Eesti LIV matemaatikaolümpiaad

10. veebruar 2007 Piirkonnavoor **7. klass**

I osa vastused

1. 2007
2. 7
3. teine ja viies
4. pianist
5. $\dfrac{5}{2}$
6. 12
7. niisama pikk kui; pikem kui; lühem kui
8. 30°
9. 6π cm^2
10. 37 cm

Lahendused

1. Arv 10^{2007} on vähim 2008-kohaline arv: 1 ja 2007 nulli. Lahutades sellest arvu 2007, saame tulemuseks $99\ldots97993$, mis on 2007-kohaline.

2. Arvu $\overline{3107x}$ ristsumma on $11+x$. Ainuke number, mille korral see ristsumma jagub 9-ga, on $x=7$.

3. Esimene ei kehti, sest sama lugejaga murdudest on suurem see, mille nimetaja on väiksem (lugeja ja nimetaja positiivsed arvud). Teine kehtib, sest sama nimetaja puhul on suurema lugejaga murd suurem. Kolmas ei kehti. Neljas ei kehti, sest poolte väärtused on tegelikult võrdsed (kumbki ei ole teisest väiksem). Viies kehtib, sest $\dfrac{17}{23} > \dfrac{1}{2}$, kuid $\dfrac{71}{231} < \dfrac{1}{2}$.

4. Andmetest näeme, et Oskar ja pianist on erinevad inimesed ning Oskar ja laulja on samuti erinevad inimesed. Järelikult Oskar on viiuldaja. Et Kalle ei saa olla laulja ega viiuldaja, peab Kalle olema pianist.

5. Et $2+\dfrac{2}{3}=\dfrac{8}{3}$, siis avaldise väärtus on $1+4\cdot\dfrac{3}{8}=1+\dfrac{3}{2}=\dfrac{5}{2}$.

6. Keskmisest ruudust lähtudes saame 3 viisil valida esimese nulli. Iga sellise valiku korral saame 2 viisil valida teise nulli. Omakorda iga sellise valiku järel saame 2 viisil valida seitsme. Valikuvõimalusi on seega üldse $3\cdot2\cdot2=12$.

7. Marsruut $BKFA$ on niisama pikk kui marsruut $GELD$, sest kumbki koosneb kolmest lülist, mille pikkused on vastastikku võrdsed. Marsruut $BKFA$ on aga pikem kui marsruut $FKBC$, sest nad erinevad ainult lülide FA ja BC poolest, kuid FA on pikem kui BC.

8. Ristküliku nurga suurus on 90°. Kuue tekkinud nurga suuruste summa on $3\alpha + 3\beta = 90^\circ$. Järelikult $\alpha + \beta = 30^\circ$.

9. Et $|AB| = 16$ cm, siis $|AC| = 8$ cm ja $|AD| = 4$ cm. Diameetrile AC toetuva poolringi pindala on pool sama diameetriga ringi pindalast ehk $\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \frac{8^2}{4} = 8\pi\ \text{cm}^2$. Diameetrile AD toetuva poolringi pindala on analoogiliselt $\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \frac{4^2}{4} = 2\pi\ \text{cm}^2$. Tumedaks värvitud kujundi pindala on nende pindalade vahe ehk $6\pi\ \text{cm}^2$.

10. Prisma põhja servade pikkused on 6 cm, 5 cm ja 3 cm, prisma kõrgus on 3 cm. Prisma servadeks on alumise ja ülemise põhja servad ning kolm serva, mis mõlemat põhja ühendavad. Kõigi servade kogupikkus on järelikult $2 \cdot (6 + 5 + 3) + 3 \cdot 3$ cm ehk 37 cm.

Eesti LIV matemaatikaolümpiaad

10. veebruar 2007 Piirkonnavoor **8. klass**

I osa vastused

1. 4

2. 81075

3. teine, neljas ja viies

4. 4

5. $-\dfrac{2}{3}$

6. 36

7. 120°

8. $\dfrac{\pi}{6}$ cm^2

9. 40°

10. 60 cm^2

Lahendused

1. Kui oleme leidnud mingi arvu 2007^n üheliste numbri a, siis arvu 2007^{n+1} üheliste number on sama mis arvu $a \cdot 7$ üheliste number. Seega

n	0	1	2	3	4	5	6	7
2007^n üheliste number	1	7	9	3	1	7	9	3

Otsitava arvu üheliste number on sama mis arvu $9 + 1 + 1 + 3 = 14$ üheliste number.

2. Otsitava arvu $\overline{a107b}$ ristsumma peab jaguma 3-ga ning see arv peab lõppema 0-ga või 5-ga. Kui $a = 9$, siis annavad $b = 5$ ja $b = 0$ arvu ristsummaks vastavalt 22 ja 17. Kui $a = 8$, siis sobib $b = 5$, ristsumma tuleb siis 21.

3. Jadas esinevate harilike murdude nimetajad on parajasti 4-ga jaguvad arvud Seega arv $\dfrac{2005}{2006}$ jadas ei esine, arv $\dfrac{2007}{2008}$ aga esineb. Viimase arvu ümbruses on jada liikmed

$$\ldots, \quad 2005, \quad 2006, \quad \frac{2007}{2008}, \quad 2009, \quad 2010, \quad \ldots$$

4. Kahel kopal kulub nelja ühesuguse süvendi kaevamiseks $\dfrac{4}{3} \cdot 1{,}5 = 2$ tundi. Et saada valmis 2 korda kiiremini, peab koppasid olema 2 korda rohkem ehk 4.

5. *Lahendus 1.* Võrrandi lahend on $x = \frac{4}{a}$, selle pöördarv on $\frac{a}{4}$ ning viimase vastandarv on $-\frac{a}{4}$. Seega $-\frac{a}{4} = \frac{1}{6}$, millest $a = -\frac{2}{3}$.

Lahendus 2. Et lahendi x pöördarvu vastandarv on $\frac{1}{6}$, siis $x = -6$. Seega $a \cdot (-6) = 4$, kust $a = -\frac{2}{3}$.

6. Keskmisest ringist lähtudes saame 6 viisil valida esimese nulli. Iga sellise valiku korral saame 2 viisil valida teise nulli. Omakorda iga sellise valiku järel saame 3 viisil valida seitsme. Valikuvõimalusi on seega üldse $6 \cdot 2 \cdot 3 = 36$.

7. Täispööre on 360°. Kuue sektori nurkade suuruste summa on $3\alpha + 3\beta = 360^\circ$. Järelikult $\alpha + \beta = 120^\circ$.

8. Et poolringid on võrdse raadiusega, siis $|AC| = |AB| = |BC|$. Kolmnurk ABC on seega võrdkülgne ning $\angle BAC = 60^\circ$. Vaadeldava sektori pindala on seega $\frac{1}{6}$ sama raadiusega ringi pindalast ehk $\frac{1}{6} \cdot \pi \cdot 1^2 = \frac{\pi}{6}$ cm^2.

9. Et kolmnurk ABC on võrdhaarne, siis $\angle ABC = 70^\circ$ ja $\angle EBC = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$. Et kolmnurk BCD on võrdkülgne, siis $\angle BCD = 60^\circ$. Sirge CE on selle kolmnurga kõrgus ja ühtlasi nurgapoolitaja, mistõttu $\angle BCE = 30^\circ$. Kolmnurgast EBC saame nüüd $\angle CEB = 180^\circ - 110^\circ - 30^\circ = 40^\circ$.

10. Prisma põhja servade pikkused on 5 cm, 5 cm, 1 cm, 3 cm, prisma kõrgus on 3 cm. Põhjaks oleva trapetsi pindala on $\frac{5+1}{2} \cdot 3 = 9$ cm^2, kahe põhja pindala on seega 18 cm^2. Prisma külgpindala on põhja ümbermõõdu ja kõrguse korrutis ehk $(5 + 5 + 1 + 3) \cdot 3 = 42$ cm^2. Täispindala on $18 + 42 = 60$ cm^2.

Eesti LIV matemaatikaolümpiaad

10. veebruar 2007 Piirkonnavoor **9. klass**

I osa vastused

1. 4012

2. 79322

3. 45-ndal

4. 8 tundi

5. 3

6. 18

7. (a,b), (d,f).

8. 22,5°

9. 6,4 cm^2

10. 27 cm^3

Lahendused

1. Avaldise väärtus on $2007 \cdot (2007-1) - 2006 \cdot (2006-1) = 2007 \cdot 2006 - 2006 \cdot 2005 = 2006 \cdot (2007-2005) = 2006 \cdot 2 = 4012$.

2. *Lahendus 1.* Otsitava arvu $\overline{7a32b}$ ristsumma peab andma 3-ga jagades jäägi 2 ning see arv peab lõppema 2-ga või 7-ga. Kui $a = 9$, siis $b = 7$ puhul saame ristsummaks 28, mis ei sobi, ent $b = 2$ puhul saame sobiva ristsumma 23.

Lahendus 2. Lahutades antud arvust 2, saame arvu $\overline{7x32y}$, mis jagub 15-ga täpselt (arvu eelviimane number selle operatsiooniga ei muutu). Saadud arvu viimane number on kas 0 või 5 ning tema ristsumma peab jaguma 3-ga. Kui $x = 9$ ja $y = 5$, siis saame ristsummaks 26, mis ei sobi. Kui $x = 9$ ja $y = 0$, siis saame sobiva ristsumma 21. Otsitav arv on sellest arvust 2 võrra suurem ehk 79322.

3. Jada koosneb kolmeliikmelistest plokkidest, kus viimasel kohal paikneb harilik murd, mille nimetaja jagub 4-ga. Vastava jagatise väärtus on parajasti ploki järjekorranumber. Et $60 = 4 \cdot 15$, siis otsitava liikmeni jõudmiseks kulub järjekorras lugedes 15 plokki ehk $3 \cdot 15 = 45$ elementi.

4. Neljal kopal kulub 12 ühesuguse süvendi kaevamiseks 12 tundi. Kuuel kopal kulub 12 süvendi kaevamiseks seega $\frac{4}{6} \cdot 12 = 8$ tundi.

5. Antud ruutfunktsioon on kujul $y = (x+3)^2$, siit näeme, et graafiku haripunkt on $x = -3$ ning ta asub parajasti x-teljel. Haripunkti kaugus y-teljest on seega 3.

6. Olles arvu 200 moodustades jõudnud lähteruudu kohal asuva nullini (2 võimalust), saame valida numbri 7 kahel viisil, kokku 4 varianti. Analoogiliselt on 4 varianti lähteruudust paremal asuva nulli korral. Tabeli keskel paikneva nullini jõudmiseks on 2 võimalust ning numbri 7 võime lõppu lisada viiel viisil, kokku $2 \cdot 5 = 10$ varianti. Üldse on variante seega $4 + 4 + 10 = 18$.

7. Sirged a ja b on paralleelsed, sest nad lõikavad sirget d sama nurga all. Sirge c ei ole sirgega a paralleelne, sest nad lõikavad sirget e erineva nurga all. Vaadeldes nurki, mis tekivad sirgete d, e ja f lõikumisel sirgega a, saame, et ainukesena on paralleelsed sirged d ja f.

8. Piirdenurga suurus on pool samale kaarele toetuva kesknurga suurusest. Et O_1 on väiksema ringjoone keskpunkt ja $\angle AO_1B = 90°$, siis $\angle AO_2B = 45°$. Analoogiliselt on O_2 suurema ringjoone keskpunkt, seega $\angle AOB = 22{,}5°$.

9. Mediaanide lõikepunkt jaotab mediaani suhtes $2:1$. Seega $|AM| = 2|KM|$ ja $|BM| = 2|LM|$. Lisaks on KL kolmnurga kesklõik, mistõttu $|AB| = 2|KL|$. Seega on kolmnurk ABM sarnane kolmnurgaga MKL sarnasusteguriga 2 ning tema pindala on kolmnurga MKL pindalast 4 korda suurem.

10. Prisma põhja servade pikkused on 5 cm, 5 cm, 1 cm, 3 cm, prisma kõrgus on 3 cm. Põhjaks oleva trapetsi pindala on $\frac{5+1}{2} \cdot 3 = 9\ \text{cm}^2$. Prisma ruumala on põhja pindala ja kõrguse korrutis ehk $9 \cdot 3 = 27\ \text{cm}^3$.

II osa lahendused

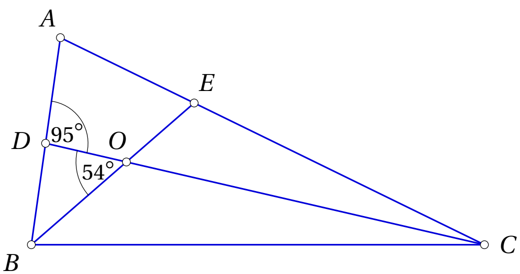
1. *Vastus:* 1986, 1965, 1944 ja 1923.

Lahendus 1. Olgu a ja b vastavalt vanuse kümneliste ja üheliste number. Perekonnaliikme vanus on siis $10a + b$ ning vanuse numbrite summa on $a + b$. Esimene arv peab olema teisest 7 korda suurem, seega $10a + b = 7(a + b)$, millest $3a = 6b$ ehk $a = 2b$. Juhtudel $b = 0$ ja $b \geqslant 5$ ei tule vanus kahekohaline, sest saaksime vastavalt $a = 0$ ja $a \geqslant 10$. Ülejäänud juhtudel, kui b on kas 1, 2, 3 või 4, tuleb a vastavalt kas 2, 4, 6 või 8 ning võimalikeks vanusteks saame 21, 42, 63 ja 84. Kõige noorema perekonnaliikme sünniaasta on $2007 - 21 = 1986$, samamoodi saame ülejäänute sünniaastateks vastavalt 1965, 1944 ja 1923.

Lahendus 2. Ülesande tingimustest järeldub, et iga pereliikme vanus peab jaguma 7-ga. Kõik 7-ga jaguvad kahekohalised arvud on 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70, 77, 84, 91 ja 98. Nende hulgas on oma numbrite summast täpselt 7 korda suuremad ainult arvud 21, 42, 63 ja 84, need ongi pereliikmete vanused. Nende järgi leiame pereliikmete sünniaastad 1986, 1965, 1944 ja 1923.

2. *Vastus:* AB.

Leiame kolmnurga nurgad (joonis 1). Et $\angle ADO = 95^\circ$, siis $\angle BDO = 180^\circ - 95^\circ = 85^\circ$. Kolmnurgas BDO on eelduste põhjal veel $\angle DOB = 54^\circ$, järelikult $\angle DBO = 180^\circ - 85^\circ - 54^\circ = 41^\circ$. Et sirge BO on nurgapoolitaja, siis $\angle ABC = 2 \cdot 41^\circ = 82^\circ$. Nüüd on teada kaks nurka kolmnurgas BDC, siit saame $\angle BCD = 180^\circ - 85^\circ - 82^\circ = 13^\circ$. Et ka sirge CD on kolmnurga



Joonis 1

nurgapoolitaja, siis $\angle ACB = 2 \cdot 13^\circ = 26^\circ$. Kolmnurga ABC kolmanda nurga suurus on $\angle BAC = 180^\circ - 82^\circ - 26^\circ = 72^\circ$. Kolmnurga lühim külg asub vähima nurga vastas, lühim külg on seega AB.

3. *Vastus:* 18 cm.

Kaarel lõikas oma postkaarti kaks korda, Joonas üks kord. Kõik lõiked peavad kulgema mööda vastaskülgede keskpunkte ühendavat sirget. Kui esimesel sammul oleksid Kaarel ja Joonas lõiganud oma postkaarte samamoodi, siis oleks Kaarlile pärast teist lõikamist jäänud Joonase omast kindlasti väiksema ümbermõõduga tükk. Seega lõikasid nad esimesel sammul postkaarte erineval viisil. Veelgi enam, ka teise lõike pidi Kaarel tegema Joonasest erinevas suunas, sest muidu oleks ta saanud tüki, mille üks külg on Joonase tükiga võrdse pikkusega, teine külg aga kaks korda lühem.

Olgu postkaardi pikema külje pikkus x sentimeetrit. Kui Joonas lõikas oma postkaardi pikisuunas, siis sai ta tüki mõõtmetega x cm ja 6 cm. Kaarel lõikas kaks korda ristisuunas ning sai tüki mõõtmetega $\frac{x}{4}$ cm ja 12 cm. Et tükkide ümbermõõdud on võrdsed, siis peab kehtima võrdus $2(x+6) = 2\left(\frac{x}{4} + 12\right)$, millest $\frac{3}{4}x = 6$ ja $x = 8$. See aga ei sobi, sest juba ristküliku lühema külje pikkus on 12 cm.

Kui aga Joonas lõikas oma postkaardi ristisuunas, siis sai ta tüki mõõtmetega $\frac{x}{2}$ cm ja 12 cm. Kaarel lõikas siis kaks korda pikisuunas ja sai tüki mõõtmetega x cm ja 3 cm. Seega $2\left(\frac{x}{2} + 12\right) = 2(x+3)$, millest $\frac{x}{2} = 9$ ja $x = 18$. See sobib ristküliku pikema külje pikkuseks.

II osa lahendused

1. *Vastus:* 52 ja 53.

Lähtume arvust 23. See on saadud 5-ga jaguvas arvus viimase numbri kustutamisel. Seega enne kustutamist võis arv olla ainult kas 230 või 235 ning enne 5-ga korrutamist 46 või 47. Kumbki arv peab olema saadud 9-ga jaguvas arvus viimase numbri kustutamisel.

- Arvu 46 ristsumma on 10, seega pidi viimane number olema 8 ja arv ise 468 ning enne 9-ga korrutamist 52.
- Arvu 47 ristsumma on 11, sel juhul pidi olema viimane number 7, arv ise 477 ja enne 9-ga korrutamist 53.

Igal sammul vaatasime läbi kõik võimalused, seega rohkem sobivaid arve ei ole.

2. *Vastus:* 44 m^2.

Ristküliku $ABCD$ küljepikkused on $|AB| = 12$ m ja $|AD| = 9$ m. Nihutades külgede AB ja CD ääres asuvaid värvitud kujundeid paralleellükkega teineteise poole nii, et nad puutuvad külgepidi kokku, saame tulemuseks rööpküliku alusega 4 m ja kõrgusega $9-2=7$ m. Selle rööpküliku pindala on $4\cdot 7 = 28$ m^2. Nihutades külgede AD ja BC ääres asuvad kujundid analoogiliselt horisontaalse paralleellükkega külgepidi kokku, saame tulemuseks ristküliku alusega $12-4=8$ m ja kõrgusega 2 m, selle ristküliku pindala on $8\cdot 2 = 16$ m^2. Värvitud kujundite kogupindala on $28+16=44$ m^2.

3. *Vastus:* 3.

Kolme ümbertõstmisega saab pähklite arvu võrdseks muuta järgmiselt:

Tõstmine	1. kuhjas	2. kuhjas	3. kuhjas
	22	14	12
1. → 2.	8	28	12
2. → 3.	8	16	24
3. → 1.	16	16	16

Lisaks tuleb põhjendada, miks vähem kui kolmest ümbertõstmisest ei piisa. Pähklite koguarv on 48, mis tähendab, et igasse kuhja peab lõpuks jääma 16 pähklit. Pärast esimest ümbertõstmist jääb alati seis, kus igas kuhjas on 16-st erinev arv pähkleid. Teine ümbertõstmine puudutab ainult kahte kuhja ega saa seetõttu kõiki kolme arvu 16-ks muuta. Seega on vaja veel vähemalt ühte ümbertõstmist.

II osa lahendused

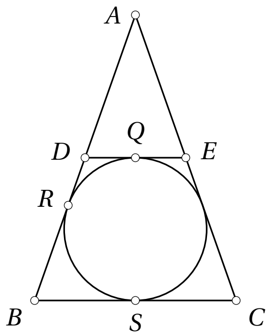
1. *Vastus:* 36% konnakoivaleotist, 18% põdrasamblatõmmist ja 46% kukejuureteed.

Lahendus 1. Ühes liitris nõiarohus oli 600 ml konnakoivaleotist, 300 ml põdrasamblatõmmist ja 100 ml kukejuureteed. Pärast poole ärakasutamist jäi pudelisse järele 300 ml konnakoivaleotist, 150 ml põdrasamblatõmmist ja 50 ml kukejuureteed, millele Nõia-Ella lisas 500 ml kukejuureteed, viimast sai kokku 550 ml. Tarvitades viiendiku uuest segust, jäi pudelisse järele 240 ml konnakoivaleotist, 120 ml põdrasamblatõmmist ja 440 ml kukejuureteed. Lõpuks pani Nõia-Ella juurde 200 ml algset segu, milles oli seega 120 ml konnakoivaleotist, 60 ml põdrasamblatõmmist ja 20 ml kukejuureteed. Kokku sai $240 + 120 = 360$ ml konnakoivaleotist, $120 + 60 = 180$ ml põdrasamblatõmmist ja $440 + 20 = 460$ ml kukejuureteed.

Lahendus 2. Et Nõia-Ella lisas pudelisse juurde ainult kas kukejuureteed või algset segu, siis ülejäänud kahe komponendi, konnakoivaleotise ja põdrasamblatõmmise omavaheline suhe segus jäi kogu aeg samasuguseks nagu alguses, st $36 : 18 = 2 : 1$. Leiame nüüd kukejuuretee koguse pudelis iga tegevuse järel. Algselt oli seda 100 ml, millest kontide raviks kulus ära 50 ml. Varbarohus oli kukejuureteed seega $50 + 500 = 550$ ml, millest alles jäi neli viiendikku ehk 440 ml. Lõpuks juurdevalatud 200 ml algses segus oli kukejuureteed 20 ml ning saadud külmarohus kokku seega $440 + 20 = 460$ ml ehk 46%. Et ülejäänud 54% moodustasid konnakoivaleotis ja põdrasamblatõmmis vahekorras $2 : 1$, siis oli konnakoivaleotist lõpuks 36% ja põdrasamblatõmmist 18%.

2. *Vastus:* $2 : 1$.

Olgu ABC vaadeldav kolmnurk, D ja E vastavalt haarade AB ja AC keskpunktid ning R siseringjoone puutepunkt kolmnurga haaraga AB (joonis 2). Lõik DE on siis kolmnurga kesklõik, ta on paralleelne alusega BC ning tema pikkus on pool aluse pikkusest. Olgu Q ja S vastavalt lõikude DE ja BC keskpunktid, siis ilmselt $\frac{|DQ|}{|BS|} = \frac{1}{2}$. Teiselt poolt on Q ja S sümmeetria tõttu punktid, kus kolmnurga siseringjoon puutub lõike DE ja BC. Puutujalõikude võrdsuse tõttu $|DQ| = |DR|$ ja $|BS| = |BR|$. Järelikult



Joonis 2

$\dfrac{|DR|}{|BR|} = \dfrac{1}{2}$. Nüüd

$$\frac{|AR|}{|RB|} = \frac{|AD| + |DR|}{|RB|} = \frac{|DB| + |DR|}{|RB|} = \frac{2 \cdot |DR| + |RB|}{|RB|} = 2 \cdot \frac{|DR|}{|RB|} + 1 = 2.$$

3. *Vastus:* 5 minutit.

Lahendus 1. 5 minutiga saavad kõik üle silla järgmiselt. Algul lähevad Notsu ja Ruu koos üle, siis tuleb Notsu tagasi, siis läheb Puhh üle, seejärel tuleb Ruu tagasi ning lõpuks lähevad Notsu ja Ruu uuesti koos üle.

Lisaks tuleb tõestada, et lühema ajaga pole sillaületamine võimalik. Kõige vähem aega võtva skeemi korral ei tohi Puhh üle minna esimesena, sest pärast seda oleks ainuke võimalus tal koos laternaga uuesti tagasi tulla, millega tekiks jälle esialgne seis. Analoogiliselt ei tohi Puhh üle minna viimasena, sest laterna selleks saaks ta tuua ainult ise teiselt kaldalt. Järelikult sisaldab kiireim skeem vähemalt 3 sillaületust edasisuunas, mille käigus latern viiakse lähtekaldalt ära, nende vahele jääb siis vähemalt 2 naasmist, mille käigus latern tuuakse lähtekaldale tagasi. Seega kestab kogu ettevõtmine vähemalt 5 minutit.

Lahendus 2. On ilmne, et lühima strateegia puhul ei või esineda sellist olukorda, kus sama rühm ületab silla kahel järjestikusel minutil edasi-tagasi. Esimesel minutil peab silla ületama rohkem kui üks tegelane, sest vastasel korral peaks ta kohe seejärel tagasi tulema. Ainuke võimalus on, et üle lähevad Notsu ja Ruu. Teisel minutil ei saa mõlemad korraga tagasi tulla. Et ülesande seisukohalt on Notsu ja Ruu samaväärsed, siis võime üldisust kitsendamata eeldada, et tagasi tuleb Notsu. Kolmandal minutil ei saa Notsu üksi tagasi minna, ei saa minna ka Puhh ja Notsu koos, järelikult läheb üle Puhh üksinda. Neljandal minutil ei saa Puhh üksi tagasi tulla, ta ei saa tulla ka koos Ruuga, järelikult tuleb Ruu üksinda. Viiendal minutil on Notsul ja Ruul võimalus koos sild ületada ning esmakordselt saavutada seis, kus kõik tegelased on teisel kaldal. Seega on lühim sillaületuseks kuluv aeg 5 minutit.

4. *Vastus:* $n = 3k$, kus $k = 0, 1, 2, \ldots$

Et $27 = 9 \cdot 3$, jagame antud arvu esmalt 9-ga ning tulemuse seejärel 3-ga. Arv $200\ldots07$ jagub alati 9-ga ning jagatis on $22\ldots23$. Selles on täpselt n kahte, sest jagatava iga nulli kohta tekib jagatisse üks kaks. Arv $22\ldots23$ jagub 3-ga parajasti siis, kui tema ristsumma $2n + 3$ jagub 3-ga. See omakorda leiab aset parajasti siis, kui n jagub 3-ga.

Lahendused

1. *Vastus:* 2.

Tähistame lühiduse mõttes $2007 = a$. Avaldise väärtus on siis

$$\begin{aligned} & a(a+1)(a+2) + 2(a-1)a(a+1) - \\ & \qquad - (a-1)a^2 - a(a+1)^2 - (a-1)(a+1)(a+2) = \\ & = \big(a-(a-1)\big)(a+1)(a+2) + (a-1)a\big((a+1)-a\big) + \\ & \qquad + \big((a-1)-(a+1)\big)a(a+1) = \\ & = (a+1)(a+2) + (a-1)a - 2a(a+1) = \\ & = (a+1)\big((a+2)-a\big) + \big((a-1)-(a+1)\big)a = (a+1)\cdot 2 - 2a = 2. \end{aligned}$$

2. *Vastus:* 40.

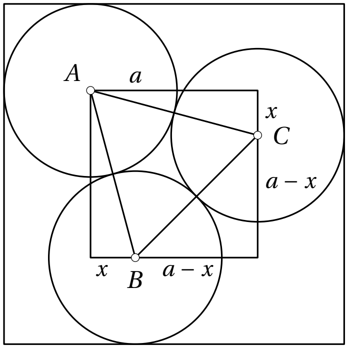
Olgu ostetud aktsiate koguväärtus algul N krooni, siis esimese aasta järel oli nende väärtus $1{,}25\,N$ krooni, teise aasta järel $0{,}75 \cdot 1{,}25\,N$ krooni ning kolmanda aasta järel $0{,}8 \cdot 0{,}75 \cdot 1{,}25\,N = 0{,}75\,N$ krooni. Et aktsiate koguväärtus neljanda aasta järel oleks 5% esialgsest suurem, peaks see olema $1{,}05\,N$ krooni. Neljandal aastal peab aktsiate hind tõusma seega $\frac{1{,}05\,N}{0{,}75\,N} = 1{,}4$ korda ehk 40%.

3. *Vastus:* $(1,-2,1,-2)$ ning kõik nelikud $(a,0,-a,0)$, kus a on suvaline reaalarv.

Viete'i valemite põhjal

$$\begin{aligned} c+d &= -a, \\ cd &= b, \\ a+b &= -c, \\ ab &= d. \end{aligned}$$

Esimesest võrrandist saame $d = -a-c$, kolmandast aga $b = -c-a$, järelikult $d = b$. Teine ja neljas võrrand omandavad siis vastavalt kuju $cb = b$ ja $ab = b$. Kui $b \neq 0$, siis $c = 1$ ja $a = 1$ ning eelnevat arvestades $d = b = -c-a = -2$. Siit saame ühe sobiva neliku $(1,-2,1,-2)$. Kui aga $b = 0$, siis ka $d = 0$ ning esialgsed võrrandid annavad $c = -a$. Siit saame nelikud $(a,0,-a,0)$, kus a on suvaline reaalarv. Kontroll näitab, et kõik leitud nelikud sobivad.



Joonis 3

4. *Vastus:* $2 + \dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}$.

Vaatleme võrdkülgset kolmnurka ABC küljepikkusega 2, mille tippudeks on ringjoonte keskpunktid, ning ruutu, mis paikneb esialgse ruudu sees nii, et tema küljed on paralleelsed esialgse ruudu külgedega ning jäävad nendest kaugusele 1 (joonis 3). Kolmnurga ABC tipp A langeb siis kokku sisemise ruudu tipuga ning ülejäänud kaks tippu B ja C paiknevad sisemise ruudu külgedel sümmeetriliselt diagonaali suhtes.

Olgu a sisemise ruudu küljepikkus ning x kolmnurga tippude B ja C kaugus sisemise ruudu lähimast tipust. Rakendades Pythagorase teoreemi täisnurksetele kolmnurkadele hüpotenuusidega AC ja BC, saame $a^2 + x^2 = 2^2$ ja $(a - x)^2 + (a - x)^2 = 2^2$ ehk $a^2 + x^2 = 4$ ja $(a - x)^2 = 2$. Kahe viimase võrduse lahutamisel saame $2ax = 2$, mille abil omakorda $(a + x)^2 = 6$. Seega

$$a = \frac{(a - x) + (a + x)}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}.$$

Esialgse ruudu küljepikkus on niisiis $a + 2 = 2 + \dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}$.

5. *Vastus:* ainus selline arv on $k = 2$.

Üldisust kitsendamata võime eeldada, et a ja b on ühistegurita. Teisalt, korrutades antud võrduse pooled läbi teguriga ab, saame

$$a^2 + b^2 = kab,$$

kust on näha, et arvu a iga algarvuline tegur on ka b tegur ja vastupidi. Seega on ainsaks võimaluseks $a = b = 1$, mis annab $k = 2$.

6. *Vastus:* 5.

Et ühegi paki mass ei ületa 1 tonni, saab 3-tonnisele veokile alati laadida vähemalt 2 tonni pakke. Seega piisab 10-tonnise laadungi äravedamiseks 5 reisist. Ei piisa aga 4 reisist, sest kui laadung koosneb 13 ühesugusest pakist, igaüks massiga $\frac{10}{13}$ tonni, siis mahub neid 3-tonnisele veokile maksimaalselt 3, mis tähendab, et 4 reisiga saab ära vedada ülimalt 12 pakki.

Lahendused

1. *Vastus:* $x = 0$ ja kõik $x \geqslant 1$.

Lahendus 1. Kui $\big|x - |x-1|\big| = 1$, siis $x - |x-1|$ peab olema 1 või -1. Kui $x - |x-1| = 1$, siis $|x-1| = x-1$, ehk $x - 1 \geqslant 0$, kust $x \geqslant 1$. Kui $x - |x-1| = -1$, siis $|x-1| = x+1 = (x-1)+2$. See on võimalik ainult siis, kui $|x-1| = 1-x$, seega $1 - x = x + 1$, kust $x = 0$. Kontroll näitab, et kõik tingimust $x \geqslant 1$ rahuldavad arvud ning ka arv $x = 0$ sobivad antud võrrandi lahendiks.

Lahendus 2. Kui $x \geqslant 1$, siis $|x-1| = x-1$ ning $x - |x-1| = x-(x-1) = 1$ ja $\big|x-|x-1|\big| = |1| = 1$. Kui $x < 1$, siis $|x-1| = 1-x$ ning $x - |1-x| = x-(1-x) = 2x-1$. Võrrand $\big|x-|x-1|\big| = 1$ omandab niisiis kuju $|2x-1| = 1$, st $2x - 1 = 1$ või $2x - 1 = -1$. Kui $2x - 1 = 1$, siis $x = 1$, mis on vastuolus eeldusega $x < 1$. Kui $2x - 1 = -1$, siis $x = 0$.

2. *Vastus:* $a = \frac{2}{5}$; lõikepunktide koordinaadid on $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ ja $\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

Lahendus 1. Olgu (x_1, y_1) esimene lõikepunkt. Teine lõikepunkt on siis (y_1, x_1), sest mõlemad antud võrrandid on sümmeetrilised x ja y suhtes. Kui teise lõikepunkti x-koordinaat on esimese omast 2 korda suurem, siis $y_1 = 2x_1$ ning esimese lõikepunkti koordinaadid avalduvad kujul $(x_1, 2x_1)$. Tingimusest, et see punkt asub ringjoonel $x^2 + y^2 = 1$, saame $x_1^2 + 4x_1^2 = 1$, siit lõikepunktide koordinaatide positiivsust arvestades $x_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ ning $y_1 = \frac{2}{\sqrt{5}}$. Otsitavad lõikepunktid on seega $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ ja $\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$. Et punktid asuvad joonel $y = \frac{a}{x}$, siis $a = x_1 y_1 = \frac{2}{5}$.

Lahendus 2. Lõikepunktid (x, y) paiknevad nii joonel $y = \frac{a}{x}$ kui ka ringjoonel $x^2 + y^2 = 1$, mistõttu $x^2 + \frac{a^2}{x^2} = 1$ ehk

$$x^4 - x^2 + a^2 = 0.$$

Tähistades $z = x^2$, saame ruutvõrrandi $z^2 - z + a^2 = 0$, mille lahendid on meid huvitavate lõikepunktide x-koordinaatide x_1 ja x_2 ruudud. Viète'i valemitest saame niisiis, et $x_1^2 + x_2^2 = 1$. Vastavalt ülesande tingimusele

$x_2 = 2x_1$, seega $x_1^2 + 4x_1^2 = 1$, kust $x_1^2 = \frac{1}{5}$ ning $x_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ ja $x_2 = \frac{2}{\sqrt{5}}$. Et lõikepunktid (x_1, y_1) ja (x_2, y_2) paiknevad ringjoonel $x^2 + y^2 = 1$ ning $x_i > 0$ ja $a > 0$ tõttu ka $y_i > 0$, siis $y_1 = \sqrt{1 - x_1^2} = \frac{2}{\sqrt{5}}$ ja $y_2 = \sqrt{1 - x_2^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Et lõikepunktid (x_1, y_1) ja (x_2, y_2) paiknevad ühtlasi ka joonel $y = \frac{a}{x}$, siis $a = x_1 \cdot y_1 = x_2 \cdot y_2 = \frac{2}{5}$.

Lahendus 3. Samuti nagu eelmises lahenduses leiame, et lõikepunktide x-koordinaatide x_1 ja x_2 ruudud rahuldavad võrrandit $z^2 - z + a^2 = 0$. Selle ruutvõrrandi lahendid on $z_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4a^2}}{2}$. Olgu $x_2 = 2x_1$, siis $z_2 = x_2^2 = 4x_1^2 = 4z_1$ ehk

$$1 + \sqrt{1 - 4a^2} = 4 \cdot \left(1 - \sqrt{1 - 4a^2}\right),$$

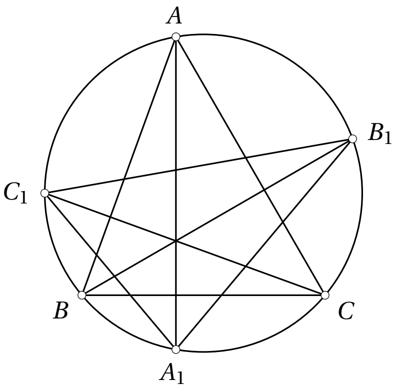
kust lihtsustades saame $5\sqrt{1 - 4a^2} = 3$ ehk $1 - 4a^2 = \frac{9}{25}$ ning $a^2 = \frac{4}{25}$. Et $a > 0$, siis $a = \frac{2}{5}$. Lõikepunktide x-koordinaatide ruudud on niisiis $x_1^2 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4a^2}}{2} = \frac{1}{5}$ ja $x_2^2 = 4x_1^2 = \frac{4}{5}$, kust $x_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ ja $x_2 = \frac{2}{\sqrt{5}}$. Et lõikepunktid (x_1, y_1) ja (x_2, y_2) asuvad ringjoonel $x^2 + y^2 = 1$ ning $x_i > 0$ ja $a > 0$ tõttu ka $y_i > 0$, siis $y_1 = \sqrt{1 - x_1^2} = \frac{2}{\sqrt{5}}$ ja $y_2 = \sqrt{1 - x_2^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

3. *Vastus:* värvitud hulknurga maksimaalne pindala on $\frac{2}{3}$, mis realiseerub $r = \frac{1}{3}$ korral.

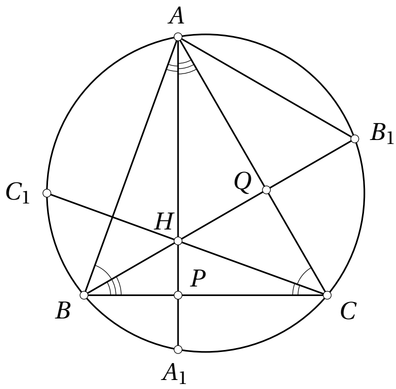
Neli värvimata kolmnurka ruudu nurkades annavad hüpotenuuse pidi kokku pannes kaks ruutu küljepikkusega r, ülejäänud neli värvimata kolmnurka annavad kaateteid pidi kokku pannes ruudu küljepikkusega $1-2r$. Nõutava kujundi pindala on seega

$$1 - 2r^2 - (1 - 2r)^2 = 4r - 6r^2 = 2r(2 - 3r).$$

Tegemist on ruutparabooliga, mille harud avanevad allapoole ning mille nullkohad on 0 ja $\frac{2}{3}$. Ruutparabooli haripunkt asub mõlemast nullkohast võrdsel kaugusel. Vaadeldava funktsiooni maksimumkoht on järelikult $r = \frac{1}{3}$ ning maksimaalne väärtus on $2 \cdot \frac{1}{3} \cdot (2 - 3 \cdot \frac{1}{3}) = \frac{2}{3}$.



Joonis 4



Joonis 5

Märkus. Avaldise $4r - 6r^2$ maksimumkoha saab leida ka täisruudu eraldamisega, esitades avaldise kujul

$$4r - 6r^2 = \frac{2}{3} - 6\left(r - \frac{1}{3}\right)^2.$$

Selle avaldise maksimumkoht on $r = \frac{1}{3}$ ning maksimaalne väärtus $\frac{2}{3}$.

4. *Lahendus 1.* Vaatleme kolmnurka $A_1B_1C_1$ (joonis 4). Et kaared AB_1 ja AC_1 on pikkuse poolest võrdsed, siis $\angle AA_1B_1 = \angle AA_1C_1$ ehk sirge A_1A on nurga $B_1A_1C_1$ poolitaja. Analoogiliselt on ka sirged B_1B ja C_1C vastavate nurkade poolitajad. Kolmnurga nurgapoolitajad aga lõikuvad ühes punktis.

Lahendus 2. Et kaarte AB_1 ja AC_1 pikkus on sama, siis $\angle ABB_1 = \angle ACC_1$ (joonis 5). Analoogiliselt $\angle BCC_1 = \angle BAA_1$ ja $\angle CAA_1 = \angle CBB_1$. Olgu α, β ja γ vastavalt nende kolme nurga suurused. Vaatleme kolmnurka APB, kus P on sirgete AA_1 ja BC lõikepunkt. Siin $\angle APB = 180^\circ - (\alpha + \beta + \gamma)$. Ent kolmnurga ABC sisenurkade summa on $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 180^\circ$, millest $\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$. Järelikult $\angle APB = 90^\circ$ ehk sirge AA_1 on sirgega BC risti ja kujutab endast seega kolmnurga ABC tipust A tõmmatud kõrgust. Analoogiliselt on ka sirged BB_1 ja CC_1 kõrgused. Kolmnurga kõrgused aga lõikuvad ühes punktis.

Lahendus 3. Tõestame esiteks, et punktid A_1, B_1 ja C_1, milles kolmnurga ABC kõrguste pikendused lõikuvad kolmnurga ümberringjoonega, rahuldavad ülesande eeldusi. Olgu P ja Q vastavalt kolmnurga tippudest A ja B tõmmatud kõrguste aluspunktid ning H kõrguste lõikepunkt. Ilmselt $\angle AB_1B = \angle ACB$ ja $\angle AHB_1 = \angle A_1HB$. Täisnurksed kolmnurgad QCB ja PHB on sarnased ühise teravnurga tõttu, seega $\angle QCB = \angle A_1HB$, millest $\angle AB_1H = \angle AHB_1$. Kolmnurk AB_1H on järelikult võrdhaarne ehk

$|AB_1| = |AH|$. Analoogiliselt saame $|AC_1| = |AH|$ ehk $|AB_1| = |AC_1|$. Samamoodi näitame, et $|BC_1| = |BA_1|$ ja $|CA_1| = |CB_1|$.

Teiseks tõestame, et ülesande tingimused määravad antud kolmnurga ABC korral punktid A_1, B_1 ja C_1 üheselt. Olgu α kaartele AB_1 ja AC_1 vastav piirdenurk, β kaartele BC_1 ja BA_1 vastav piirdenurk ning γ kaartele CA_1 ja CB_1 vastav piirdenurk nagu lahenduses 2. Need suurused peavad rahuldama võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} \alpha + \beta = \angle BCA \\ \beta + \gamma = \angle CAB \\ \gamma + \alpha = \angle ABC. \end{cases}$$

Võrduste liitmisel saame $2(\alpha + \beta + \gamma) = \angle BCA + \angle CAB + \angle ABC = 180^\circ$, millest $\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$. Lahutades viimasest võrdusest järjestikku võrrandisüsteemi üksikud võrrandid, leiame $\alpha = 90^\circ - \angle CAB$, $\beta = 90^\circ - \angle ABC$ ja $\gamma = 90^\circ - \angle BCA$. Kolmnurga ABC nurgad määravad seega üheselt α, β ja γ, viimased omakorda määravad üheselt punktid A_1, B_1 ja C_1.

Kokkuvõttes näeme, et antud kolmnurga ABC korral on A_1, B_1 ja C_1 parajasti kõrguste pikenduste lõikepunktid kolmnurga ümberringjoonega, kõrgused aga lõikuvad ühes punktis.

5. *Vastus:* ainus sobiv arvupaar on $(p-1, p^2-p)$.

Lahendus 1. Korrutades antud võrduse pooled läbi teguriga pab, saame

$$pb - pa = ab.$$

See võrdus on samaväärne võrdusega $ab + pa - pb - p^2 = -p^2$ ehk

$$(a-p)(b+p) = -p^2.$$

Arvu $-p^2$ saab esitada kahe vastandmärgilise teguri korrutisena, kuid selleks, et a ja b oleksid positiivsed, peab teine tegur $b+p$ olema suurem kui p. Et p on algarv, siis ainukese võimalusena $b+p = p^2$ ja $a - p = -1$, millest $a = p-1$ ja $b = p^2 - p$.

Lahendus 2. Korrutades võrduse pooli teguriga pab, saame

$$pb - pa = ab.$$

Et selle võrduse parem pool peab jaguma algarvuga p, peab kas a või b jaguma p-ga. Kui $a = px$, siis võime võrduse ümber kirjutada kujul $b - px = xb$ ehk $b(x-1) = -px$. Siin on vasak pool mittenegatiivne ja parem pool negatiivne, seetõttu sellel võrrandil lahendid puuduvad. Kui $b = px$, siis võime võrduse ümber kirjutada kujul $px - a = ax$ ehk $a(x+1) = px$. Et arvud $x+1$ ja x on ühistegurita, peab a jaguma x-ga. Samas p on algarv, mistõttu parema poole ainsad x-ga jaguvad tegurid on x ja px. Juht $a = px$ eelneva põhjal lahendeid ei anna, juhul $a = x$ saame $x + 1 = p$, millest $a = x = p-1$ ja $b = p(p-1)$.

6. *Lahendus 1.* Eeldame, et kokkulugemise tulemusena saame k arvu n_1, n_2, …, n_k. Seejuures on k paarisarv, sest ridu ja veerge on antud juhul võrdselt ning ka üht- ja teistpidi diagonaale on võrdselt. Iga must ruut läheb arvesse parajasti 4 arvu leidmisel, seega kõigi arvude summa $n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ jagub 4-ga ning on järelikult paarisarv. See on võimalik ainult siis, kui paarituid liidetavaid on summas paarisarv. Et liidetavate koguarv k on paarisarv, peab summas ka paarisliidetavaid olema paarisarv.

Lahendus 2. Nimetame ridu, veerge ja diagonaale üldnimega *liinideks.* Olgu N paarisarvu musti ruute sisaldavate liinide koguarv ruudustikus. Vaatleme sammu, kus üks valge ruut värvitakse mustaks. Selle tulemusena muutub mustade ruutude arvu paarsus neljal liinil. Kui kõigil neist neljast liinist oli algselt paarisarv (paaritu arv) musti ruute, siis N väheneb (vastavalt suureneb) 4 võrra. Kui neljast liinist kolmel oli paarisarv ja ühel paaritu arv musti ruute (või vastupidi), siis N muutub 2 võrra. Kui aga nende nelja liini hulgas oli võrdselt paarisarvulise ja paarituarvulise mustade ruutude arvuga liine, siis jääb N muutumatuks. Seega operatsiooni tulemusena arvu N paarsus ei muutu.

Vaatleme nüüd algseisu, kus kõik ruudud on valged. Et ruudustikus on kokku paarisarv liine ning igal neist on paarisarv 0 musti ruute, siis on N siin paarisarv. Mis tahes võimaliku ruudustiku värvimise saame sellisest algseisust lõpliku arvu eespool kirjeldatud sammude abil. Et ühelgi sammul ei muutu arvu N paarsus, siis on N paarisarv iga värvimise korral.

Märkus. Ülesande väide kehtib kõigi $m \times n$ ruudustike korral, kus $m + n$ on paarisarv. Kui aga $m + n$ on paaritu arv, siis kehtib vastupidine väide: ridu, veerge ja diagonaale, kus esineb paarisarv musti ruute, on kokku paaritu arv.

Lahendused

1. *Vastus:* $(1-n, 2)$, $(n+1, 0)$ ja $(-n-1, -2)$.

Olgu $A(0,-1)$, $B(-n,0)$ ja $C(1,1)$ rööpküliku tipud. Neljandaks tipuks D sobivaid punkte on kolm: vastavalt sellele, milline lõikudest AB, BC ja CA on rööpküliku diagonaal.

- Kui BC on diagonaal, siis on tegemist rööpkülikuga $CABD$ ning $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} = (-n, 1)$, kust saame neljanda tipu $D(1-n, 2)$.
- Kui CA on diagonaal, siis on tegemist rööpkülikuga $ABCD$ ning $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = (n+1, 1)$, kust saame neljanda tipu $D(n+1, 0)$.
- Kui AB on diagonaal, siis on tegemist rööpkülikuga $BCAD$ ning $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CA} = (-1, -2)$, kust saame tipu $D(-n-1, -2)$.

2. *Vastus:* $a = \frac{5}{4}$; puutepunktide koordinaadid on $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ ja $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

Lahendus 1. Ülesandes nimetatud parabool avaneb ülespoole ning selle telg ühtib ringjoone sümmeetriateljega. Et $a > 1$, siis paikneb parabooli tipp koordinaatteljestikus ringjoonest allpool. Parabooli ja ringjoone ühised punktid esinevad seega sümmeetriliselt paaridena, kus y-koordinaadid on võrdsed ning x-koordinaadid absoluutväärtuselt võrdsed ja vastasmärgilised. Antud tingimustel saab ühiseid punkte olla 4 (kui parabool lõikab ringjoont), 2 (kui parabool puutub ringjoont) või 0.

Puutepunktid (x, y) paiknevad nii paraboolil $y = x^2 - a$ kui ka ringjoonel $x^2 + y^2 = 1$, mistõttu $(y + a) + y^2 = 1$ ehk

$$y^2 + y + (a-1) = 0.$$

Eeldusel $a > 1$ puutuvad parabool ja ringjoon parajasti siis, kui sellel ruutvõrrandil on üksainus lahend ehk tema diskriminant võrdub nulliga. Seega $D = 1-4(a-1) = 5-4a = 0$, kust $a = \frac{5}{4}$. Puutepunktide ühine y-koordinaat on siis $y_{1,2} = -\frac{1}{2}$ ning x-koordinaadid on $x_{1,2} = \pm\sqrt{1 - y_{1,2}^2} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lahendus 2. Samuti nagu esimeses lahenduses määrame parabooli ja ringjoone ühiste punktide võimalikud asukohad eeldusel $a > 1$. Puutepunktid (x, y) paiknevad nii paraboolil $y = x^2 - a$ kui ka ringjoonel $x^2 + y^2 = 1$, mistõttu $x^2 + (x^2 - a)^2 = 1$ ehk

$$x^4 + (1-2a)x^2 + (a^2-1) = 0.$$

Tähistades $z = x^2$, saame ruutvõrrandi $z^2 + (1-2a)z + (a^2-1) = 0$, mille lahendid on parabooli $y = x^2 - a$ ja ringjoone $x^2 + y^2 = 1$ ühiste punktide x-koordinaatide ruudud. Kui ringjoon ja parabool puutuvad, siis on sellel ruutvõrrandil üksainus lahend ehk $D = (1-2a)^2 - 4(a^2-1) = 5 - 4a = 0$, kust $a = \frac{5}{4}$. Ruutvõrrandi ainus lahend on sel juhul $z = \frac{2a-1}{2}$. Seega puutepunktide x-koordinaadid on $x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{2a-1}{2}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ ning nende ühine y-koordinaat on $y_{1,2} = x_{1,2}^2 - \frac{5}{4} = \frac{3}{4} - \frac{5}{4} = -\frac{1}{2}$.

3. *Vastus:* $\frac{1}{3}$.

Olgu V risttahuka ruumala. Lõigates risttahukast välja kujundi $BDFH$, jäävad järele püramiidid $ABHD$, $CDFB$, $EFDH$ ja $GHBF$. Need neli püramiidi on kõik võrdse ruumalaga, sest nende põhjad jaotavad risttahuka kaks vastastahku pooleks, püramiidide ühiseks kõrguseks aga on samade vastastahkude vaheline kaugus. Ühe püramiidi, näiteks $ABHD$ ruumala on

$$\frac{1}{3} \cdot S_{AHD} \cdot |AB| = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot |AH| \cdot |AD| \cdot |AB| = \frac{1}{6} V.$$

Nelja püramiidi ruumala on järelikult $4 \cdot \frac{1}{6} V = \frac{2}{3} V$ ning kujundi $BDFH$ ruumala $V - \frac{2}{3} V = \frac{1}{3} V$.

Märkus. Ülesande väide kehtib tegelikult ka üldisemalt, suvalise rööptahuka $ABCDEFGH$ korral. Tõestus on analoogiline ülaltoodud lahendusega.

4. *Vastus:* 8.

Olgu klaviatuuril k klahvi, sealhulgas m modaalklahvi. Tavaklahve on siis $k - m$. Iga tavaklahviga kombineerub modaalklahvide hulga suvaline alamhulk; selliseid alamhulki on 2^m. Programmide käivitamiseks sobivate klahvikombinatsioonide arv on seega $2^m(k-m)$.

Kui $k = 8$, siis võime võtta $m = 7$: sel juhul on erinevaid klahvikombinatsioone eelneva valemi põhjal $2^7(8-1) = 128$ ehk tõepoolest vähemalt 100. Kui $k \leqslant 7$, siis $2^m(k-m) \leqslant 2^m(7-m)$, selle võrratuse parem pool on m võimalike väärtuste $m = 0, \ldots, 7$ korral alati 100-st väiksem:

m	0	1	2	3	4	5	6	7
$2^m(7-m)$	7	12	20	32	48	64	64	0

5. *Vastus:* $(p+1, p^2+p)$, $(2p, 2p)$ ja $(p^2+p, p+1)$.

Lahendus 1. Korrutades antud võrduse pooled läbi teguriga pab, saame

$$pa + pb = ab.$$

See võrdus on samaväärne võrdusega $ab - pa - pb + p^2 = p^2$ ehk

$$(a-p)(b-p) = p^2.$$

Arvu p^2 saab esitada kahe positiivse või kahe negatiivse teguri korrutisena, kuid selleks, et a ja b oleksid positiivsed, peavad mõlemad tegurid olema suuremad kui $-p$. Arvestades lisaks, et p on algarv, saame parajasti järgmised võimalused:

- $a - p = 1$, $b - p = p^2$, millest $a = p + 1$ ja $b = p^2 + p$;
- $a - p = p$, $b - p = p$, millest $a = 2p$ ja $b = 2p$;
- $a - p = p^2$, $b - p = 1$, millest $a = p^2 + p$ ja $b = p + 1$.

Lahendus 2. Korrutades võrduse pooli teguriga pab, saame

$$pa + pb = ab.$$

Et selle võrduse parem pool peab jaguma algarvuga p, peab kas a või b jaguma p-ga. Kui $a = px$, siis võime võrduse ümber kirjutada kujul $px + b = xb$ ehk $b(x-1) = px$. Et arvud $x - 1$ ja x on ühistegurita, peab b jaguma x-ga. Samas p on algarv, mistõttu parema poole ainsad x-ga jaguvad tegurid on x ja px. Seega saame järgmised võimalused:

- $b = x$ ja $x - 1 = p$, millest $x = p + 1$ ning $a = p(p+1)$, $b = p + 1$;
- $b = px$ ja $x - 1 = 1$, millest $x = 2$ ning $a = 2p$, $b = 2p$.

Kui aga $b = px$, siis tulevad sümmeetria tõttu vastuseks samasugused arvupaarid, ainult a ja b väärtused on eelnevaga võrreldes vahetatud.

6. *Lahendus 1.* Pärast poolte 3-ga korrutamist ja sarnaste liikmete koondamist näeme, et ülesande võrratus on samaväärne võrratusega

$$2|AB|^2 + 2|BC|^2 > |CA|^2.$$

Kasutades kolmnurgavõrratuse $|AB| + |BC| > |CA|$ ruututõstmisel tekkivat võrratust $|AB|^2 + |BC|^2 + 2 \cdot |AB| \cdot |BC| > |CA|^2$ ning aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vahelist võrratust $|AB|^2 + |BC|^2 \geqslant 2 \cdot |AB| \cdot |BC|$, saame

$$2|AB|^2 + 2|BC|^2 \geqslant |AB|^2 + |BC|^2 + 2 \cdot |AB| \cdot |BC| > |CA|^2.$$

Lahendus 2. Täiendame kolmnurga ABC rööpkülikuks $ABCD$ nii, et lõik AC oleks tema diagonaal. Et rööpküliku küljepikkuste ruutude summa võrdub diagonaalide pikkuste ruutude summaga, siis

$$2(|AB|^2 + |BC|^2) = |AC|^2 + |BD|^2 > |AC|^2.$$

Seega $2(|AB|^2 + |BC|^2) > |AC|^2$, mis on samaväärne tõestatava võrratusega.

Märkus. Suurim kordaja c, mille puhul suvalises kolmnurgas ABC kehtib võrratus

$$|AB|^2 + |BC|^2 > c\left(|AB|^2 + |BC|^2 + |CA|^2\right),$$

on $c = \dfrac{1}{3}$. Vaatleme kolmnurka ABC, milles $|AB| = |BC| = 1$. Koosinusteoreemist $|CA|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |BC| \cdot \cos\angle ABC = 2 - 2\cos\angle ABC$. Kõne all olev võrratus omandab siis kuju $2 > c(4 - 2\cos\angle ABC)$ ehk $\cos\angle ABC > 2 - \dfrac{1}{c}$. Kui $c > \dfrac{1}{3}$, siis $2 - \dfrac{1}{c} > -1$, sel juhul saab valida nurga ABC suuruse nii, et võrdhaarne kolmnurk ABC võrratust ei rahulda.