2 + 6x + 9$ до оси y.

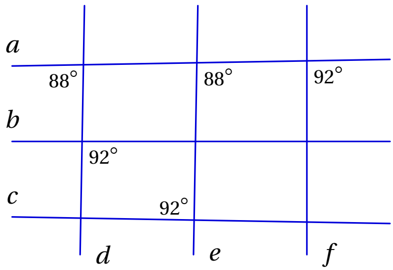
. . . .

6. Сколькими разными способами можно образовать число 2007, начиная с квадрата с цифрой 2 и перемещаясь каждым шагом в другой квадрат, имеющий с прежним квадратом общую сторону или общую вершину?

7	7	7
0	0	7
2	0	7

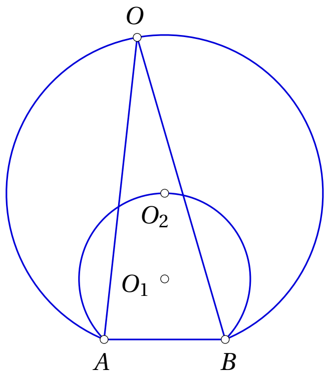
. . . .

7. На рисунке маленькими буквами обозначены 6 прямых, а также отмечены величины некоторых углов. Найти все пары параллельных прямых.



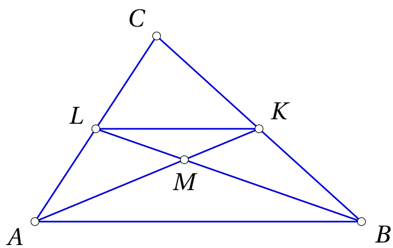
. . . .

8. Дан отрезок AB и три точки O_1, O_2 и O так, что точки A, B и O_2 расположены на окружности с центром O_1, а точки A, B и O расположены на окружности с центром O_2. Найти величину угла AOB, если угол AO_1B прямой.



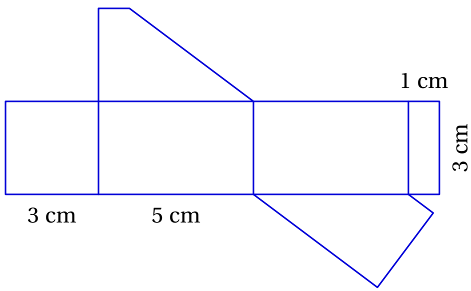
. . . .

9. В треугольнике ABC медианы AK и BL пересекаются в точке M. Найти площадь треугольника ABM, если площадь треугольника MKL равна 1,6 см^2.



. . . .

10. Основаниями прямой призмы являются прямоугольные трапеции. На развёртке этой призмы указаны длины некоторых отрезков. Вычислить объём призмы.



. . . .

LIV Олимпиада Эстонии по математике

10 февраля 2007 г. Региональный тур **7 класс**

II часть. *Время, отводимое для решения: 2 часа.*
Решения задач написать на отдельном листе.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов. Написать только ответ недостаточно!
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Для семьи Дубовых нынешний год в некотором смысле особенный: к концу года возраст каждого члена семьи — двузначное целое число, которое ровно в 7 раз больше суммы своих цифр. Найти годы рождения всех членов семьи, если возрастами членов семьи являются как раз все числа с данным свойством.

2. Из вершины C треугольника ABC проводится биссектриса, которая пересекает биссектрису, проведённую из вершины B, в точке O, а сторону треугольника AB — в точке D. Известно, что $\angle DOB = 54^\circ$ и $\angle ADO = 95^\circ$. Какая из сторон треугольника ABC самая короткая?

3. У Коли и Юры были одинаковые прямоугольные почтовые открытки, длина меньшей стороны которых составляла 12 см. Оба мальчика разрезали свою открытку на два прямоугольника равной площади, одну из половинок выбросили, а вторую оставили себе. После этого Коля свой оставшийся прямоугольник снова разрезал на два прямоугольника равной площади и оставил только один из них. Выяснилось, что оставшиеся у Коли и Юры прямоугольники имеют одинаковый периметр. Найти все возможности, чему могла равняться длина большей стороны первоначальной открытки, и обосновать, почему других возможностей нет.

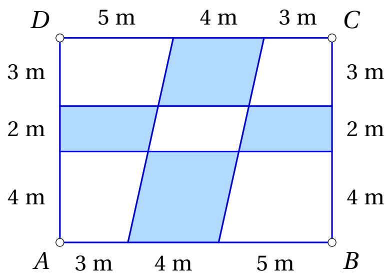
LIV Олимпиада Эстонии по математике

10 февраля 2007 г. Региональный тур **8 класс**

II часть. *Время, отводимое для решения: 2 часа.*
Решения задач написать на отдельном листе.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов. Написать только ответ недостаточно!
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Вова написал на доске натуральное число. Он умножил его на 9 и стёр последнюю цифру произведения. Полученное число он умножил на 5 и снова стёр последнюю цифру произведения. В результате он получил число 23. Найти все натуральные числа, которые мог написать Вова.

2. Каждая сторона четырёхугольника $ABCD$ разделена на три части, на рисунке указаны длины этих частей в метрах. Найти общую площадь фигур, закрашенных на рисунке тёмным цветом.



3. На столе три кучки с орехами. В одной кучке 22, во второй 14 и в третьей 12 орехов. За один раз можно из одной кучки переложить в другую ровно столько орехов, сколько в другой кучке уже есть. Каково наименьшее число перекладываний, за которое можно сделать количество орехов во всех трёх кучках равным?

LIV Олимпиада Эстонии по математике

10 февраля 2007 г. Региональный тур **9 класс**

II часть. *Время, отводимое для решения: 4 часа.*
Решения задач написать на отдельном листе.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов. Написать только ответ недостаточно!
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. У Бабы-Яги в подвале стояла большая бочка с зельем, которая состояла из 60% настойки лягушачьих лапок, 30% вытяжки из лосиных рогов и 10% чая из болотного мха. Однажды утром принесла она наполненную литровую бутылку зелья в комнату и намазала половиной жидкости свои болящие суставы. После этого она долила в бутылку чая из болотного мха, пока бутылка снова не стала полной, и помазала пятой частью полученной смеси свои натёртые пальцы ног. В конце Баба-Яга принесла из бочки в подвале ещё пятую часть литра зелья первоначальной концентрации, добавила в бутылку и получила таким образом действенное лекарство от простуды. В каком соотношении были настойка из лягушачьих лапок, вытяжка из лосиных рогов и чай из болотного мха в лекарстве Бабы-Яги от простуды?

2. В равнобедренном треугольнике средняя линия, соединяющая боковые стороны, касается вписанной окружности треугольника. В каком отношении делит боковую сторону треугольника точка касания с вписанной окружностью?

3. Винни-Пух, Пятачок и Ру хотят перейти в тёмном лесу через узкий мост. У них есть только один фонарь, но для того, чтобы никто не упал в воду, у каждой группы, пересекающей реку, фонарь должен быть с собой. В то же время Пух может переходить мост лишь в одиночку. Найти наименьшее время, за которое вся компания может перебраться через мост, если у каждого на переход через мост уходит 1 минута.

4. Найти все неотрицательные целые числа n, при которых число $200\ldots07$, в котором встречается ровно n нулей, делится на 27.

LIV Олимпиада Эстонии по математике

10 февраля 2007 г. Региональный тур **10 класс**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

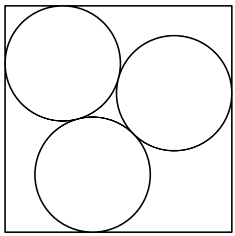
1. Найти значение выражения:

$$2007 \cdot 2008 \cdot 2009 + 2 \cdot 2006 \cdot 2007 \cdot 2008 -$$
$$- 2006 \cdot 2007^2 - 2007 \cdot 2008^2 - 2006 \cdot 2008 \cdot 2009.$$

2. Андрей решил вложить свои сбережения в акции АО Верная Прибыль. За первый год цена их акций и поднялась на 25%, но за второй год опустилась на 25%, а за третий год опустилась ещё на 20%. На сколько процентов должна подняться цена акций за четвёртый год, чтобы стоимость инвестиций Андрея была в конечном итоге на 5% выше, чем вначале?

3. Найти все четвёрки действительных чисел (a, b, c, d), где c и d — корни квадратного уравнения $x^2 + ax + b = 0$, а a и b — корни квадратного уравнения $x^2 + cx + d = 0$.

4. Внутри квадрата нарисованы три окружности с радиусом 1, которые касаются сторон квадрата и попарно друг друга, как показано на рисунке. Найти длину стороны квадрата.



5. Найти все положительные целые числа k, для которых найдутся такие положительные целые числа a и b, что

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = k.$$

6. В распоряжении транспортной фирмы имеется грузовик с грузоподъёмностью 3 тонны. Каково наименьшее число рейсов, за которое этот грузовик может перевезти любой 10-тонный груз, состоящий из пакетов массой, не превышающей 1 тонну?

LIV Олимпиада Эстонии по математике

10 февраля 2007 г. Региональный тур **11 класс**

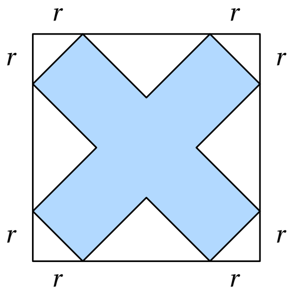
Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Найти все действительные числа x, при которых

$$\big|x - |x - 1|\big| = 1.$$

2. При некотором положительном действительном числе a та часть графика функции $y = \dfrac{a}{x}$, где $x > 0$, пересекает окружность $x^2 + y^2 = 1$ в двух точках так, что x-координата одной точки пересечения ровно в два раза больше x-координаты другой точки пересечения. Найти a и соответствующие координаты точек пересечения.

3. На каждой стороне единичного квадрата выбирают две точки так, что расстояние от каждой выбранной точки до ближайшей вершины квадрата составляет r. При каком значении r площадь закрашенной на рисунке фигуры максимальна, и чему равна эта максимальная площадь?



4. На дугах BC, CA и AB описанной окружности остроугольного треугольника ABC, из которых каждая соединяет ровно две вершины треугольника, выбирают соответственно точки A_1, B_1 и C_1 так, что $|AB_1| = |AC_1|$, $|BC_1| = |BA_1|$ и $|CA_1| = |CB_1|$. Доказать, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

5. Пусть p — простое число. Найти все пары (a, b) положительных целых чисел, при которых

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{p}.$$

6. В клетчатом поле размерами 2007×2007 некоторые клетки закрашивают в чёрный цвет, и для каждой строки, столбца и диагонали (длиной от 1 до 2007) считают количество встречающихся там чёрных клеток. Доказать, что строк, столбцов и диагоналей, где встречается чётное число чёрных клеток, вместе чётное количество.

LIV Олимпиада Эстонии по математике

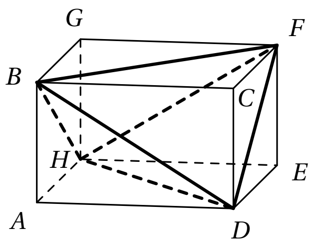
10 февраля 2007 г. Региональный тур **12 класс**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Три вершины параллелограмма имеют соответственно координаты $(0, -1)$, $(-n, 0)$ и $(1, 1)$, где n — фиксированное положительное целое число. Найти координаты всех точек, которые могут быть четвёртой вершиной этого параллелограмма.

2. При некотором действительном числе $a > 1$ парабола $y = x^2 - a$ касается окружности $x^2 + y^2 = 1$ в двух разных точках. Найти a и соответствующие координаты точек касания.

3. Какую часть объёма прямоугольного параллелепипеда $ABCDEFGH$ составляет объём фигуры $BDFH$?



4. На клавиатуре могут присутствовать клавиши двух типов: обычные и модальные. Для запуска программы можно определить комбинацию клавиш, которая состоит из одной обычной клавиши и любого количества модальных клавиш. Одной комбинации клавиш можно поставить в соответствие только одну программу. Найти наименьшее количество клавиш на такой клавиатуре, с помощью которого можно запустить по меньшей мере 100 разных программ.

5. Пусть p — простое число. Найти все пары (a, b) положительных целых чисел, при которых

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{p}.$$

6. Доказать, что в произвольном треугольнике ABC выполняется неравенство

$$|AB|^2 + |BC|^2 > \frac{1}{3}\left(|AB|^2 + |BC|^2 + |CA|^2\right).$$

I osa vastused

1. 2007
2. 7
3. teine ja viies
4. pianist
5. $\frac{5}{2}$
6. 12
7. niisama pikk kui; pikem kui; lühem kui
8. 30°
9. 6π cm^2
10. 37 cm

Lahendused

1. Arv 10^{2007} on vähim 2008-kohaline arv: 1 ja 2007 nulli. Lahutades sellest arvu 2007, saame tulemuseks $99\ldots97993$, mis on 2007-kohaline.

2. Arvu $\overline{3107x}$ ristsumma on $11 + x$. Ainuke number, mille korral see ristsumma jagub 9-ga, on $x = 7$.

3. Esimene ei kehti, sest sama lugejaga murdudest on suurem see, mille nimetaja on väiksem (lugeja ja nimetaja positiivsed arvud). Teine kehtib, sest sama nimetaja puhul on suurema lugejaga murd suurem. Kolmas ei kehti. Neljas ei kehti, sest poolte väärtused on tegelikult võrdsed (kumbki ei ole teisest väiksem). Viies kehtib, sest $\frac{17}{23} > \frac{1}{2}$, kuid $\frac{71}{231} < \frac{1}{2}$.

4. Andmetest näeme, et Oskar ja pianist on erinevad inimesed ning Oskar ja laulja on samuti erinevad inimesed. Järelikult Oskar on viiuldaja. Et Kalle ei saa olla laulja ega viiuldaja, peab Kalle olema pianist.

5. Et $2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$, siis avaldise väärtus on $1 + 4 \cdot \frac{3}{8} = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$.

6. Keskmisest ruudust lähtudes saame 3 viisil valida esimese nulli. Iga sellise valiku korral saame 2 viisil valida teise nulli. Omakorda iga sellise valiku järel saame 2 viisil valida seitsme. Valikuvõimalusi on seega üldse $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$.

7. Marsruut $BKFA$ on niisama pikk kui marsruut $GELD$, sest kumbki koosneb kolmest lülist, mille pikkused on vastastikku võrdsed. Marsruut $BKFA$ on aga pikem kui marsruut $FKBC$, sest nad erinevad ainult lülide FA ja BC poolest, kuid FA on pikem kui BC.

8. Ristküliku nurga suurus on 90°. Kuue tekkinud nurga suuruste summa on $3\alpha + 3\beta = 90^\circ$. Järelikult $\alpha + \beta = 30^\circ$.

9. Et $|AB| = 16$ cm, siis $|AC| = 8$ cm ja $|AD| = 4$ cm. Diameetrile AC toetuva poolringi pindala on pool sama diameetriga ringi pindalast ehk $\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \frac{8^2}{4} = 8\pi$ cm^2. Diameetrile AD toetuva poolringi pindala on analoogiliselt $\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \frac{4^2}{4} = 2\pi$ cm^2. Tumedaks värvitud kujundi pindala on nende pindalade vahe ehk 6π cm^2.

10. Prisma põhja servade pikkused on 6 cm, 5 cm ja 3 cm, prisma kõrgus on 3 cm. Prisma servadeks on alumise ja ülemise põhja servad ning kolm serva, mis mõlemat põhja ühendavad. Kõigi servade kogupikkus on järelikult $2 \cdot (6 + 5 + 3) + 3 \cdot 3$ cm ehk 37 cm.

Eesti LIV matemaatikaolümpiaad

10. veebruar 2007 | Piirkonnavoor | **8. klass**

I osa vastused

1. 4

2. 81075

3. teine, neljas ja viies

4. 4

5. $-\dfrac{2}{3}$

6. 36

7. 120°

8. $\dfrac{\pi}{6}\ \mathrm{cm}^2$

9. 40°

10. $60\ \mathrm{cm}^2$

Lahendused

1. Kui oleme leidnud mingi arvu 2007^n üheliste numbri a, siis arvu 2007^{n+1} üheliste number on sama mis arvu $a \cdot 7$ üheliste number. Seega

n	0	1	2	3	4	5	6	7
2007^n üheliste number	1	7	9	3	1	7	9	3

Otsitava arvu üheliste number on sama mis arvu $9+1+1+3=14$ üheliste number.

2. Otsitava arvu $\overline{a107b}$ ristsumma peab jaguma 3-ga ning see arv peab lõppema 0-ga või 5-ga. Kui $a=9$, siis annavad $b=5$ ja $b=0$ arvu ristsummaks vastavalt 22 ja 17. Kui $a=8$, siis sobib $b=5$, ristsumma tuleb siis 21.

3. Jadas esinevate harilike murdude nimetajad on parajasti 4-ga jaguvad arvud Seega arv $\dfrac{2005}{2006}$ jadas ei esine, arv $\dfrac{2007}{2008}$ aga esineb. Viimase arvu ümbruses on jada liikmed

$$\ldots,\quad 2005,\quad 2006,\quad \frac{2007}{2008},\quad 2009,\quad 2010,\quad \ldots$$

4. Kahel kopal kulub nelja ühesuguse süvendi kaevamiseks $\dfrac{4}{3} \cdot 1{,}5 = 2$ tundi. Et saada valmis 2 korda kiiremini, peab koppasid olema 2 korda rohkem ehk 4.

5. *Lahendus 1.* Võrrandi lahend on $x = \frac{4}{a}$, selle pöördarv on $\frac{a}{4}$ ning viimase vastandarv on $-\frac{a}{4}$. Seega $-\frac{a}{4} = \frac{1}{6}$, millest $a = -\frac{2}{3}$.

Lahendus 2. Et lahendi x pöördarvu vastandarv on $\frac{1}{6}$, siis $x = -6$. Seega $a \cdot (-6) = 4$, kust $a = -\frac{2}{3}$.

6. Keskmisest ringist lähtudes saame 6 viisil valida esimese nulli. Iga sellise valiku korral saame 2 viisil valida teise nulli. Omakorda iga sellise valiku järel saame 3 viisil valida seitsme. Valikuvõimalusi on seega üldse $6 \cdot 2 \cdot 3 = 36$.

7. Täispööre on 360°. Kuue sektori nurkade suuruste summa on $3\alpha + 3\beta = 360^\circ$. Järelikult $\alpha + \beta = 120^\circ$.

8. Et poolringid on võrdse raadiusega, siis $|AC| = |AB| = |BC|$. Kolmnurk ABC on seega võrdkülgne ning $\angle BAC = 60^\circ$. Vaadeldava sektori pindala on seega $\frac{1}{6}$ sama raadiusega ringi pindalast ehk $\frac{1}{6} \cdot \pi \cdot 1^2 = \frac{\pi}{6}$ cm^2.

9. Et kolmnurk ABC on võrdhaarne, siis $\angle ABC = 70^\circ$ ja $\angle EBC = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$. Et kolmnurk BCD on võrdkülgne, siis $\angle BCD = 60^\circ$. Sirge CE on selle kolmnurga kõrgus ja ühtlasi nurgapoolitaja, mistõttu $\angle BCE = 30^\circ$. Kolmnurgast EBC saame nüüd $\angle CEB = 180^\circ - 110^\circ - 30^\circ = 40^\circ$.

10. Prisma põhja servade pikkused on 5 cm, 5 cm, 1 cm, 3 cm, prisma kõrgus on 3 cm. Põhjaks oleva trapetsi pindala on $\frac{5+1}{2} \cdot 3 = 9$ cm^2, kahe põhja pindala on seega 18 cm^2. Prisma külgpindala on põhja ümbermõõdu ja kõrguse korrutis ehk $(5 + 5 + 1 + 3) \cdot 3 = 42$ cm^2. Täispindala on $18 + 42 = 60$ cm^2.

Eesti LIV matemaatikaolümpiaad

10. veebruar 2007 Piirkonnavoor **9. klass**

I osa vastused

1. 4012

2. 79322

3. 45-ndal

4. 8 tundi

5. 3

6. 18

7. (a, b), (d, f).

8. $22{,}5°$

9. $6{,}4\ \mathrm{cm}^2$

10. $27\ \mathrm{cm}^3$

Lahendused

1. Avaldise väärtus on $2007 \cdot (2007 - 1) - 2006 \cdot (2006 - 1) = 2007 \cdot 2006 - 2006 \cdot 2005 = 2006 \cdot (2007 - 2005) = 2006 \cdot 2 = 4012$.

2. *Lahendus 1.* Otsitava arvu $\overline{7a32b}$ ristsumma peab andma 3-ga jagades jäägi 2 ning see arv peab lõppema 2-ga või 7-ga. Kui $a = 9$, siis $b = 7$ puhul saame ristsummaks 28, mis ei sobi, ent $b = 2$ puhul saame sobiva ristsumma 23.

Lahendus 2. Lahutades antud arvust 2, saame arvu $\overline{7x32y}$, mis jagub 15-ga täpselt (arvu eelviimane number selle operatsiooniga ei muutu). Saadud arvu viimane number on kas 0 või 5 ning tema ristsumma peab jaguma 3-ga. Kui $x = 9$ ja $y = 5$, siis saame ristsummaks 26, mis ei sobi. Kui $x = 9$ ja $y = 0$, siis saame sobiva ristsumma 21. Otsitav arv on sellest arvust 2 võrra suurem ehk 79322.

3. Jada koosneb kolmeliikmelistest plokkidest, kus viimasel kohal paikneb harilik murd, mille nimetaja jagub 4-ga. Vastava jagatise väärtus on parajasti ploki järjekorranumber. Et $60 = 4 \cdot 15$, siis otsitava liikmeni jõudmiseks kulub järjekorras lugedes 15 plokki ehk $3 \cdot 15 = 45$ elementi.

4. Neljal kopal kulub 12 ühesuguse süvendi kaevamiseks 12 tundi. Kuuel kopal kulub 12 süvendi kaevamiseks seega $\frac{4}{6} \cdot 12 = 8$ tundi.

5. Antud ruutfunktsioon on kujul $y = (x + 3)^2$, siit näeme, et graafiku haripunkt on $x = -3$ ning ta asub parajasti x-teljel. Haripunkti kaugus y-teljest on seega 3.

6. Olles arvu 200 moodustades jõudnud lähteruudu kohal asuva nullini (2 võimalust), saame valida numbri 7 kahel viisil, kokku 4 varianti. Analoogiliselt on 4 varianti lähteruudust paremal asuva nulli korral. Tabeli keskel paikneva nullini jõudmiseks on 2 võimalust ning numbri 7 võime lõppu lisada viiel viisil, kokku $2 \cdot 5 = 10$ varianti. Üldse on variante seega $4 + 4 + 10 = 18$.

7. Sirged a ja b on paralleelsed, sest nad lõikavad sirget d sama nurga all. Sirge c ei ole sirgega a paralleelne, sest nad lõikavad sirget e erineva nurga all. Vaadeldes nurki, mis tekivad sirgete d, e ja f lõikumisel sirgega a, saame, et ainukesena on paralleelsed sirged d ja f.

8. Piirdenurga suurus on pool samale kaarele toetuva kesknurga suurusest. Et O_1 on väiksema ringjoone keskpunkt ja $\angle AO_1B = 90°$, siis $\angle AO_2B = 45°$. Analoogiliselt on O_2 suurema ringjoone keskpunkt, seega $\angle AOB = 22{,}5°$.

9. Mediaanide lõikepunkt jaotab mediaani suhtes $2 : 1$. Seega $|AM| = 2|KM|$ ja $|BM| = 2|LM|$. Lisaks on KL kolmnurga kesklõik, mistõttu $|AB| = 2|KL|$. Seega on kolmnurk ABM sarnane kolmnurgaga MKL sarnasusteguriga 2 ning tema pindala on kolmnurga MKL pindalast 4 korda suurem.

10. Prisma põhja servade pikkused on 5 cm, 5 cm, 1 cm, 3 cm, prisma kõrgus on 3 cm. Põhjaks oleva trapetsi pindala on $\frac{5+1}{2} \cdot 3 = 9\ \mathrm{cm}^2$. Prisma ruumala on põhja pindala ja kõrguse korrutis ehk $9 \cdot 3 = 27\ \mathrm{cm}^3$.

Eesti LIV matemaatikaolümpiaad

10. veebruar 2007 Piirkonnavoor **7. klass**

II osa lahendused

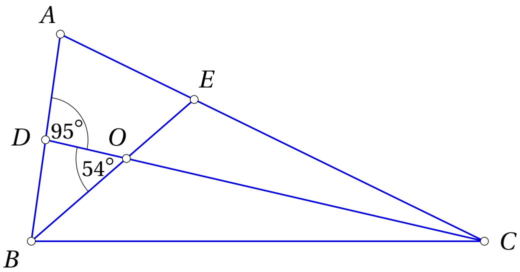
1. *Vastus:* 1986, 1965, 1944 ja 1923.

Lahendus 1. Olgu a ja b vastavalt vanuse kümneliste ja üheliste number. Perekonnaliikme vanus on siis $10a + b$ ning vanuse numbrite summa on $a + b$. Esimene arv peab olema teisest 7 korda suurem, seega $10a + b = 7(a + b)$, millest $3a = 6b$ ehk $a = 2b$. Juhtudel $b = 0$ ja $b \geqslant 5$ ei tule vanus kahekohaline, sest saaksime vastavalt $a = 0$ ja $a \geqslant 10$. Ülejäänud juhtudel, kui b on kas 1, 2, 3 või 4, tuleb a vastavalt kas 2, 4, 6 või 8 ning võimalikeks vanusteks saame 21, 42, 63 ja 84. Kõige noorema perekonnaliikme sünniaasta on $2007 - 21 = 1986$, samamoodi saame ülejäänute sünniaastateks vastavalt 1965, 1944 ja 1923.

Lahendus 2. Ülesande tingimustest järeldub, et iga pereliikme vanus peab jaguma 7-ga. Kõik 7-ga jaguvad kahekohalised arvud on 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70, 77, 84, 91 ja 98. Nende hulgas on oma numbrite summast täpselt 7 korda suuremad ainult arvud 21, 42, 63 ja 84, need ongi pereliikmete vanused. Nende järgi leiame pereliikmete sünniaastad 1986, 1965, 1944 ja 1923.

2. *Vastus:* AB.

Leiame kolmnurga nurgad (joonis 1). Et $\angle ADO = 95^\circ$, siis $\angle BDO = 180^\circ - 95^\circ = 85^\circ$. Kolmnurgas BDO on eelduste põhjal veel $\angle DOB = 54^\circ$, järelikult $\angle DBO = 180^\circ - 85^\circ - 54^\circ = 41^\circ$. Et sirge BO on nurgapoolitaja, siis $\angle ABC = 2 \cdot 41^\circ = 82^\circ$. Nüüd on teada kaks nurka kolmnurgas BDC, siit saame $\angle BCD = 180^\circ - 85^\circ - 82^\circ = 13^\circ$. Et ka sirge CD on kolmnurga



Joonis 1

nurgapoolitaja, siis $\angle ACB = 2 \cdot 13^\circ = 26^\circ$. Kolmnurga ABC kolmanda nurga suurus on $\angle BAC = 180^\circ - 82^\circ - 26^\circ = 72^\circ$. Kolmnurga lühim külg asub vähima nurga vastas, lühim külg on seega AB.

3. *Vastus:* 18 cm.

Kaarel lõikas oma postkaarti kaks korda, Joonas üks kord. Kõik lõiked peavad kulgema mööda vastaskülgede keskpunkte ühendavat sirget. Kui esimesel sammul oleksid Kaarel ja Joonas lõiganud oma postkaarte samamoodi, siis oleks Kaarlile pärast teist lõikamist jäänud Joonase omast kindlasti väiksema ümbermõõduga tükk. Seega lõikasid nad esimesel sammul postkaarte erineval viisil. Veelgi enam, ka teise lõike pidi Kaarel tegema Joonasest erinevas suunas, sest muidu oleks ta saanud tüki, mille üks külg on Joonase tükiga võrdse pikkusega, teine külg aga kaks korda lühem.

Olgu postkaardi pikema külje pikkus x sentimeetrit. Kui Joonas lõikas oma postkaardi pikisuunas, siis sai ta tüki mõõtmetega x cm ja 6 cm. Kaarel lõikas kaks korda ristisuunas ning sai tüki mõõtmetega $\frac{x}{4}$ cm ja 12 cm. Et tükkide ümbermõõdud on võrdsed, siis peab kehtima võrdus $2(x+6) = 2\left(\frac{x}{4} + 12\right)$, millest $\frac{3}{4}x = 6$ ja $x = 8$. See aga ei sobi, sest juba ristküliku lühema külje pikkus on 12 cm.

Kui aga Joonas lõikas oma postkaardi ristisuunas, siis sai ta tüki mõõtmetega $\frac{x}{2}$ cm ja 12 cm. Kaarel lõikas siis kaks korda pikisuunas ja sai tüki mõõtmetega x cm ja 3 cm. Seega $2\left(\frac{x}{2} + 12\right) = 2(x+3)$, millest $\frac{x}{2} = 9$ ja $x = 18$. See sobib ristküliku pikema külje pikkuseks.

II osa lahendused

1. *Vastus:* 52 ja 53.

   Lähtume arvust 23. See on saadud 5-ga jaguvas arvus viimase numbri kustutamisel. Seega enne kustutamist võis arv olla ainult kas 230 või 235 ning enne 5-ga korrutamist 46 või 47. Kumbki arv peab olema saadud 9-ga jaguvas arvus viimase numbri kustutamisel.

   - Arvu 46 ristsumma on 10, seega pidi viimane number olema 8 ja arv ise 468 ning enne 9-ga korrutamist 52.
   - Arvu 47 ristsumma on 11, sel juhul pidi olema viimane number 7, arv ise 477 ja enne 9-ga korrutamist 53.

   Igal sammul vaatasime läbi kõik võimalused, seega rohkem sobivaid arve ei ole.

2. *Vastus:* 44 m^2.

   Ristküliku $ABCD$ küljepikkused on $|AB| = 12$ m ja $|AD| = 9$ m. Nihutades külgede AB ja CD ääres asuvaid värvitud kujundeid paralleellükkega teineteise poole nii, et nad puutuvad külgepidi kokku, saame tulemuseks rööpküliku alusega 4 m ja kõrgusega $9 - 2 = 7$ m. Selle rööpküliku pindala on $4 \cdot 7 = 28\ \mathrm{m}^2$. Nihutades külgede AD ja BC ääres asuvad kujundid analoogiliselt horisontaalse paralleellükkega külgepidi kokku, saame tulemuseks ristküliku alusega $12 - 4 = 8$ m ja kõrgusega 2 m, selle ristküliku pindala on $8 \cdot 2 = 16\ \mathrm{m}^2$. Värvitud kujundite kogupindala on $28 + 16 = 44\ \mathrm{m}^2$.

3. *Vastus:* 3.

   Kolme ümbertõstmisega saab pähklite arvu võrdseks muuta järgmiselt:

Tõstmine	1. kuhjas	2. kuhjas	3. kuhjas
	22	14	12
1. → 2.	8	28	12
2. → 3.	8	16	24
3. → 1.	16	16	16

   Lisaks tuleb põhjendada, miks vähem kui kolmest ümbertõstmisest ei piisa. Pähklite koguarv on 48, mis tähendab, et igasse kuhja peab lõpuks jääma 16 pähklit. Pärast esimest ümbertõstmist jääb alati seis, kus igas kuhjas on 16-st erinev arv pähkleid. Teine ümbertõstmine puudutab ainult kahte kuhja ega saa seetõttu kõiki kolme arvu 16-ks muuta. Seega on vaja veel vähemalt ühte ümbertõstmist.

II osa lahendused

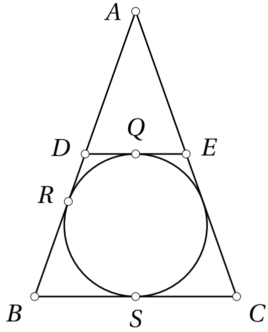
1. *Vastus:* 36% konnakoivaleotist, 18% põdrasamblatõmmist ja 46% kukejuureteed.

Lahendus 1. Ühes liitris nõiarohus oli 600 ml konnakoivaleotist, 300 ml põdrasamblatõmmist ja 100 ml kukejuureteed. Pärast poole ärakasutamist jäi pudelisse järele 300 ml konnakoivaleotist, 150 ml põdrasamblatõmmist ja 50 ml kukejuureteed, millele Nõia-Ella lisas 500 ml kukejuureteed, viimast sai kokku 550 ml. Tarvitades viiendiku uuest segust, jäi pudelisse järele 240 ml konnakoivaleotist, 120 ml põdrasamblatõmmist ja 440 ml kukejuureteed. Lõpuks pani Nõia-Ella juurde 200 ml algset segu, milles oli seega 120 ml konnakoivaleotist, 60 ml põdrasamblatõmmist ja 20 ml kukejuureteed. Kokku sai $240 + 120 = 360$ ml konnakoivaleotist, $120 + 60 = 180$ ml põdrasamblatõmmist ja $440 + 20 = 460$ ml kukejuureteed.

Lahendus 2. Et Nõia-Ella lisas pudelisse juurde ainult kas kukejuureteed või algset segu, siis ülejäänud kahe komponendi, konnakoivaleotise ja põdrasamblatõmmise omavaheline suhe segus jäi kogu aeg samasuguseks nagu alguses, st $36 : 18 = 2 : 1$. Leiame nüüd kukejuuretee koguse pudelis iga tegevuse järel. Algselt oli seda 100 ml, millest kontide raviks kulus ära 50 ml. Varbarohus oli kukejuureteed seega $50 + 500 = 550$ ml, millest alles jäi neli viiendikku ehk 440 ml. Lõpuks juurdevalatud 200 ml algses segus oli kukejuureteed 20 ml ning saadud külmarohus kokku seega $440 + 20 = 460$ ml ehk 46%. Et ülejäänud 54% moodustasid konnakoivaleotis ja põdrasamblatõmmis vahekorras $2 : 1$, siis oli konnakoivaleotist lõpuks 36% ja põdrasamblatõmmist 18%.

2. *Vastus:* $2 : 1$.

Olgu ABC vaadeldav kolmnurk, D ja E vastavalt haarade AB ja AC keskpunktid ning R siseringjoone puutepunkt kolmnurga haaraga AB (joonis 2). Lõik DE on siis kolmnurga kesklõik, ta on paralleelne alusega BC ning tema pikkus on pool aluse pikkusest. Olgu Q ja S vastavalt lõikude DE ja BC keskpunktid, siis ilmselt $\frac{|DQ|}{|BS|} = \frac{1}{2}$. Teiselt poolt on Q ja S sümmeetria tõttu punktid, kus kolmnurga siseringjoon puutub lõike DE ja BC. Puutujalõikude võrdsuse tõttu $|DQ| = |DR|$ ja $|BS| = |BR|$. Järelikult



Joonis 2

$\dfrac{|DR|}{|BR|} = \dfrac{1}{2}$. Nüüd

$$\frac{|AR|}{|RB|} = \frac{|AD| + |DR|}{|RB|} = \frac{|DB| + |DR|}{|RB|} = \frac{2 \cdot |DR| + |RB|}{|RB|} = 2 \cdot \frac{|DR|}{|RB|} + 1 = 2.$$

3. *Vastus:* 5 minutit.

Lahendus 1. 5 minutiga saavad kõik üle silla järgmiselt. Algul lähevad Notsu ja Ruu koos üle, siis tuleb Notsu tagasi, siis läheb Puhh üle, seejärel tuleb Ruu tagasi ning lõpuks lähevad Notsu ja Ruu uuesti koos üle.

Lisaks tuleb tõestada, et lühema ajaga pole sillaületamine võimalik. Kõige vähem aega võtva skeemi korral ei tohi Puhh üle minna esimesena, sest pärast seda oleks ainuke võimalus tal koos laternaga uuesti tagasi tulla, millega tekiks jälle esialgne seis. Analoogiliselt ei tohi Puhh üle minna viimasena, sest laterna selleks saaks ta tuua ainult ise teiselt kaldalt. Järelikult sisaldab kiireim skeem vähemalt 3 sillaületust edasisuunas, mille käigus latern viiakse lähtekaldalt ära, nende vahele jääb siis vähemalt 2 naasmist, mille käigus latern tuuakse lähtekaldale tagasi. Seega kestab kogu ettevõtmine vähemalt 5 minutit.

Lahendus 2. On ilmne, et lühima strateegia puhul ei või esineda sellist olukorda, kus sama rühm ületab silla kahel järjestikusel minutil edasi-tagasi. Esimesel minutil peab silla ületama rohkem kui üks tegelane, sest vastasel korral peaks ta kohe seejärel tagasi tulema. Ainuke võimalus on, et üle lähevad Notsu ja Ruu. Teisel minutil ei saa mõlemad korraga tagasi tulla. Et ülesande seisukohalt on Notsu ja Ruu samaväärsed, siis võime üldisust kitsendamata eeldada, et tagasi tuleb Notsu. Kolmandal minutil ei saa Notsu üksi tagasi minna, ei saa minna ka Puhh ja Notsu koos, järelikult läheb üle Puhh üksinda. Neljandal minutil ei saa Puhh üksi tagasi tulla, ta ei saa tulla ka koos Ruuga, järelikult tuleb Ruu üksinda. Viiendal minutil on Notsul ja Ruul võimalus koos sild ületada ning esmakordselt saavutada seis, kus kõik tegelased on teisel kaldal. Seega on lühim sillaületuseks kuluv aeg 5 minutit.

4. *Vastus:* $n = 3k$, kus $k = 0, 1, 2, \ldots$

Et $27 = 9 \cdot 3$, jagame antud arvu esmalt 9-ga ning tulemuse seejärel 3-ga. Arv $200\ldots07$ jagub alati 9-ga ning jagatis on $22\ldots23$. Selles on täpselt n kahte, sest jagatava iga nulli kohta tekib jagatisse üks kaks. Arv $22\ldots23$ jagub 3-ga parajasti siis, kui tema ristsumma $2n + 3$ jagub 3-ga. See omakorda leiab aset parajasti siis, kui n jagub 3-ga.

Lahendused

1. *Vastus:* 2.

Tähistame lühiduse mõttes $2007 = a$. Avaldise väärtus on siis

$$\begin{aligned}
&a(a+1)(a+2) + 2(a-1)a(a+1) - \\
&\qquad - (a-1)a^2 - a(a+1)^2 - (a-1)(a+1)(a+2) = \\
&= \big(a-(a-1)\big)(a+1)(a+2) + (a-1)a\big((a+1)-a\big) + \\
&\qquad + \big((a-1)-(a+1)\big)a(a+1) = \\
&= (a+1)(a+2) + (a-1)a - 2a(a+1) = \\
&= (a+1)\big((a+2)-a\big) + \big((a-1)-(a+1)\big)a = (a+1)\cdot 2 - 2a = 2.
\end{aligned}$$

2. *Vastus:* 40.

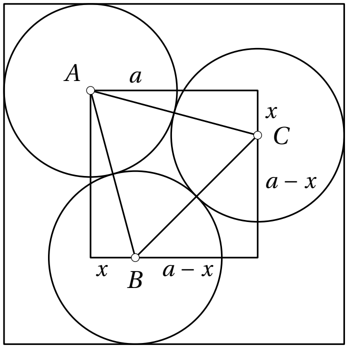
Olgu ostetud aktsiate koguväärtus algul N krooni, siis esimese aasta järel oli nende väärtus $1{,}25\,N$ krooni, teise aasta järel $0{,}75\cdot 1{,}25\,N$ krooni ning kolmanda aasta järel $0{,}8\cdot 0{,}75\cdot 1{,}25\,N = 0{,}75\,N$ krooni. Et aktsiate koguväärtus neljanda aasta järel oleks 5% esialgsest suurem, peaks see olema $1{,}05\,N$ krooni. Neljandal aastal peab aktsiate hind tõusma seega $\frac{1{,}05\,N}{0{,}75\,N} = 1{,}4$ korda ehk 40%.

3. *Vastus:* $(1,-2,1,-2)$ ning kõik nelikud $(a,0,-a,0)$, kus a on suvaline reaalarv.

Viete'i valemite põhjal

$$\begin{aligned}
c+d &= -a,\\
cd &= b,\\
a+b &= -c,\\
ab &= d.
\end{aligned}$$

Esimesest võrrandist saame $d = -a-c$, kolmandast aga $b = -c-a$, järelikult $d = b$. Teine ja neljas võrrand omandavad siis vastavalt kuju $cb = b$ ja $ab = b$. Kui $b \neq 0$, siis $c = 1$ ja $a = 1$ ning eelnevat arvestades $d = b = -c-a = -2$. Siit saame ühe sobiva neliku $(1,-2,1,-2)$. Kui aga $b = 0$, siis ka $d = 0$ ning esialgsed võrrandid annavad $c = -a$. Siit saame nelikud $(a,0,-a,0)$, kus a on suvaline reaalarv. Kontroll näitab, et kõik leitud nelikud sobivad.



Joonis 3

4. *Vastus:* $2 + \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$.

Vaatleme võrdkülgset kolmnurka ABC küljepikkusega 2, mille tippudeks on ringjoonte keskpunktid, ning ruutu, mis paikneb esialgse ruudu sees nii, et tema küljed on paralleelsed esialgse ruudu külgedega ning jäävad nendest kaugusele 1 (joonis 3). Kolmnurga ABC tipp A langeb siis kokku sisemise ruudu tipuga ning ülejäänud kaks tippu B ja C paiknevad sisemise ruudu külgedel sümmeetriliselt diagonaali suhtes.

Olgu a sisemise ruudu küljepikkus ning x kolmnurga tippude B ja C kaugus sisemise ruudu lähimast tipust. Rakendades Pythagorase teoreemi täisnurksetele kolmnurkadele hüpotenuusidega AC ja BC, saame $a^2 + x^2 = 2^2$ ja $(a-x)^2 + (a-x)^2 = 2^2$ ehk $a^2 + x^2 = 4$ ja $(a-x)^2 = 2$. Kahe viimase võrduse lahutamisel saame $2ax = 2$, mille abil omakorda $(a+x)^2 = 6$. Seega

$$a = \frac{(a-x)+(a+x)}{2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}.$$

Esialgse ruudu küljepikkus on niisiis $a + 2 = 2 + \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$.

5. *Vastus:* ainus selline arv on $k = 2$.

Üldisust kitsendamata võime eeldada, et a ja b on ühistegurita. Teisalt, korrutades antud võrduse pooled läbi teguriga ab, saame

$$a^2 + b^2 = kab,$$

kust on näha, et arvu a iga algarvuline tegur on ka b tegur ja vastupidi. Seega on ainsaks võimaluseks $a = b = 1$, mis annab $k = 2$.

6. *Vastus:* 5.

Et ühegi paki mass ei ületa 1 tonni, saab 3-tonnisele veokile alati laadida vähemalt 2 tonni pakke. Seega piisab 10-tonnise laadungi äravedamiseks 5 reisist. Ei piisa aga 4 reisist, sest kui laadung koosneb 13 ühesugusest pakist, igaüks massiga $\frac{10}{13}$ tonni, siis mahub neid 3-tonnisele veokile maksimaalselt 3, mis tähendab, et 4 reisiga saab ära vedada ülimalt 12 pakki.

Lahendused

1. *Vastus:* $x = 0$ ja kõik $x \geqslant 1$.

Lahendus 1. Kui $\big|x - |x-1|\big| = 1$, siis $x - |x-1|$ peab olema 1 või -1. Kui $x - |x-1| = 1$, siis $|x-1| = x-1$, ehk $x - 1 \geqslant 0$, kust $x \geqslant 1$. Kui $x - |x-1| = -1$, siis $|x-1| = x+1 = (x-1)+2$. See on võimalik ainult siis, kui $|x-1| = 1-x$, seega $1-x = x+1$, kust $x = 0$. Kontroll näitab, et kõik tingimust $x \geqslant 1$ rahuldavad arvud ning ka arv $x = 0$ sobivad antud võrrandi lahendiks.

Lahendus 2. Kui $x \geqslant 1$, siis $|x-1| = x-1$ ning $x - |x-1| = x-(x-1) = 1$ ja $\big|x-|x-1|\big| = |1| = 1$. Kui $x < 1$, siis $|x-1| = 1-x$ ning $x-|1-x| = x-(1-x) = 2x-1$. Võrrand $\big|x-|x-1|\big| = 1$ omandab niisiis kuju $|2x-1| = 1$, st $2x-1 = 1$ või $2x-1 = -1$. Kui $2x-1 = 1$, siis $x = 1$, mis on vastuolus eeldusega $x < 1$. Kui $2x-1 = -1$, siis $x = 0$.

2. *Vastus:* $a = \frac{2}{5}$; lõikepunktide koordinaadid on $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ ja $\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

Lahendus 1. Olgu (x_1, y_1) esimene lõikepunkt. Teine lõikepunkt on siis (y_1, x_1), sest mõlemad antud võrrandid on sümmeetrilised x ja y suhtes. Kui teise lõikepunkti x-koordinaat on esimese omast 2 korda suurem, siis $y_1 = 2x_1$ ning esimese lõikepunkti koordinaadid avalduvad kujul $(x_1, 2x_1)$. Tingimusest, et see punkt asub ringjoonel $x^2 + y^2 = 1$, saame $x_1^2 + 4x_1^2 = 1$, siit lõikepunktide koordinaatide positiivsust arvestades $x_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ ning $y_1 = \frac{2}{\sqrt{5}}$. Otsitavad lõikepunktid on seega $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ ja $\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$. Et punktid asuvad joonel $y = \frac{a}{x}$, siis $a = x_1 y_1 = \frac{2}{5}$.

Lahendus 2. Lõikepunktid (x, y) paiknevad nii joonel $y = \frac{a}{x}$ kui ka ringjoonel $x^2 + y^2 = 1$, mistõttu $x^2 + \frac{a^2}{x^2} = 1$ ehk

$$x^4 - x^2 + a^2 = 0.$$

Tähistades $z = x^2$, saame ruutvõrrandi $z^2 - z + a^2 = 0$, mille lahendid on meid huvitavate lõikepunktide x-koordinaatide x_1 ja x_2 ruudud. Viète'i valemitest saame niisiis, et $x_1^2 + x_2^2 = 1$. Vastavalt ülesande tingimusele

$x_2 = 2x_1$, seega $x_1^2 + 4x_1^2 = 1$, kust $x_1^2 = \frac{1}{5}$ ning $x_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ ja $x_2 = \frac{2}{\sqrt{5}}$. Et lõikepunktid (x_1, y_1) ja (x_2, y_2) paiknevad ringjoonel $x^2 + y^2 = 1$ ning $x_i > 0$ ja $a > 0$ tõttu ka $y_i > 0$, siis $y_1 = \sqrt{1 - x_1^2} = \frac{2}{\sqrt{5}}$ ja $y_2 = \sqrt{1 - x_2^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Et lõikepunktid (x_1, y_1) ja (x_2, y_2) paiknevad ühtlasi ka joonel $y = \frac{a}{x}$, siis $a = x_1 \cdot y_1 = x_2 \cdot y_2 = \frac{2}{5}$.

Lahendus 3. Samuti nagu eelmises lahenduses leiame, et lõikepunktide x-koordinaatide x_1 ja x_2 ruudud rahuldavad võrrandit $z^2 - z + a^2 = 0$. Selle ruutvõrrandi lahendid on $z_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4a^2}}{2}$. Olgu $x_2 = 2x_1$, siis $z_2 = x_2^2 = 4x_1^2 = 4z_1$ ehk

$$1 + \sqrt{1 - 4a^2} = 4 \cdot \left(1 - \sqrt{1 - 4a^2}\right),$$

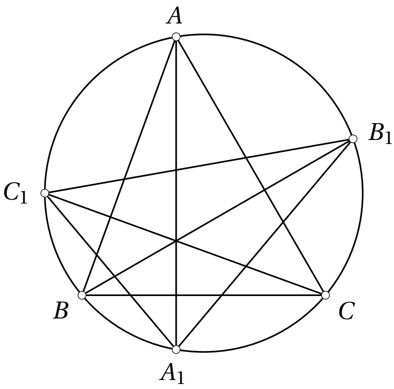
kust lihtsustades saame $5\sqrt{1 - 4a^2} = 3$ ehk $1 - 4a^2 = \frac{9}{25}$ ning $a^2 = \frac{4}{25}$. Et $a > 0$, siis $a = \frac{2}{5}$. Lõikepunktide x-koordinaatide ruudud on niisiis $x_1^2 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4a^2}}{2} = \frac{1}{5}$ ja $x_2^2 = 4x_1^2 = \frac{4}{5}$, kust $x_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ ja $x_2 = \frac{2}{\sqrt{5}}$. Et lõikepunktid (x_1, y_1) ja (x_2, y_2) asuvad ringjoonel $x^2 + y^2 = 1$ ning $x_i > 0$ ja $a > 0$ tõttu ka $y_i > 0$, siis $y_1 = \sqrt{1 - x_1^2} = \frac{2}{\sqrt{5}}$ ja $y_2 = \sqrt{1 - x_2^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

3. *Vastus:* värvitud hulknurga maksimaalne pindala on $\frac{2}{3}$, mis realiseerub $r = \frac{1}{3}$ korral.

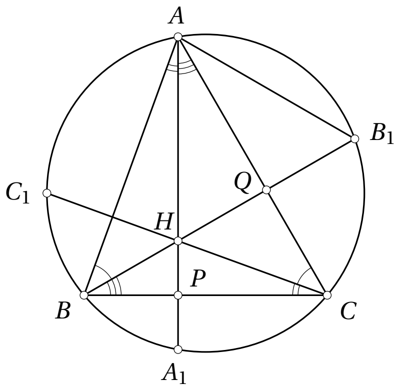
Neli värvimata kolmnurka ruudu nurkades annavad hüpotenuuse pidi kokku pannes kaks ruutu küljepikkusega r, ülejäänud neli värvimata kolmnurka annavad kaateteid pidi kokku pannes ruudu küljepikkusega $1-2r$. Nõutava kujundi pindala on seega

$$1 - 2r^2 - (1 - 2r)^2 = 4r - 6r^2 = 2r(2 - 3r).$$

Tegemist on ruutparabooliga, mille harud avanevad allapoole ning mille nullkohad on 0 ja $\frac{2}{3}$. Ruutparabooli haripunkt asub mõlemast nullkohast võrdsel kaugusel. Vaadeldava funktsiooni maksimumkoht on järelikult $r = \frac{1}{3}$ ning maksimaalne väärtus on $2 \cdot \frac{1}{3} \cdot (2 - 3 \cdot \frac{1}{3}) = \frac{2}{3}$.



Joonis 4



Joonis 5

Märkus. Avaldise $4r - 6r^2$ maksimumkoha saab leida ka täisruudu eraldamisega, esitades avaldise kujul

$$4r - 6r^2 = \frac{2}{3} - 6\left(r - \frac{1}{3}\right)^2.$$

Selle avaldise maksimumkoht on $r = \frac{1}{3}$ ning maksimaalne väärtus $\frac{2}{3}$.

4. *Lahendus 1.* Vaatleme kolmnurka $A_1B_1C_1$ (joonis 4). Et kaared AB_1 ja AC_1 on pikkuse poolest võrdsed, siis $\angle AA_1B_1 = \angle AA_1C_1$ ehk sirge A_1A on nurga $B_1A_1C_1$ poolitaja. Analoogiliselt on ka sirged B_1B ja C_1C vastavate nurkade poolitajad. Kolmnurga nurgapoolitajad aga lõikuvad ühes punktis.

Lahendus 2. Et kaarte AB_1 ja AC_1 pikkus on sama, siis $\angle ABB_1 = \angle ACC_1$ (joonis 5). Analoogiliselt $\angle BCC_1 = \angle BAA_1$ ja $\angle CAA_1 = \angle CBB_1$. Olgu α, β ja γ vastavalt nende kolme nurga suurused. Vaatleme kolmnurka APB, kus P on sirgete AA_1 ja BC lõikepunkt. Siin $\angle APB = 180^\circ - (\alpha + \beta + \gamma)$. Ent kolmnurga ABC sisenurkade summa on $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 180^\circ$, millest $\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$. Järelikult $\angle APB = 90^\circ$ ehk sirge AA_1 on sirgega BC risti ja kujutab endast seega kolmnurga ABC tipust A tõmmatud kõrgust. Analoogiliselt on ka sirged BB_1 ja CC_1 kõrgused. Kolmnurga kõrgused aga lõikuvad ühes punktis.

Lahendus 3. Tõestame esiteks, et punktid A_1, B_1 ja C_1, milles kolmnurga ABC kõrguste pikendused lõikuvad kolmnurga ümberringjoonega, rahuldavad ülesande eeldusi. Olgu P ja Q vastavalt kolmnurga tippudest A ja B tõmmatud kõrguste aluspunktid ning H kõrguste lõikepunkt. Ilmselt $\angle AB_1B = \angle ACB$ ja $\angle AHB_1 = \angle A_1HB$. Täisnurksed kolmnurgad QCB ja PHB on sarnased ühise teravnurga tõttu, seega $\angle QCB = \angle A_1HB$, millest $\angle AB_1H = \angle AHB_1$. Kolmnurk AB_1H on järelikult võrdhaarne ehk

$|AB_1| = |AH|$. Analoogiliselt saame $|AC_1| = |AH|$ ehk $|AB_1| = |AC_1|$. Samamoodi näitame, et $|BC_1| = |BA_1|$ ja $|CA_1| = |CB_1|$.

Teiseks tõestame, et ülesande tingimused määravad antud kolmnurga ABC korral punktid A_1, B_1 ja C_1 üheselt. Olgu α kaartele AB_1 ja AC_1 vastav piirdenurk, β kaartele BC_1 ja BA_1 vastav piirdenurk ning γ kaartele CA_1 ja CB_1 vastav piirdenurk nagu lahenduses 2. Need suurused peavad rahuldama võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} \alpha + \beta = \angle BCA \\ \beta + \gamma = \angle CAB \\ \gamma + \alpha = \angle ABC. \end{cases}$$

Võrduste liitmisel saame $2(\alpha + \beta + \gamma) = \angle BCA + \angle CAB + \angle ABC = 180^\circ$, millest $\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$. Lahutades viimasest võrdusest järjestikku võrrandisüsteemi üksikud võrrandid, leiame $\alpha = 90^\circ - \angle CAB$, $\beta = 90^\circ - \angle ABC$ ja $\gamma = 90^\circ - \angle BCA$. Kolmnurga ABC nurgad määravad seega üheselt α, β ja γ, viimased omakorda määravad üheselt punktid A_1, B_1 ja C_1.

Kokkuvõttes näeme, et antud kolmnurga ABC korral on A_1, B_1 ja C_1 parajasti kõrguste pikenduste lõikepunktid kolmnurga ümberringjoonega, kõrgused aga lõikuvad ühes punktis.

5. *Vastus:* ainus sobiv arvupaar on $(p-1, p^2-p)$.

Lahendus 1. Korrutades antud võrduse pooled läbi teguriga pab, saame

$$pb - pa = ab.$$

See võrdus on samaväärne võrdusega $ab + pa - pb - p^2 = -p^2$ ehk

$$(a-p)(b+p) = -p^2.$$

Arvu $-p^2$ saab esitada kahe vastandmärgilise teguri korrutisena, kuid selleks, et a ja b oleksid positiivsed, peab teine tegur $b+p$ olema suurem kui p. Et p on algarv, siis ainukese võimalusena $b+p = p^2$ ja $a-p = -1$, millest $a = p-1$ ja $b = p^2 - p$.

Lahendus 2. Korrutades võrduse pooli teguriga pab, saame

$$pb - pa = ab.$$

Et selle võrduse parem pool peab jaguma algarvuga p, peab kas a või b jaguma p-ga. Kui $a = px$, siis võime võrduse ümber kirjutada kujul $b - px = xb$ ehk $b(x-1) = -px$. Siin on vasak pool mittenegatiivne ja parem pool negatiivne, seetõttu sellel võrrandil lahendid puuduvad. Kui $b = px$, siis võime võrduse ümber kirjutada kujul $px - a = ax$ ehk $a(x+1) = px$. Et arvud $x+1$ ja x on ühistegurita, peab a jaguma x-ga. Samas p on algarv, mistõttu parema poole ainsad x-ga jaguvad tegurid on x ja px. Juht $a = px$ eelneva põhjal lahendeid ei anna, juhul $a = x$ saame $x+1 = p$, millest $a = x = p-1$ ja $b = p(p-1)$.

6. *Lahendus 1.* Eeldame, et kokkulugemise tulemusena saame k arvu n_1, n_2, $\ldots$, n_k. Seejuures on k paarisarv, sest ridu ja veerge on antud juhul võrdselt ning ka üht- ja teistpidi diagonaale on võrdselt. Iga must ruut läheb arvesse parajasti 4 arvu leidmisel, seega kõigi arvude summa $n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ jagub 4-ga ning on järelikult paarisarv. See on võimalik ainult siis, kui paarituid liidetavaid on summas paarisarv. Et liidetavate koguarv k on paarisarv, peab summas ka paarisliidetavaid olema paarisarv.

Lahendus 2. Nimetame ridu, veerge ja diagonaale üldnimega *liinideks.* Olgu N paarisarvu musti ruute sisaldavate liinide koguarv ruudustikus. Vaatleme sammu, kus üks valge ruut värvitakse mustaks. Selle tulemusena muutub mustade ruutude arvu paarsus neljal liinil. Kui kõigil neist neljast liinist oli algselt paarisarv (paaritu arv) musti ruute, siis N väheneb (vastavalt suureneb) 4 võrra. Kui neljast liinist kolmel oli paarisarv ja ühel paaritu arv musti ruute (või vastupidi), siis N muutub 2 võrra. Kui aga nende nelja liini hulgas oli võrdselt paarisarvulise ja paarituarvulise mustade ruutude arvuga liine, siis jääb N muutumatuks. Seega operatsiooni tulemusena arvu N paarsus ei muutu.

Vaatleme nüüd algseisu, kus kõik ruudud on valged. Et ruudustikus on kokku paarisarv liine ning igal neist on paarisarv 0 musti ruute, siis on N siin paarisarv. Mis tahes võimaliku ruudustiku värvimise saame sellisest algseisust lõpliku arvu eespool kirjeldatud sammude abil. Et ühelgi sammul ei muutu arvu N paarsus, siis on N paarisarv iga värvimise korral.

Märkus. Ülesande väide kehtib kõigi $m \times n$ ruudustike korral, kus $m + n$ on paarisarv. Kui aga $m + n$ on paaritu arv, siis kehtib vastupidine väide: ridu, veerge ja diagonaale, kus esineb paarisarv musti ruute, on kokku paaritu arv.

Eesti LIV matemaatikaolümpiaad

10. veebruar 2007 Piirkonnavoor **12. klass**

Lahendused

1. *Vastus:* $(1-n, 2)$, $(n+1, 0)$ ja $(-n-1, -2)$.

Olgu $A(0, -1)$, $B(-n, 0)$ ja $C(1, 1)$ rööpküliku tipud. Neljandaks tipuks D sobivaid punkte on kolm: vastavalt sellele, milline lõikudest AB, BC ja CA on rööpküliku diagonaal.

- Kui BC on diagonaal, siis on tegemist rööpkülikuga $CABD$ ning $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} = (-n, 1)$, kust saame neljanda tipu $D(1-n, 2)$.
- Kui CA on diagonaal, siis on tegemist rööpkülikuga $ABCD$ ning $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = (n+1, 1)$, kust saame neljanda tipu $D(n+1, 0)$.
- Kui AB on diagonaal, siis on tegemist rööpkülikuga $BCAD$ ning $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CA} = (-1, -2)$, kust saame tipu $D(-n-1, -2)$.

2. *Vastus:* $a = \frac{5}{4}$; puutepunktide koordinaadid on $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ ja $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

Lahendus 1. Ülesandes nimetatud parabool avaneb ülespoole ning selle telg ühtib ringjoone sümmeetriateljega. Et $a > 1$, siis paikneb parabooli tipp koordinaatteljestikus ringjoonest allpool. Parabooli ja ringjoone ühised punktid esinevad seega sümmeetriliselt paaridena, kus y-koordinaadid on võrdsed ning x-koordinaadid absoluutväärtuselt võrdsed ja vastasmärgilised. Antud tingimustel saab ühiseid punkte olla 4 (kui parabool lõikab ringjoont), 2 (kui parabool puutub ringjoont) või 0.

Puutepunktid (x, y) paiknevad nii paraboolil $y = x^2 - a$ kui ka ringjoonel $x^2 + y^2 = 1$, mistõttu $(y + a) + y^2 = 1$ ehk

$$y^2 + y + (a-1) = 0.$$

Eeldusel $a > 1$ puutuvad parabool ja ringjoon parajasti siis, kui sellel ruutvõrrandil on üksainus lahend ehk tema diskriminant võrdub nulliga. Seega $D = 1-4(a-1) = 5-4a = 0$, kust $a = \frac{5}{4}$. Puutepunktide ühine y-koordinaat on siis $y_{1,2} = -\frac{1}{2}$ ning x-koordinaadid on $x_{1,2} = \pm\sqrt{1 - y_{1,2}^2} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lahendus 2. Samuti nagu esimeses lahenduses määrame parabooli ja ringjoone ühiste punktide võimalikud asukohad eeldusel $a > 1$. Puutepunktid (x, y) paiknevad nii paraboolil $y = x^2 - a$ kui ka ringjoonel $x^2 + y^2 = 1$, mistõttu $x^2 + (x^2 - a)^2 = 1$ ehk

$$x^4 + (1-2a)x^2 + (a^2 - 1) = 0.$$

Tähistades $z = x^2$, saame ruutvõrrandi $z^2 + (1-2a)z + (a^2-1) = 0$, mille lahendid on parabooli $y = x^2 - a$ ja ringjoone $x^2 + y^2 = 1$ ühiste punktide x-koordinaatide ruudud. Kui ringjoon ja parabool puutuvad, siis on sellel ruutvõrrandil üksainus lahend ehk $D = (1-2a)^2 - 4(a^2-1) = 5 - 4a = 0$, kust $a = \frac{5}{4}$. Ruutvõrrandi ainus lahend on sel juhul $z = \frac{2a-1}{2}$. Seega puutepunktide x-koordinaadid on $x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{2a-1}{2}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ ning nende ühine y-koordinaat on $y_{1,2} = x_{1,2}^2 - \frac{5}{4} = \frac{3}{4} - \frac{5}{4} = -\frac{1}{2}$.

3. *Vastus:* $\frac{1}{3}$.

Olgu V risttahuka ruumala. Lõigates risttahukast välja kujundi $BDFH$, jäävad järele püramiidid $ABHD$, $CDFB$, $EFDH$ ja $GHBF$. Need neli püramiidi on kõik võrdse ruumalaga, sest nende põhjad jaotavad risttahuka kaks vastastahku pooleks, püramiidide ühiseks kõrguseks aga on samade vastastahkude vaheline kaugus. Ühe püramiidi, näiteks $ABHD$ ruumala on

$$\frac{1}{3} \cdot S_{AHD} \cdot |AB| = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot |AH| \cdot |AD| \cdot |AB| = \frac{1}{6} V.$$

Nelja püramiidi ruumala on järelikult $4 \cdot \frac{1}{6} V = \frac{2}{3} V$ ning kujundi $BDFH$ ruumala $V - \frac{2}{3} V = \frac{1}{3} V$.

Märkus. Ülesande väide kehtib tegelikult ka üldisemalt, suvalise rööptahuka $ABCDEFGH$ korral. Tõestus on analoogiline ülaltoodud lahendusega.

4. *Vastus:* 8.

Olgu klaviatuuril k klahvi, sealhulgas m modaalklahvi. Tavaklahve on siis $k-m$. Iga tavaklahviga kombineerub modaalklahvide hulga suvaline alamhulk; selliseid alamhulki on 2^m. Programmide käivitamiseks sobivate klahvikombinatsioonide arv on seega $2^m(k-m)$.

Kui $k = 8$, siis võime võtta $m = 7$: sel juhul on erinevaid klahvikombinatsioone eelneva valemi põhjal $2^7(8-1) = 128$ ehk tõepoolest vähemalt 100. Kui $k \leqslant 7$, siis $2^m(k-m) \leqslant 2^m(7-m)$, selle võrratuse parem pool on m võimalike väärtuste $m = 0, \ldots, 7$ korral alati 100-st väiksem:

m	0	1	2	3	4	5	6	7
$2^m(7-m)$	7	12	20	32	48	64	64	0

5. *Vastus:* $(p+1, p^2+p)$, $(2p, 2p)$ ja $(p^2+p, p+1)$.

Lahendus 1. Korrutades antud võrduse pooled läbi teguriga pab, saame

$$pa + pb = ab.$$

See võrdus on samaväärne võrdusega $ab - pa - pb + p^2 = p^2$ ehk

$$(a-p)(b-p) = p^2.$$

Arvu p^2 saab esitada kahe positiivse või kahe negatiivse teguri korrutisena, kuid selleks, et a ja b oleksid positiivsed, peavad mõlemad tegurid olema suuremad kui $-p$. Arvestades lisaks, et p on algarv, saame parajasti järgmised võimalused:

- $a - p = 1$, $b - p = p^2$, millest $a = p + 1$ ja $b = p^2 + p$;
- $a - p = p$, $b - p = p$, millest $a = 2p$ ja $b = 2p$;
- $a - p = p^2$, $b - p = 1$, millest $a = p^2 + p$ ja $b = p + 1$.

Lahendus 2. Korrutades võrduse pooli teguriga pab, saame

$$pa + pb = ab.$$

Et selle võrduse parem pool peab jaguma algarvuga p, peab kas a või b jaguma p-ga. Kui $a = px$, siis võime võrduse ümber kirjutada kujul $px + b = xb$ ehk $b(x-1) = px$. Et arvud $x-1$ ja x on ühistegurita, peab b jaguma x-ga. Samas p on algarv, mistõttu parema poole ainsad x-ga jaguvad tegurid on x ja px. Seega saame järgmised võimalused:

- $b = x$ ja $x - 1 = p$, millest $x = p + 1$ ning $a = p(p+1)$, $b = p + 1$;
- $b = px$ ja $x - 1 = 1$, millest $x = 2$ ning $a = 2p$, $b = 2p$.

Kui aga $b = px$, siis tulevad sümmeetria tõttu vastuseks samasugused arvupaarid, ainult a ja b väärtused on eelnevaga võrreldes vahetatud.

6. *Lahendus 1.* Pärast poolte 3-ga korrutamist ja sarnaste liikmete koondamist näeme, et ülesande võrratus on samaväärne võrratusega

$$2|AB|^2 + 2|BC|^2 > |CA|^2.$$

Kasutades kolmnurgavõrratuse $|AB| + |BC| > |CA|$ ruututõstmisel tekkivat võrratust $|AB|^2 + |BC|^2 + 2 \cdot |AB| \cdot |BC| > |CA|^2$ ning aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vahelist võrratust $|AB|^2 + |BC|^2 \geqslant 2 \cdot |AB| \cdot |BC|$, saame

$$2|AB|^2 + 2|BC|^2 \geqslant |AB|^2 + |BC|^2 + 2 \cdot |AB| \cdot |BC| > |CA|^2.$$

Lahendus 2. Täiendame kolmnurga ABC rööpkülikuks $ABCD$ nii, et lõik AC oleks tema diagonaal. Et rööpküliku küljepikkuste ruutude summa võrdub diagonaalide pikkuste ruutude summaga, siis

$$2(|AB|^2 + |BC|^2) = |AC|^2 + |BD|^2 > |AC|^2.$$

Seega $2(|AB|^2 + |BC|^2) > |AC|^2$, mis on samaväärne tõestatava võrratusega.

Märkus. Suurim kordaja c, mille puhul suvalises kolmnurgas ABC kehtib võrratus

$$|AB|^2 + |BC|^2 > c\left(|AB|^2 + |BC|^2 + |CA|^2\right),$$

on $c = \frac{1}{3}$. Vaatleme kolmnurka ABC, milles $|AB| = |BC| = 1$. Koosinusteoreemist $|CA|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |BC| \cdot \cos\angle ABC = 2 - 2\cos\angle ABC$. Kõne all olev võrratus omandab siis kuju $2 > c\,(4 - 2\cos\angle ABC)$ ehk $\cos\angle ABC > 2 - \frac{1}{c}$. Kui $c > \frac{1}{3}$, siis $2 - \frac{1}{c} > -1$, sel juhul saab valida nurga ABC suuruse nii, et võrdhaarne kolmnurk ABC võrratust ei rahulda.

Lp hindaja!

1. Juhime Teie tähelepanu sellele, et alljärgnevas on 7.–9. klasside olümpiaadi I osa (testi) ning kõikide ülejäänud ülesannete hindamisjuhised esitatud erinevalt. Testide iga küsimuse jaoks on eraldi loetletud või kirjeldatud vastused, mille eest tuleks anda vastavalt kaks punkti või üks punkt (st vastavaid punkte ühe küsimuse piires *ei tule* liita). Testiülesannete lahendusi õpilased ei pea esitama, vaid kirjutavad ülesannete lehel vastavale punktiirile ainult vastuse. Seevastu kõigi teiste ülesannete kohta tuleb esitada täielikud lahendused, ainult vastustest ei piisa. Nende ülesannete lahendused on hindamisjuhistes jaotatud võimalust mööda osadeks (etappideks) ning näidatud lahenduse iga osa eest antav punktide arv (st ühe ülesande eest antava punktisumma saamiseks *tuleb* lahenduse erinevate osade eest antud punktid liita).

2. Enamiku ülesannete korral (v.a testid ja tõestusülesanded) on hindamisjuhiste lõpus eraldi näidatud, mitu punkti anda ainult õige vastuse eest. See hinne on mõeldud juhuks, kui puhtandis on antud ainult ülesande vastus ning mustand (üldse või selle ülesande kohta) *puudub*. Mustandi olemasolul tuleks sel juhul hindamisel arvestada ka seal kirjapandut.

3. Žürii lahendustes ja käesolevates hindamisjuhistes on ülesannete arvulised vastused esitatud enamasti ainult ühel, lihtsaimal või kõige tõenäolisemalt esineval kujul. Hindamisel (sh testid!) tuleb võrdselt õigeks lugeda ka sama vastuse teised mõistlikud esitusviisid: taandatud või taandamata hariliku murruna, segaarvuna, kümnendmurruna, sõnadega välja kirjutatuna. Juhud, kus ülesande sisu tingib erandeid sellest üldreeglist, on eraldi mainitud vastava ülesande hindamisjuhises. Liigisõna vastuse järel ei ole nõutav: nt „3“ ja „3 karu“ on võrdväärselt õiged vastused, samuti „20“ ja „20%“, kui küsimus on „Mitu protsenti …?“. Ühik on nõutav juhtudel, kus sama vastuse arvväärtus erinevates ühikutes väljendatuna oleks erinev (cm, cm^2, ka kraadimärk nurkade korral): testide hindamisjuhistes on sellised juhud eraldi välja toodud.

4. Mõnede ülesannete kohta, mida saab lahendada mitmel oluliselt erineval viisil, anname eraldi hindamisskeemid erinevate lahendusviiside jaoks. Rõhutame, et iga konkreetset mittetäielikku lahendust tuleb hinnata ainult *ühe* sellise skeemi järgi (selle järgi, mille kohaselt ta saaks kõige rohkem punkte).

5. Kahtlemata esineb õpilaste töödes ka mõttekäike, mis ei mahu meie poolt pakutud skeemidesse. Selliste lahenduste hindamisel tuleb lähtuda sellest, *kui suur osa* antud ülesandest on õpilasel lahendatud, kasutades lahenduse üksikute osade kaalu määramisel võimaluse korral võrdluseks punktide jaotust meie pakutud hindamisskeemides.
6. *Mistahes* täieliku ja matemaatiliselt korrektse lahenduse eest tuleb igal juhul anda maksimumpunktid, sõltumata selle lahenduse pikkusest või otstarbekusest võrreldes teiste lahendusviisidega.

Eesti LIV matemaatikaolümpiaad

10. veebruar 2007 | Piirkonnavoor | **7. klass**

I osa hindamisjuhised

1.
- Antud õige vastus 2007: 2 p

2.
- Antud õige number 7: 2 p
- Antud vastuseks kogu arv 31077: 1 p

3.
- Tähistatud täpselt kaks õiget võrratust $\frac{11}{175} < \frac{19}{175}$ ja $\frac{17}{23} > \frac{71}{231}$: 2 p
- Tähistatud kaks õiget võrratust ja lisaks üks vale: 1 p
- Tähistatud ainult üks õige võrratus ja muud tähistamata: 1 p

4.
- Antud õige vastus „pianist“: 2 p

5.
- Antud vastuseks arv $\frac{5}{2}$: 2 p
- Vastus antud summa kujul $1 + \frac{3}{2}$: 1 p

6.
- Antud õige vastus 12: 2 p

7.
- Kirjutatud esimesse lünka „niisama pikk kui“, teise lünka „pikem kui“ ja kolmandasse lünka „lühem kui“: 2 p
- Õigesti täidetud kaks lünka, üks täitmata või vale: 1 p

8.
- Antud õige vastus 30°: 2 p
- Antud vastuseks arv 30 ilma kraadimärgita: 1 p
- Antud vastus kujul $\frac{90^\circ}{3}$: 1 p

9.
- Antud õige vastus 6π cm^2 või 6π: 2 p
- Antud vastuseks 6π vale ühikuga: 1 p
- Antud vastuseks 18,84 cm^2, 18,84 või täpsem ligikaudne väärtus õige ühikuga või ilma ühikuta: 1 p

10.
- Antud õige vastus 37 cm: 2 p
- Antud vastuseks arv 37 ilma ühikuta või vale ühikuga: 1 p

Eesti LIV matemaatikaolümpiaad

10. veebruar 2007 Piirkonnavoor **8. klass**

I osa hindamisjuhised

1.
- Antud õige vastus 4: 2 p

2.
- Antud õige vastus 81075: 2 p
- Antud vastuseks 71070: 1 p

3.
- On tähistatud parajasti kolm arvu 2006, $\dfrac{2007}{2008}$ ja 2010: 2 p
- Tähistatud kaks õiget arvu ja ülejäänud tähistamata: 1 p

4.
- Antud õige vastus 4: 2 p

5.
- Antud õige vastus $-\dfrac{2}{3}$: 2 p
- Antud vastuseks arv $\dfrac{2}{3}$: 1 p

6.
- Antud õige vastus 36: 2 p

7.
- Antud õige vastus 120°: 2 p
- Antud vastuseks arv 120 ilma kraadimärgita: 1 p
- Antud vastus kujul $\dfrac{360^\circ}{3}$: 1 p

8.
- Antud õige vastus $\dfrac{\pi}{6}$ cm^2 või $\dfrac{\pi}{6}$: 2 p
- Antud vastuseks $\dfrac{\pi}{6}$ vale ühikuga: 1 p
- Antud vastuseks 0,52 cm^2, 0,52 või täpsem ligikaudne väärtus õige ühikuga või ilma ühikuta: 1 p

9.
- Antud õige vastus 40°: 2 p
- Antud vastuseks arv 40 ilma kraadimärgita: 1 p

10.
- Antud õige vastus 60 cm^2: 2 p
- Antud vastuseks arv 60 ilma ühikuta või vale ühikuga: 1 p

Eesti LIV matemaatikaolümpiaad

10. veebruar 2007 Piirkonnavoor **9. klass**

I osa hindamisjuhised

1.
- Antud õige vastus 4012: 2 p

2.
- Antud õige vastus 79322: 2 p
- Antud vastuseks 79320 või 77327 1 p

3.
- Antud õige vastus 45: 2 p

4.
- Antud õige vastus 8 tundi: 2 p
- Antud vastuseks arv 8 ilma ühikuta või vale ühikuga: 1 p

5.
- Antud õige vastus 3: 2 p

6.
- Antud õige vastus 18: 2 p
- Antud vastuseks arv 14: 1 p

7.
- Loetletud parajasti kaks õiget paralleelsete sirgede paari: 2 p
- Loetletud kaks paralleelsete sirgete paari ja lisaks veel täpselt üks muu paar: 1 p
- Loetletud ainult üks paralleelsete sirgete paar: 1 p

8.
- Antud õige vastus $22{,}5^\circ$: 2 p
- Antud vastuseks $\frac{45^\circ}{2}$: 2 p
- Antud vastuseks $\frac{90^\circ}{4}$: 1 p
- Antud vastuseks arv 22,5 ilma kraadimärgita: 1 p

9.
- Antud õige vastus $6{,}4\ \mathrm{cm}^2$: 2 p
- Antud vastuseks arv 6,4 ilma ühikuta või vale ühikuga: 1 p

10.
- Antud õige vastus $27\ \mathrm{cm}^3$: 2 p
- Antud vastuseks arv 27 ilma ühikuta või vale ühikuga: 1 p

Eesti LIV matemaatikaolümpiaad

10. veebruar 2007 Piirkonnavoor **7. klass**

II osa hindamisjuhised

1. Vastavalt žürii lahendustele 1 ja 2 anname kaks hindamisskeemi.

Lahendus numbritevahelise seose leidmisega.

- Leitud õige seos $a = 2b$ vanuse numbrite vahel: 3 p
- Määratud perekonnaliikmete vanused: 2 p
- Leitud kõigi perekonnaliikmete sünniaastad: 2 p

Lahendus juhtude läbivaatamisega.

- Kirjutatud välja kõik 7-ga jaguvad kahekohalised arvud: 2 p
- Valitud nende hulgast välja kõik need, mis on oma numbrite summast 7 korda suuremad: 3 p
- Leitud kõigi perekonnaliikmete sünniaastad: 2 p

Kui leitud on kolm õiget sünniaastat ja üks vale või puudu, siis anda 1 punkt vähem. Kui on leitud neli vale sünniaastat, mis moodustavad aritmeetilise jada vahega 21, siis anda samuti 1 punkt vähem.

Ainult õige vastuse eest (kõik neli õiget sünniaastat) ilma selgitusteta anda 2 punkti. Osaliselt õiget vastust hinnata eelmise lõigu põhjal.

2.

- Leitud nurk DBO: 1 p
- Leitud nurk ABC: 1 p
- Leitud nurk BCA: 1 p
- Leitud nurk CAB: 1 p
- On lisatud vajalikud selgitused ja/või arvutused: 1 p
- Leitud lühim külg AB ja antud põhjendus: 2 p

Ainult õige vastuse eest ilma selgitusteta anda 1 punkt. Kui on tehtud joonis ja sellele kantud kõik vajalikud nurgad, aga selgitused ja/või arvutused puuduvad, anda 4 punkti.

3.

- On olemas tähelepanek, et lõigata saab vaid piki vastaskülgede keskpunkte ühendavaid lõike (ilma põhjendusteta): 1 p
- Selgitatud, miks esimesel korral ei saa lõigata mõlemat ristkülikut ühte moodi: 1 p
- Juht, kus Kaarel teeb lõiked erinevas suunas: 1 p
- Juht, kus Joonas lõikab piki pikemat külge: 2 p
- Juht, kus Joonas lõikab piki lühemat külge: 2 p

Kummaski viimasest kahest juhust anda ainult 1 punkt, kui saadud vastust pole ülesande tingimuste suhtes kontrollitud.

Ainult õige vastuse eest ilma selgitusteta anda 2 punkti. Osaliselt õige vastuse eest (õige pikkus ja täpselt üks vale pikkus), anda 1 punkt.

II osa hindamisjuhised

1. Selle ülesande kohta anname eraldi kaks hindamisskeemi.

   Lahendus lõpust alustades (žürii lahendus).
   - Pärast viiega korrutamist saadud arvude 230 ja 235 leidmise eest: 2 p
   - Enne viiega korrutamist saadud arvude 46 ja 47 leidmise eest: 2 p
   - Pärast üheksaga korrutamist saadud arvude 468 ja 477 leidmise eest: 2 p
   - Esialgsete arvude 52 ja 53 leidmise eest: 1 p

   Kui on algusest peale leitud vaid üks sobivatest arvudest, siis anda 4 punkti.

   Vastused leitud proovimise teel.
   - Proovimise teel leitud üks arvudest 52 ja 53: 2 p
   - Näidatud, et see rahuldab kõiki ülesande tingimusi: 1 p
   - Proovimise teel leitud teine arvudest 52 ja 53: 1 p
   - Näidatud, et see rahuldab kõiki ülesande tingimusi: 1 p
   - Põhjendatud, et selliseid arve rohkem ei ole: 2 p

   Ainult õige vastuse (kaks arvu) eest ilma selgitusteta anda 2 punkti. Ainult ühe õige vastuse või kahe õige ja ühe vale vastuse puhul anda 1 punkt.

2. - Leitud kahe värvitud rööpküliku pindala: 2 p
   - Leitud kahe värvitud trapetsi pindala: 3 p
   - Antud õige lõppvastus: 2 p

   Ainult õige vastuse eest ilma selgitusteta anda 2 punkti.

   Kui vastuses on ühik puudu või vale, kuid vastus on muidu õige, siis anda selle eest 1 punkt.

3. - Näidatud kolm ümbertõstmist, millega on võimalik võrdsustada pähklite arvud kuhjades: 4 p
   - Tehtud tähelepanek, et igas kuhjas peab olema 16 pähklit: 1 p
   - Põhjendatud, et vähem kui kolme ümbertõstmisega pole võimalik nõutavat olukorda saavutada: 2 p

   Kui pähklite arvu võrdsustamiseks on kasutatud enam kui kolme ümbertõstmist, anda esimese rea punktide asemel 2 punkti.

   Ainult õige tabeli (skeemi) eest ilma selgitusteta anda kolme ümbertõstmise korral 3 punkti, enamate ümbertõstmiste korral 2 punkti. Ainult õige vastuse (arvu) eest ilma selgitusteta anda 1 punkt.

II osa hindamisjuhised

1. Selle ülesande lahenduses saab ilmselt arutleda paljudel erinevatel viisidel. Anname siin eraldi hindamisskeemid lahenduste jaoks segu kõigi kolme komponendi koguste jälgimise abil (žürii lahendus 1) ning kasutades kahe esimese komponendi suhte jäävust (žürii lahendus 2).

Lahendus kõigi kolme komponendi koguste leidmise abil.

- Koostisosade koguste leidmise eest 500 ml kukejuuretee juurdevalamise järel: 3 p
- Lahendus lõpule viidud (leitud koostisosade kogused lõplikus segus): 4 p

Lahendus kahe esimese komponendi suhte jäävust kasutades.

- Tähelepanek, et kahe esimese komponendi omavaheline suhe segus ei muutu kõigi tegevuste jooksul: 2 p
- Leitud kukejuuretee kogus ja kahe esimese komponendi summaarne kogus lõplikus segus: 3 p
- Lahendus lõpule viidud (eelneva põhjal leitud kummagi ülejäänud komponendi kogused): 2 p

Õige lahenduse eest anda täispunktid olenemata sellest, kas koostisosade kogused lõplikus segus on leitud absoluutkogustena (näiteks ml) või osakaaludena (näiteks protsentides).

Ainult õige vastuse eest (kõigi kolme koostisosa õiged absoluutkogused või osakaalud) ilma selgitusteta anda 2 punkti.

2.
- Kasutatud õigesti puutujalõikude võrdsust: 2 p
- Eelneva ning kesklõigu DE ja aluse BC pikkuste suhte abil leitud lõikude DR ja BR pikkuste suhe: 3 p
- Lahendus lõpule viidud: 2 p

Ainult õige vastuse eest ilma selgitusteta anda 1 punkt.

3.
- Esitatud näide, et 5 minutist (sillaületamisest) piisab: 2 p
- Põhjendatud, miks vähem kui 5 minutist (sillaületamisest) ei piisa: 4 p

- Lõppvastus õigesti esitatud (ajana, mitte sillaületamiste arvuna): 1 p

Hindamisel tuleb tähele panna, et sobiv 5 sillaületamisega näide võib olla lahenduses esitatud koos selle optimaalsuse põhjendusega (nagu žürii lahenduses 2). Hinnata tuleb neid ikkagi eraldi, st kui sellises lahenduses on näide olemas, kuid optimaalsuse põhjendus on ebatäielik, siis tuleb anda 2 punkti näite eest ja lisaks punktid optimaalsuse põhjenduse eest vastavalt sellele, kui olulised puudujäägid selles põhjenduses on.

Ainult õige vastuse (5 minutit) eest ilma selgitusteta anda 1 punkt.

4.
- Tähelepanek, et arv $200\ldots07$ jagub alati 9-ga: 1 p
- Tehtud järeldus, et 27-ga jagumine on samaväärne sellega, et arvude $200\ldots07$ ja 9 jagatis jagub 3-ga: 1 p
- Leitud arvude $200\ldots07$ ja 9 jagatis: 3 p
- Lahendus lõpule viidud (leitud tingimus, millal see jagatis jagub 3-ga): 2 p

Ainult õige vastuse eest ilma selgitusteta anda 1 punkt.

Juhu $n = 0$ vaatlemata jätmise eest punkte mitte maha võtta.

Hindamisjuhised

1. Anname siin hindamisskeemi lahenduste jaoks, kus antud avaldist teisendatakse (nagu žürii lahenduses); kas seejuures tähistatakse üks arvudest kõigepealt mingi sümboliga või mitte, ei ole oluline.

- Avaldis teisendatud kujule, mis ei sisalda kolme liikme (kolme „suure arvu“) korrutisi: 4 p
- Lahendus lõpule viidud: 3 p

Seda ülesannet saab lahendada ka otsese arvutamisega. Kui seejuures on arvutused tehtud õigesti ja saadud õige vastus, tuleb anda 7 punkti nagu mis tahes teise täislahenduse eest; vigaste seda tüüpi lahenduste korral tuleb punkte anda vastavalt sellele, kui suur osa vajalikest arvutustest on vigadeta tehtud. Seejuures hinnata korrutiste õiget väljaarvutamist kokku 5 punktiga ning liitmis- ja lahutamistehete õiget sooritamist 2 punktiga.

Ainult õige vastuse eest ilma selgitusteta anda 1 punkt.

2.
- Leitud aktsiate väärtus kolmanda aasta järel (avaldatuna nende algse väärtuse kaudu) või nende summaarse hinnalanguse protsent: 3 p
- Koostatud õige võrrand neljandal aastal vajaliku akstiahinna tõusu leidmiseks: 2 p
- Leitud õige lõppvastus: 2 p

Kui lõppvastus ei ole antud protsentides, vaid mingil muul sisuliselt õigel kujul (näiteks: aktsiate hind peab neljandal aastal tõusma 1,4 korda), siis anda 1 punkt vähem.

Ainult õige vastuse 40% või 40 eest ilma selgitusteta anda 1 punkt.

3.
- Viète'i valemite abil kirjutatud välja õiged võrdused: 1 p
- Näidatud, et $b = d$: 2 p
- Vaadatud läbi juht $b = d \neq 0$: 2 p
- Vaadatud läbi juht $b = d = 0$: 2 p

Ainult täieliku õige vastuse eest ilma selgitusteta anda 1 punkt.

4.
- Leitud sobiv arvutusstrateegia (nt väiksema ruudu sissetoomine nagu žürii lahenduses): 2 p

- Pandud kirja sobivad võrrandid, millest on võimalik leida algse ruudu küljepikkus, või mingi selle küljega paralleelse lõigu pikkus, millega ruudu küljepikkus on ilmsel viisil seotud (nt väiksema ruudu küljepikkus žürii lahenduses): 2 p
- Lahendus lõpule viidud (koostatud võrranditest leitud esialgse ruudu küljepikkus): 3 p

Selle ülesande vastust saab esitada mitmel erineval samaväärsel kujul (nt $\frac{4+\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$, $2+\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$ või $2+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$). Hindajal tuleb siin olla tähelepanelik ning ka teistsugusel kujul esitatud arvuliselt õige vastus õigeks lugeda.

Ainult õige vastuse eest ilma selgitusteta anda 1 punkt.

5.
- Näidatud, et arvudel a ja b on samad algtegurid: 3 p
- Tähelepanek, et piisab vaadata juhtu, kus a ja b on ühistegurita (või arutlus, millega üldjuht taandatakse sellisele juhule): 2 p
- Lahendus lõpule viidud: 2 p

Kui võrrand on ümber kirjutatud kujul, millest on näha, et arvudel a ja b on samad algtegurid (nt $a^2 + b^2 = kab$), kuid arutlusega edasi ei ole mindud, anda hindamisskeemi esimese rea alusel 1 punkt.

Ainult õige vastuse 2 eest ilma selgitusteta anda 1 punkt. Kui on näidatud, et $k = 2$ sobib, kuid puudub põhjendus, miks rohkem sobivaid k väärtusi ei ole, anda 2 punkti.

6.
- Põhjendatud, miks 5 reisist alati piisab: 3 p
- Esitatud näide, mille korral 4 reisist ei piisa: 4 p

Ainult õige vastuse 5 eest ilma selgitusteta anda 1 punkt.

Hindamisjuhised

1. Selguse mõttes anname siin eraldi hindamisskeemid „väljast sissepoole“ lahenduste jaoks, kus analüüsitakse $x-|x-1|$ võimalikke väärtusi (žürii lahendus 1) ning „seest väljapoole“ lahenduste jaoks, kus analüüsitakse juhte $|x-1| = x-1$ ja $|x-1| = 1-x$ (žürii lahendus 2).

Lahendus „väljast sissepoole“ analüüsiga.

- Idee vaadata eraldi juhte $x-|x-1| = 1$ ja $x-|x-1| = -1$: 1 p
- Vaadatud läbi juht $x-|x-1| = 1$ (leitud lahendid $x \geqslant 1$): 3 p
- Vaadatud läbi juht $x-|x-1| = -1$ (leitud lisalahend $x = 0$): 3 p

Lahendus “seest väljapoole” analüüsiga.

- Idee eest vaadata eraldi juhte juhte $|x-1| = x-1$ ja $|x-1| = 1-x$: 1 p
- Juhu $|x-1| = x-1$ läbivaatamise (lahendite $x \geqslant 1$ leidmise) eest: 3 p
- Juhu $|x-1| = 1-x$ läbivaatamise (lisalahendi $x = 0$ leidmise) eest: 3 p

Saadud lahendite sobivuse kontrolli eest eraldi punkte anda ega selle puudumise eest punkte maha võtta ei ole vaja, senikaua kuni lahenduses ei esine samme, kus ka tegelikult võõrlahendeid tekkida võiks.

Ainult täieliku õige vastuse eest ilma selgitusteta anda 1 punkt.

2. Anname siin eraldi hindamisskeemid lahenduste jaoks, kus kasutatakse sümmeetriat sirge $y = x$ suhtes (žürii lahendus 1), ning biruutvõrrandiga lahenduste jaoks (žürii lahendused 2 ja 3).

Lahendus, mis kasutab sümmeetriat sirge $y = x$ suhtes.

- Tehtud tähelepanek, et mõlemad vaadeldavad jooned on sirge $y = x$ suhtes sümmeetrilised (ehk nende võrrandid on sümmeetrilised koordinaatide x ja y suhtes): 1 p
- Siit järeldatud, et lõikepunktide koordinaadid on kujul $(x, 2x)$ ja $(2x, x)$: 2 p
- Eelneva põhjal leitud lõikepunktide koordinaadid: 2 p
- Leitud parameetri a väärtus: 2 p

Lahendus biruutvõrrandiga.

- Koostatud ainult ühte koordinaati sisaldav õige biruutvõrrand (või selle koordinaadi ruudu suhtes ruutvõrrand): 2 p

- Leitud lõikepunktide ühe koordinaadi väärtus koostatud võrrandist: 2 p
- Leitud lõikepunktide teise koordinaadi vastavad väärtused: 1 p
- Leitud parameetri a väärtus: 2 p

Kui lahendaja pole tähele pannud tingimusi $a > 0$ ja/või $x > 0$ ning on seetõttu saanud rohkem vastusevariante, anda 1 punkt vähem.

Ainult täieliku õige vastuse eest (a väärtus ja lõikepunktide koordinaadid) ilma selgitusteta anda 1 punkt. Kui lisaks vastusele on tehtud joonis, kust on näha, et lahendaja on õigesti aru saanud vaadeldavate joonte paiknemisest, kuid puuduvad arvutused, anda 2 punkti.

3.
- Avaldatud värvitud või värvimata osa pindala õigesti r kaudu: 2 p
- Leitud avaldise vajalik ekstremaalne väärtus: 3 p
- Leitud vastav r väärtus: 2 p

Ainult täieliku õige vastuse eest (värvitud osa maksimaalne pindala ja vastav r väärtus) ilma selgitusteta anda 1 punkt.

4. Anname siin eraldi hindamisskeemid lahenduste jaoks, kus taandatakse ülesanne mingite tuntud lõikude ühes punktis lõikumisele (žürii lahendused 1 ja 2) ning lahenduste jaoks, kus kasutatakse punktide A_1, B_1 ja C_1 ühesust ja seda, et kolmnurga teatavate sirgete (nt kõrguste pikenduste) lõikepunktid ümberringjoonega rahuldavad ülesande tingimusi (žürii lahendus 3).

Lahendus tuntud lõikude ühes punktis lõikumisele taandamisega.

- Kõõlude võrdsusest järeldatud sobivate kaarte või nurkade võrdus: 2 p
- Ära tuntud, et sirged AA_1, BB_1 ja CC_1 on mingi kolmnurga nurgapoolitajad, kõrgused vms: 4 p
- Viidatud faktile, et iga kolmnurga puhul lõikuvad eelmise punkti sirged ühes punktis: 1 p

Lahendus punktide A_1, B_1 ja C_1 ühesuse abil.

- Näidatud, et teatavate kolmnurgaga määratud sirgete (nt kõrguste pikenduste) lõikepunktid ümberringjoonega rahuldavad ülesande tingimusi: 3 p
- Näidatud, et ülesande tingimused määravad punktid A_1, B_1 ja C_1 üheselt: 3 p
- Eelneva põhjal tehtud lõppjäreldus: 1 p

5. Anname siin eraldi hindamisskeemid lahenduste jaoks, kus võrduse pooltele sobiva liidetava lisamise abil teisendatakse vasak pool korrutiseks (žürii lahendus 1) ning lahenduste jaoks, kus analüüsitakse esialgset võrdust (žürii lahendus 2).

Lahendus võrduse vasaku poole korrutiseks teisendamise abil.

- Teisendatud võrdus murdudeta kujule: 1 p
- Lisatud võrduse pooltele sobiv liidetav ja esitatud vasak pool korrutisena: 2 p
- Saadud võrduse analüüsil kasutatud ära p algarvulisust (tähelepanek, et vasaku poole tegurid saavad märgi täpsusega olla p ja p või 1 ja p^2): 1 p
- Analüüs lõpule viidud (arvesse võttes a ja b positiivsust) ning leitud lahend: 3 p

Lahendus võrduse otsese analüüsimise abil.

- Võrdus teisendatud murdudeta kujule: 1 p
- Esitatud tähelepanek, et a või b peab jaguma p-ga: 2 p
- Analüüsitud lõpuni juht, kus a jagub p-ga: 2 p
- Analüüsitud lõpuni juht, kus b jagub p-ga: 2 p

Kui lahenduses on märgitud, et kaks järjestikust arvu on alati ühistegurita, anda hindamisskeemi viimase lõigu eest vähemalt 1 punkt.

Ainult õige vastuse eest ilma selgitusteta anda 1 punkt.

6. Anname siin eraldi hindamisskeemid lahenduste jaoks, kus vaadeldakse otse suvalist värvimist (žürii lahendus 1) ning lahenduste jaoks, kus suvaline värvimine saadakse algseisust ruute ühekaupa värvides (žürii lahendus 2).

Lahendus, kus vaadeldakse otse suvalist värvimist.

- Tehtud tähelepanek, et ridu, veerge ja diagonaale on kokku paarisarv: 1 p
- Tehtud tähelepanek, et iga ruut kuulub kokku paarisarvu ridadesse, veergudesse ja diagonaalidesse: 1 p
- On olemas idee vaadelda kõigis ridades, veergudes ja diagonaalidel olevate värvitud ruutude kogusummat: 1 p
- Näidatud, et see kogusumma on paarisarv: 2 p
- Näidatud, et selles summas on paarisarv paarisarvulisi liidetavaid: 2 p

Lahendus, kus vaadeldakse algseisu ja värvitakse sammukaupa.

- Tehtud tähelepanek, et ridu, veerge ja diagonaale on kokku paarisarv: 1 p
- Tehtud tähelepanek, et iga ruut kuulub kokku paarisarvu ridadesse, veergudesse ja diagonaalidesse: 1 p
- On olemas idee vaadelda ühe ruudu värvi muutmist (või teha induktsiooni mustade ruutude arvu järgi vms): 1 p

- Tõestatud, et sellise sammu tulemusena ei muutu paarisarvu musti ruute sisaldavate ridade, veergude ja diagonaalide koguarvu paarsus: 2 p
- Tehtud tähelepanek, et ülesande väide kehtib mingi värvimise korral ja et vaadeldava sammu korduval rakendamisel saame sellest suvalise värvimise: 2 p

Hindamisjuhised

1.
- Aru saadud, et leidub kolm nõutava omadusega punkti vastavalt sellele, milline antud punkte ühendav lõik on rööpküliku diagonaal: 3 p
- Leitud ühe sobiva punkti koordinaadid: 2 p
- Leitud teise ja kolmanda sobiva punkti koordinaadid: à 1 p

Ainult täieliku õige vastuse eest (kõigi kolme punkti koordinaadid) ilma selgitusteta anda 1 punkt.

2.
- Koostatud õige ainult üht koordinaati sisaldav ruut- või biruutvõrrand: 2 p
- Aru saadud, et puutumisele vastab juht, kus selle (bi)ruutvõrrandi diskriminant on 0: 2 p
- Leitud parameetri a väärtus sellest tingimusest: 1 p
- Leitud puutepunktide koordinaadid: 2 p

Ainult täieliku õige vastuse eest (a väärtus ja lõikepunktide koordinaadid) ilma selgitusteta anda 1 punkt. Kui lisaks vastusele on tehtud joonis, kust on näha, et lahendaja on õigesti aru saanud vaadeldavate joonte paiknemisest, kuid puuduvad arvutused, anda 2 punkti.

3.
- Esitatud tähelepanek, et antud risttahukas $ABCDEFGH$ koosneb ülesandes vaadeldavast kehast $BDFH$ ning püramiididest $ABHD$, $CDFB$, $EFDH$ ja $GHBF$: 2 p
- Esitatud tähelepanek, et püramiidid $ABHD$, $CDFB$, $EFDH$ ja $GHBF$ on võrdse ruumalaga: 2 p
- Avaldatud püramiidi $ABHD$ (või mõne teise samasuguse püramiidi) ruumala risttahuka servapikkuste kaudu: 2 p
- Lahendus lõpule viidud: 1 p

Ainult õige vastuse eest ilma selgitusteta anda 1 punkt.

4.
- Leitud võimalike programmide arv vastavalt klahvide koguarvule ja üht liiki klahvide arvule (žürii lahenduses $2^m \cdot (k - m)$) või üht ja teist liiki klahvide arvule: 3 p
- Näidatud, et 8 klahvi korral saab avatavate programmide koguarv olla vähemalt 100: 1 p

- Tõestatud, et vähem kui 8 klahvi korral on võimalike programmide arv alati alla 100: 3 p

Ainult õige vastuse eest ilma selgitusteta anda 1 punkt.

Tühja modaalklahvide hulga vaatlemata jätmise eest punkte mitte maha võtta.

5. Anname siin eraldi hindamisskeemid lahenduste jaoks, kus võrduse pooltele sobiva liidetava lisamise abil teisendatakse vasak pool korrutiseks (žürii lahendus 1) ning lahenduste jaoks, kus analüüsitakse algset võrdust (žürii lahendus 2).

Lahendus võrduse vasaku poole korrutiseks teisendamise abil.

- Teisendatud võrdus murdudeta kujule: 1 p
- Lisatud võrduse pooltele sobiv liidetav ja esitatud vasak pool korrutisena: 2 p
- Saadud võrduse analüüsil kasutatud ära p algarvulisust (tähelepanek, et vasaku poole tegurid saavad märgi täpsusega olla p ja p või 1 ja p^2): 1 p
- Analüüsi lõpule viidud (arvesse võttes a ja b positiivsust) ning leitud lahendid: 3 p

Lahendus võrduse otsese analüüsimise abil.

- Võrdus teisendatud murdudeta kujule: 1 p
- Esitatud tähelepanek, et a või b peab jaguma p-ga: 2 p
- Analüüsitud lõpuni üks juht (leitud kaks lahendit): 3 p
- Analüüsitud lõpuni teine juht või kasutatud antud võrduse a ja b suhtes sümmeetrilisust ärakasutamise (leitud kolmas, sümmeetriline lahend): 1 p

Kui lahenduses on märgitud, et kaks järjestikust arvu on alati ühistegurita, anda hindamisskeemi eelviimase lõigu eest vähemalt 1 punkt.

Ainult täieliku õige vastuse (kõik arvupaarid) eest ilma selgitusteta anda 1 punkt.

6. Seda ülesannet võib lahendada algebraliselt kolmnurgavõrratuse abil (žürii lahendus 1) kui ka geomeetriliselt (žürii lahendus 2). Kummagi lahendusviisi kohta anname eraldi skeemi.

Algebraline lahendus.

- Kirjutatud välja sobivate lõikude jaoks kolmnurgavõrratuse ruututõstmisel tekkiv võrratus: 2 p
- Kirjutatud välja sobivate lõikude jaoks aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vaheline võrratus: 2 p
- Neid kaht võrratust kombineerides tuletatud ülesandes antuga samaväärne võrratus: 2 p

- Näidatud saadud võrratuse ja ülesandes antud võrratuse samaväärsus: 1 p

Geomeetriline lahendus.

- Idee täiendada kolmnurk ABC rööpkülikuks, mille diagonaal on AC: 2 p
- Mainitud fakti, et rööpküliku küljepikkuste ruutude summa on võrdne diagonaalide pikkuste ruutude summaga: 2 p
- Nende faktide abil on tuletatud ülesandes antuga samaväärne võrratus: 2 p
- Näidatud saadud võrratuse ja ülesandes antud võrratuse samaväärsus: 1 p

Kokkuvõtteks

Seekord kukkus ülesannete komplekt nii mõneski klassis välja soovitust raskem. Eriti viletsaks kujunesid tulemused 10. ja 11. klassis.

Piirkondadest tulnud tulemuste tabelite järgi võinuks 10. klassi komplekti isegi enam-vähem parajaks pidada, kuid just selles klassis tegi žürii üleparandamisega kõige rohkem „hävitustööd“: õpilased massiliselt kaotasid piirkonnas antud punkte.

12. klassi komplekti lahendati seevastu normaalselt, kuigi ülesannetele peale vaadates ei oskaks küll 12. klassi omi keskeltläbi lihtsamaks pidada kui 11. klassi omi. Jälle on paras tõdeda, et lõpuklassi õpilased võtavad asja lihtsalt tõsisemalt.

Järjekordselt tuleb kirjutada ka žürii tehtud suuremast apsakast. Nimelt olid meilt saadetud venekeelsed tekstid nii ebakvaliteetsed, et üle kõigi klasside olid ülesannete tekstidest kadunud mõned tähed ja numbrid ning ülesannetest võis selle tagajärjel lausa valesti aru saada. Eriti hull oli olukord 8. klassi teise osa 3. ülesandega, milles arvulised andmed olid mõnede numbrite puudumise tõttu sellised, et ülesannet polnud võimalik lahendada.

Mitmetes piirkondades panid kohalikud korraldajad neid puudusi ise tähele ning parandasid enne võistluse algust venekeelsed tekstid eestikeelsete järgi ära. Kahjuks ei läinud igal pool nii hästi. Lõppvooru pääsemist, nagu üleparandamise protsessis selgus, need erinevused eesti- ja venekeelsete tekstide vahel siiski ei mõjutanud.

Žürii palub tekitatud segaduse pärast vabandust. Ebakvaliteetsete tekstide tekkimise põhjus on välja selgitatud ja rohkem sellist viga me ei tee. Meie poolt ettevalmistatud tekstid olid ju tegelikult korralikud, vead tekkisid arvutis valmistekstide automaatsel konverteerimisel ühest formaadist teise, mis võeti ette vaid mugavama paljundamise huvides. Konverteerimise tulemust enam keegi üle ei kontrollinud.

Nagu eelmistel aastatel, ei vaadanud žürii ka tänavu enamikus klassides läbi kõiki ülesandeid kõikides piirkondadest saadetud töödes, vaid ainult niipalju, kui oli vaja huvipäevale ja lõppvooru kutsutavate õiglaseks määramiseks.

See tähendab, et kõikide huvipäevale ja lõppvooru kutsutavate õpilaste töödes vaadati läbi kõik ülesanded ning ükski õpilane, kelle töös mõned ülesanded jäid läbi vaatamata, ei tõuseks kutsutavate hulka ka siis, kui talle kõikide nende ülesannete eest antaks maksimaalsed punktid.

Läbi vaatamata jäänud ülesanded on tabelites eristatud halli (veebiversioonis oranži) taustavärviga. 9. klassi tööde kontrollijad vaatasid läbi kõikides töödes kõik ülesanded.

Kontrollijate kommentaarid (Elts Abel, Mart Abel)

Üldised märkused

Teise osa esimeses ja kolmandas ülesandes tuli paljudes töödes punkte muuta, sest maksimumpunktid anti vaid õige vastuse ja selle kontrolli eest, kuigi põhjendusi, miks teistsugused variandid ei sobi, töödes ei olnud.

Test

Testi raskusastet võib hinnata keskmiseks. Rohkem eksimusi oli testi ülesandes 1 (sagedamini esinenud valed vastused olid 2006 ja 2008); ülesandes 7 (läksid vahetusse mõisted „on pikem“ ja „on lühem“; ka parandajad eksisid mõnikord juhendi vastu, lugedes ühe punkti vääriliseks ainult ühe õige vastuse kolmest); ülesandes 9 (vastus esitati ligikaudsena, kasutades arvu π lähendit 3,14); ülesandes 10 (tundus, et oli raskusi arusaamisega, mida tuleb leida).

Ül. 7. Teise ja kolmanda vastusega jäädi sageli hätta.

Ül. 8. Vastus oli sageli antud suuruste α ja β või ristküliku nurga kaudu.

Ül. 9. Vastus oli tihti antud ümardatult, kasutades π ligikaudset väärtust.

Ülesanne 1

Paljudes töödes oli antud vaid õige vastus koos kontrolliga. Põhjendused, miks teised kahekohalised seitsmega jaguvad arvud pereliikmete vanusteks ei sobi, puudusid.

Ülesanne 2

Jooniselt oli mõõdetud nii nurkade suurusi kui ka külgede pikkusi. Jooniselt mõõdetud (ligikaudseid!) suurusi ei saa kasutada edasistes arvutustes.

Ülesanne 3

1. Proovimise teel saadud küljepikkuse (18 cm) sobivust tuleb kindlasti ka arvutuste teel kontrollida (näidata lõikamise viis ning arvutada tekkinud ristkülikute ümbermõõdud).

2. Töös peavad olema selgelt kirjeldatud ka teised võimalikud lõikamise viisid ning näidatud, miks need ei sobi.

Kontrollijate kommentaarid (Raili Vilt, Reimo Palm)

Test

Test oli lahendatud üldiselt hästi. Ülesannete 2, 3, 4 ja 9 õige vastuse leidmine ei valmistanud enamusele raskust. Raskeimaks osutusid 6 ja 1 ülesanne. Punktimuutused seisnesid punktide arvu kooskõlla viimises hindamisjuhistega.

Ülesanne 1

Ülesanne ei pakkunud oskajaile erilisi raskusi ja ülevaatamisel tuli teha vähe punktimuutusi. Lahendajate kõige sagedasem puudujääk oli põhjenduse puudumine, miks arvud 46 ja 47 saavad tekkida ainult arvudest 468 ja 477.

Ülesanne 2

Ka see ülesanne osutus võrdlemisi lihtsaks. Põhilised vead lahendustes olid järgmised: 1) aetakse segamini nelinurki tähistavad terminid, näiteks trapets ja rööpkülik; 2) eeldatakse, et joonisel tumedaks värvitud trapetsite kesklõigud on pikkusega 4 m, kuigi kesklõigud ei asu piki ristküliku sümmeetriatelge; 3) eeldatakse, et nende trapetsite aluste pikkused on 3 m ja 5 m. Kahel viimasel juhul saadakse trapetsite kogupindalaks küll õige väärtus, kuid see tuleneb siiski valest lähtekohast.

Vähestest punktimuutustest oli sagedasim $6 \to 7$, kus lugesime ilmseks mõned põhjenduseta kirjapandud väited, kui oli näha, et lahendaja on nendest selgesti aru saanud.

Ülesanne 3

Väga sageli oli vaja punkte alandada seetõttu, et lahenduses polnud põhjendatud, miks vähem kui kolme ümbertõstmisega pole võimalik vajalikku olukorda saavutada. Hindamisskeemi järgi on selle põhjenduse väärtus 2 p. Teiselt poolt võis mõnikord punkte tõsta seetõttu, et nimetatud põhjenduse sai vähemalt osaliselt lahenduse tekstist välja lugeda.

Mitmel puhul oli hinnatud nelja ümbertõstmisega lahendust 3 punkti vääriliseks, kuigi hindamisskeem lubab selle eest ainult 2 punkti. Siin ei saa rakendada hindamisskeemi rida põhjenduse kohta, et igasse kuhja jääb 16 pähklit, sest see põhjendus peab olema esitatud ükskõik millise ümbertõstmiste skeemi kohta, mitte ainult lahenduses kirjapandud skeemi kohta.

Eesti- ja venekeelse teksti erinevus ühtlustamisele mõju ei avaldanud, sest kõigis läbivaadatud töödes olid algandmed ühesugused.

Kontrollijate kommentaarid (Indrek Zolk, Kalle Kaarli)

Üldised märkused

Komplekti raskusastme osas oli tõeliseks üllatajaks 1. ülesanne, mille lahenduseni jõudsid praktiliselt kõik võistlejad.

Test

Ül. 3. Hindamisskeem ei näinud ette osalisi punkte vastuse -3 eest. Seda asjaolu polnud kõik parandajad arvesse võtnud.

Ül. 7. Segadust tekitas hindamisskeemi mõistmine: piirkondlikud parandajad olid pannud osalisi punkte ka ühe õige ja ühe vale, või siis kahe õige ja kahe vale sirgepaari eest, mida hindamisskeem ette ei näinud.

Ül. 9. Palju pakuti ootuspärast vigast vastust 3,2 cm^2.

Ülesanne 1

Ülesande lahenduseni jõudsid praktiliselt kõik võistlejad. Mõne lahendaja töös tekitas segadust, kas protsenti kasutati kogu pudeli mahu või vedeliku mahu suhtes mingil ajahetkel. Kontekstist oli see siiski reeglina välja loetav.

Ülesanne 2

Ülesanne näitas, et 9. klassi õpilased geomeetriat ei oska. Teati kolmnurga kesklõiku, mediaane ja nende omadusi, kuid ringi puutuja omadusi ei teatud. Enam-vähem täieliku lahenduse esitas alla 20 õpilase. Üks korduvalt esinenud viga oli järgmine: joonise abil märgati, et kahte puutepunkti ühendav sirglõik läbib mediaanide lõikepunkti, ning siis tuletati ülesande lahendus sellest tõestamata faktist. Mõnel juhul ei olnud parandaja sellise mõttekäigu ekslikkust mõistnud, aga üldiselt suuri etteheiteid parandajatele ei ole. Oli õpilasi (ja üsna mitmeid), kes said õige vastuse joonisel lõikude pikkusi mõõtes. Punkte nullist kaheni üleparandamisel üldjuhul ei muudetud, sest see ei oleks lõpptulemust muutnud. Siiski, kui õpilase tehtud joonisest selgus, et ta ülesannet üldse ei ole mõistnud, siis parandasime talle pandud hinde nulliks. Ühel juhul rääkis õpilane ka kolmnurga meridiaanidest.

Ülesanne 3

Oodatult leidis rõhuv enamik lahendajatest jõe ületamise kiireima viisi, kuid vaid üksikud põhjendasid ammendavalt, et see tõesti on kiireim. Kuna see ülesanne oli 9. klassis järjekorras viimane ülesanne üleparandamisel, siis punkte ei muudetud töödes, mis ilmselt ei pretendeerinud parimate sekka. Siiski, ekslikult pandud kõrged hinded said muudetud ka siin. Piirkonniti esines ebakvaliteetset parandamist: 7 punkti olid saanud lahendused, kust parima tahtmise korral ei olnud võimalik leida minimaalsuse põhjendamise algeid.

Ülesanne 4

Ülesandel oli loomulik lisalahendus: asuda kirjaliku jagamise algoritmiga lihtsalt jagama ning algoritmi samme detailselt jälgides selgitada välja, millal täpselt jagamine lõpeb selliselt, et jäägiks saadakse 0. Lõviosa lahendajatest seda teed läkski.

Et sellise lahenduse kohta polnud žürii hindamisskeemi, varieerusid piirkondlike parandajate antud punktid seinast seina. Leidus koguni töid, mis said ainult katsetuste ja õige vastuse eest kuni 7 punkti (ühtlustatud hindamisel alandatud 2 kuni 3 punktile). Lisaks oli mitmes töös näidatud küll, et $n = 3k$ sobib, aga selle näitamine, et muud n väärtused ei sobi, oli jäänud tähelepanuta. Need tööd said pärast hindamise ühtlustamist reeglina 4 või 5 punkti.

Selle ülesande korral oli üks raskuspunkte lahenduse täpses kirjapanekus ja põhjendamise ammenduvuses: selgitusteta toodud kirjaliku jagamise algoritm või lünklikud põhjendused viisid punkte nii mõneltki lahendajalt.

Mõnes töös pidasid õpilased 27-ga jaguvuse tunnuseks ristsumma jaguvust 27-ga või väitsid, et arvu 27-ga jaguvus on samaväärne sellega, et arv jagub 3 ja 9-ga.

Kontrollijate kommentaarid (Uve Nummert, Oleg Petšonkin)

Üldised märkused

Kaks esimest ülesannet olid meile saadetud töödes valdavalt probleemideta lahendatud, nagu oligi oodata. Kolmes viimases ülesandes lootsime siiski keskmiselt paremaid tulemusi. Kahjuks tuli nendes ülesannetes ka paljudel juhtudel piirkondades antud punkte oluliselt vähendada, kuna sisuliselt puudulikud põhjendused olid hinnatud täispunktidega või antud punkte lahenduste eest, kus tegelikult midagi kasulikku ei olnud tehtud.

Ülesanne 1

Vähesed kasutasid sobivaid tähistusi ühe muutuja abil (nt $a-1$, a, $a+1$ ja $a+2$). Sellele vaatamata oli ülesanne enamasti edukalt lahendatud ja ka hinnatud: vaid ühes töös tuli antud punkte oluliselt korrigeerida.

Ülesanne 2

Ülesanne osutus ehk isegi üle ootuste lihtsaks. Üsna mitmes töös andsime tagasi punkti või kaks, mis olid väikeste vormistuskonaruste eest maha võetud, kui sisuliselt oli kõik vajalik olemas.

Ülesanne 3

Üllatavalt paljud jätsid tähele panemata võimaluse $b = d = 0$.

Paaris töös lähtuti Viète'i valemeid kasutamata otse võrdustest $c^2 + ac + b = 0$ jne. Ka see tee viib tegelikult sihile, kuid mõnevõrra suurema vaevaga, ning lahendajad ei olnud paraku siin võrduste kirjapanemisest eriti edasi jõudnud.

Ülesanne 4

Ülesanne oli üsna lihtne, peaaegu kõik õiged lahendused olid sarnased žürii lahendusega.

Paljud kasutasid trigonomeetriat, aga kui vastuses olid trigonomeetrilised funktsioonid sisse jäetud, siis võtsime 1 punkti maha.

Ülesanne 5

Tüüpiline viga oli, et tehti asendus $x = \frac{a}{b}$ ja opereeriti siis x-ga nagu täisarvuga.

Töödes esines ka alternatiivne lahendus, kus a avaldatakse b kaudu ja analüüsitakse $\sqrt{k^2 - 4}$. Enamus leidis, et väärtus 2 sobib, aga edasist lahendust tihti polnud.

Ülesanne 6

Tüüpiline viga oli, et tehti jagamistehe $10/3$ ja kirjutati vastuseks 4.

Osades töödes oli kirjutatud, et kui iga paki mass on rohkem kui 750 g, siis on vaja 5 reisi, aga polnud vaadeldud viimase pakki massi ega pakkide arvu, mis on ülesanne kontekstis oluline. Sellel juhul võtsime ühe punkti maha. (Näide: kui iga paki mass peale viimase on 800 g, siis neid pakke on 12 ja viimane pakk on massiga 400 g. Seega antud juhul piisab 4 reisist).

Paljudes töödes, kus oli toodud näide, mille korral 4 reisist ei piisa, polnud selgitust, miks 5 reisist alati piisab.

Kontrollijate kommentaarid (Härmel Nestra, Laur Tooming)

Üldised märkused

11. klassi komplekt osutus liiga raskeks. Piirkondade täielikke protokolle vaadates oli olukord isegi nutusem kui kaks aastat tagasi. Nii halvasti lahendatud komplekti pole piirkonnavooru aastaid juhtunud. Ülesanded 4, 5, 6 olid kõik enamasti viletsalt lahendatud.

Ülesanne 1

Tegu oli tüüpilise kooliülesande tavapärasest veidi keerukama variandiga, mida lahendatigi üldjuhul koolis harjutatud algoritmi kohaselt. Punkte võis kergesti kaotada, kui vajalikku lahendusvõtet tunti vaid mehaanilise päheõppimise tulemusena ning kuskil tehti viga, näiteks jäeti mõni võrratus kirja panemata. Ka paljud maksimumpunktid saanud lahendused oleks võinud olla paremini vormistatud, sageli oli ka neis näha päheõpitud algoritmi kasutamist ilma sügavama mõistmiseta.

Paljud muudatused tulemustes olid põhjustatud eri piirkondade ühtlustamisest, kuna skeemi tõlgendamisel oli parandajatele osaliste lahenduste puhul antud üsna vabad käed. Nii „väljast sissepoole“ kui „seest väljapoole“ lahenduse puhul oli ette nähtud 1 punkt kaheks juhuks jagamise ning 3 punkti kummagi juhu õige lahendamise eest, kuid polnud täpsustatud, kuidas neid 3 punkti jagada. Meie andsime üldjuhul 1 punkti vastava juhu omakorda kaheks juhuks jaotamise (st teise absoluutväärtuse piirtingimuse leidmise) eest ning kummagi alamjuhu korrektse lahenduse eest (kui oli selge, et leitud lahendite hulgas võõrlahendeid pole) 1 punkti.

Ülesanne 2

Ülesanne täitis oma eesmärgi testida koolitunnis õpitud teadmisi ja oskusi. Valdavale osale õpilastest, kelle töö me üle vaatasime, ei valmistanud see ülesanne suuri probleeme.

Žürii pakutud hindamisjuhistes oli mitmes kohas lõikepunkte ekslikult puutepunktideks nimetatud. See viga loodetavasti parandajaid väga palju ei seganud.

Ülesanne 3

Ülesanne osutus võrdlemisi lihtsaks. Hindamisel järgisime lisaks varem väljakäidud hindamisjuhistele järgmisi põhimõtteid.

- Selle eest, kui oli jäetud arvestamata tingimus, et tegu on ühikruuduga, ja esitatud vastus parameetriliselt küljepikkuse suhtes, ei võtnud punkte maha. Piirkondades oli tehtud nii ja naa.
- Võtsime 1 punkti maha, kui ekstreemumi leidmisel tuletise abil polnud veendutud, et tegu on maksimumiga. Ruutvõrrandi omaduste kaudu arutlemisel selle eest ei karistanud, sest seal oli see ilmsem.
- Vahetasime meie pakutud hindamisskeemi kahe viimase klausli eest antavad punktid: maksimaalse pindala eest arvestasime 2 punkti ja r eest 3. Põhjus oli selles, et r leidmine nõuab rohkem tehnikat, maksimaalne pindala leiti tüüpiliselt r kaudu, pannes leitud väärtuse pindala avaldises r asemele ja arvutades.

Nendes punktides väljatoodud asjaolud mängisid rolli vaid üksikute tööde hindamisel.

Ülesanne 4

Selle ülesande parandamisel tekitas raskusi asjaolu, et üks võimalik lahendus (nurgapoolitajate kaudu) oli vaid paari lausega kirjapandav. Seega oli raske hinnata sel juhul osalisi lahendusi. Kuna vastavate kaarte võrdsuse leidmine oli juba suur samm lahenduse suunas ning ka skeem vastavalt ette nägi, andsime 2 punkti kõigile õpilastele, kes kasvõi joonisel märkisid ära tekstis antud 3 paarile kõõludele vastavate kaarte võrdsuse.

Üsna sageli juhtus, et õpilased vahetasid lahendamise käigus kogemata ära punktid A, B ja C vastavalt punktidega A_1, B_1 ja C_1. Selle eest jätsime karistamata, kuna oma eksimuse avastamisel oleks õpilasel piisanud lahenduses kõikjal indeksiga ja indeksita tipud ära vahetada. Samas selline segiajamine võis muuta ülesande lihtsamini läbinähtavaks, sest kui varem oli tegu „peidetud“ kolmnurga $A_1B_1C_1$ nurgapoolitajatega, siis nüüd teisenes see ilmutatult antud kolmnurgaks ABC.

Ühelgi õpilasel ei esinenud teise hindamisskeemi järgset lahendust. Esimese skeemi puhul andsime esimeses alapunktis 2 punktist 1, kui oli olemas idee nurkade (kaarte) võrdsust kasutada, kuid polnud jõutud õigete nurkadeni, ja teises alapunktis 4 punktist 1, kui vastavad sirged olid ära tuntud, kuid puudus korrektne põhjendus.

Ülesanne 5

Ülesanne osutus äärmiselt raskeks. Vaid üksikud õpilased said maksimumilähedased punktid. Paljud said küll algset võrrandit teisendades kätte kasuliku seose, kus algarv avaldus kahe arvu jagatisena, kuid edasi ei osanud kasutada jaguvuse omadusi. Paljud lahendajad asusid uurima saadud seoses esinevate arvude paarsust, mis ei mängi siin ülesandes mingit rolli.

Laiendasime meie poolt pakutud hindamisjuhist, andes 1 punkti mitte ainult murdudest lahtisaamise eest, vaid ka selliste kujude eest, mis samavõrra aitavad üle minna algarvuga jaguvuse omaduste peale, nt $\frac{a-b}{ab} = \frac{1}{p}$ ja $\frac{ab}{a-b} = p$. Samuti andsime punkti seose $a < p$ tõestamise eest, sest see aitab juhu $p \mid a$ kiiresti välistada.

Kui töös polnud mainitud, et $p \mid a$ või $p \mid b$, kuid lahenduskäik põhines nende kahe juhu eraldi läbivaatamisel, siis andsime hindamisjuhise teise klausli (näitamine, et $p \mid a$ või $p \mid b$) põhjal 1 punkti 2-st.

Punkte ei andnud me üksikute lahendite kättesaamise eest.

Žürii lahenduse 2 lõpus oli ka viga, mis võis parandajates segadust tekitada: viimases lauses peab võrduse $p = x$ asemel olema $a = x$.

Ülesanne 6

Ülesanne oli oodatult raske. Üllatavalt paljudele õpilastele oli komistuskiviks arvamus, et 0 pole paarisarv.

Näidislahendustest esimesele analoogilisi oli üksikuid, enamik kasutas ruutude ühekaupa värvimise meetodit. Tugevamatelt õpilastelt tulid ka mõned originaalsed lahendused.

Paljudel õpilastel oli diagonaalide arvu kokkulugemisel tehtud viga. Sel juhul võtsime punkte maha ainult siis, kui selle arvu mingit omadust reaalselt ka kasutati (näiteks väideti, et ühtpidi diagonaale on paaritu arv). Kui aga lahenduses osutus oluliseks vaid fakt, et ühtpidi diagonaale on sama palju kui teistpidi, siis me selle eksimuse eest ei karistanud.

Kontrollijate kommentaarid (Hendrik Nigul, Aleksei Lissitsin)

Ülesanne 1

Üks võimalus selle ülesande lahendamiseks on aru saada, et leidub vaid 3 neljanda punkti võimalikku asendit. Selleks piisab vaadelda diagonaale või teha korralik joonis, kus on märgitud kõik võimalikud positsioonid. Ainult idee vaadata diagonaale on väärt 1 punkti. Teine võimalus on fikseerida erinevad punktide paarid ning liita või lahutada nendevaheline vektor kolmandale punktile. Sellisel juhul said täispunkte need, kes vaatasid läbi kõik 6 varianti.

Ülesanne 2

Lisaks žürii pakutud lahendustele proovisid paljud leida vastust graafikute tuletiste võrdlemisel, kuid mitte alati ei saadud sellega edukalt hakkama. Paljudes töödes oli saadud vale vastus mõne arvutusvea tõttu. Sellistes töödes alandasime punkte 3 asemel 2 võrra.

Ülesanne 3

Antud ülesanne oli ilmselt komplekti lihtsaim. Enamik õpilasi oskas risttahuka ning püramiidi ruumala leida ning avaldada õigesti ka püramiidi $BDFH$ ruumala. Sagedasim viga oli see, et risttahuka ruumalast lahutati vaid 3 püramiidi ruumala. Sellised lahendused said 5 punkti.

Ülesanne 4

Klaviatuuriülesanne oli kahtlemata tähelepanu nõudev ülesanne. Ülesande tekst oli keeruline ning tuli hoolikalt lugeda, et tingimustest täpselt aru saada. Mitmed õpilased pidasid vajalikuks isegi mitme erineva lahendusalternatiivi kirjapanemist, kuigi sageli aitas see õpilasel ka teksti sisust paremini aru saada ning alles oli jäetud vaid üks alternatiiv.

See ülesanne oli tüüpiline miinimumi leidmise ülesanne, kus küsiti vähimat võimalikku klahvide arvu. Seetõttu peab lahendus koosnema lisaks vastusele 8 veel kahest osast.

- Näide 8 klahvist, mis rahuldavad ülesande tingimusi.
- Tõestus, et väiksema klahvide arvuga ei saa tingimusi rahuldada.

Sobiv näide oli enamasti leitud, kuivõrd see oli vastuse leidmisel loomulik osa. Paraku oli tihti unustatud ammendavalt põhjendada, et väiksemast klahvide arvust ei piisa.

Kui õpilane oli leidnud vale valemi programmide käivitamiseks sobivate klahvikombinatsioonide arvu jaoks, anti lahenduse eest kuni 2 punkti, sõltuvalt sellest kas oli toodud näide sobivatest klahvidest ning tõestud, et vähem klahve ei saa olla.

Ülesanne 5

See ülesanne osutus kõige keerulisemaks. Enamik lahendajaid oli proovinud lahendada sarnaselt žürii teise lahenduskäiguga. Samas need tööd, mis olid analoogilised žürii esimese lahendusega, said reeglina maksimumpunktid. Oli ka töid, kus kasutati väidet, et üks arvudest a ja b peab jaguma teisega. Kuna selle asjaolu põhjendamine on raske, siis täispunkte niisugused lahendused ei saanud. Paljudes töödes kasutati võrrandi murdudeta kuju asemel üleskirjutust $\frac{a+b}{ab} = p$, mis tegelikult ei ole palju halvem. Sellisele kujule jõudmist hindasime samuti 1 punktiga.

Lisaks žürii pakutud hindamisskeemile andsime punkte järgmiselt: ainult vastuse $(2p, 2p)$ sobivuse korraliku põhjendamise eest 1 punkt või vastuse $(p(p+1), p+1)$ sobivuse korraliku põhjendamise eest 2 punkti.

Ülesanne 6

Hoolimata ülesande üsna „hirmutavast“ väljanägemisest (geomeetriline võrratus), oli ülesanne üsna hästi lahendatud. Üsna paljud õpilased olid tõestamist vajava võrratuse lihtsalt ette võtnud ning üritanud seda kuidagimoodi lihtsustada. Üsna sageli viis see tee ka sihile.

Siiski tasub märkida, et antud ülesande täislahendus ei saa lõppeda väitega, et $(|AB| - |BC|)^2 > 0$ ning öelda, et sellega on võrratus tõestatud. Esiteks, on võimalik, et $|AB| = |BC|$ ning antud avaldis on nulliga võrdne. Teiseks on taoline arutelu põhimõtteliselt vale. Ülesandes ei nõuta ju tõestust, et reaalarvu ruut on mittenegatiivne. Pigem võiks selle fakti lugeda teadaolevaks ning alustada sellest järelduste tegemist, et tuletada ka kehtiv võrratus $2(|AB|^2 + |BC|^2) > |CA|^2$.

Kummagi punkti vastu eksimine vähendas lahenduse eest saadud punkte 1 võrra.

Mõned õpilased kaotasid punkti ka seetõttu, et ei osanud või ei vaevunud põhjendama, miks $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$. Piirkonnavoorus tuleks seda kindlasti põhjendada.