

LIII Олимпиада по математике учащихся Эстонии

28 января 2006 г.

Региональный тур

10 класс

Время, отводимое для решения: 5 часов.

Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.

Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Найти все действительные решения уравнения

$$\frac{1 - (x^2 + 3x + 1)^2}{1 - (x + 2)^2} = 0.$$

2. В Стране Чудес ставка подоходного налога равна 10%, а необлагаемый налогом минимум 1000 денаров (это значит, что подоходный налог составляет 10% части месячного дохода, которая превышает 1000 денаров). Партия Светлого Будущего обещает установить ставку подоходного налога 20% и необлагаемый налогом минимум 2000 денаров. При каком месячном доходе пришлось бы по новому порядку платить ровно столько же подоходного налога, сколько и сейчас?
3. Из цифр 1, 2, ..., 9 составляют числа так, что каждая цифра входит в состав ровно одного числа. Может ли сумма получившихся чисел быть
- 999;
 - 1000?
4. Фирма получила в своё пользование большое помещение, у которого прямоугольный пол площадью 160 м^2 . Одной прямой перегородкой отделили от помещения кабинет с квадратным полом. Второй прямой перегородкой, перпендикулярной первой, отделили от оставшейся части прямоугольник с отношением длин сторон $2 : 1$, причём меньшая сторона упирается в кабинет. Третьей перегородкой разделили этот прямоугольник на две приёмные комнаты с квадратным полом. Чему равен периметр ковра, полностью покрывающего пол кабинета, если он на 8 м больше периметра ковра, полностью покрывающего пол приёмной комнаты? (Толщину перегородок принять равной нулю.)
5. На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC берут точки D и E так, что $|AB| = |BE|$ и $|AC| = |CD|$. Найти величину угла DAE .
6. Дано клетчатое поле размерами $n \times n$. В каждую клетку записывают одно целое число так, что сумма чисел в каждом блоке 2×2 и в каждом блоке 3×3 является чётным числом. Может ли сумма всех чисел клетчатого поля быть нечётным числом, если
- $n = 2005$;
 - $n = 2006$?

ЛIII Олимпиада по математике учащихся Эстонии

28 января 2006 г.

Региональный тур

11 класс

Время, отводимое для решения: 5 часов.

Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.

Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{y}{x} \\ x^2 y = y^2 x + 2. \end{cases}$$

2. В командной игре на местности команде надо со старта прежде всего передвинуться на 100 метров на север, затем повернуть на 60 градусов от прежнего направления направо и продвинуться прямо на 200 метров, после этого повернуть ещё на 60 градусов направо и продвинуться прямо на 400 метров. В конце команде надо повернуть направо ровно на столько, чтобы быть лицом в направлении старта, и двигаться прямо обратно к старту. На какой угол команда должна повернуть последний раз, и какое расстояние ей придётся после этого преодолеть, чтобы вернуться назад к старту?
3. Сколькими разными способами можно на клетчатом поле размерами 10×10 закрасить одновременно чёрными два единичных квадрата, у которых по крайней мере одна общая вершина?
4. Торговые боксы на рынке расположены прямоугольником в виде таблицы, причём количество боксов вдоль одной стороны и количество боксов вдоль перпендикулярной стороны различаются больше, чем на 100. Первый полицейский патруль проверил все боксы в одном ряду, расположенном вдоль длинной стороны прямоугольника, а второй патруль проверил все боксы в семи рядах, параллельных короткой стороне. При подведении итогов выяснилось, что второй патруль проверил больше боксов, чем первый. Найти наименьшее возможное количество торговых боксов на рынке.
5. Длинные диагонали выпуклого шестиугольника пересекаются в одной точке и делят шестиугольник на шесть треугольников, пять из которых имеют равную площадь S . Доказать, что площадь шестого треугольника также равна S .
6. Пусть $s(x)$ для каждого неотрицательного целого числа x обозначает сумму цифр числа x , а $k(x)$ — произведение цифр числа x . Пусть

$$a = 888888887777777766666655555444455556666677777788888888.$$

- а) Найдётся ли число n , для которого $s(n) = k(n) = s(a)$?
- б) Найдётся ли число n , для которого $s(n) = k(n) = k(a)$?

ЛIII Олимпиада по математике учащихся Эстонии

28 января 2006 г.

Региональный тур

12 класс

Время, отводимое для решения: 5 часов.

Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.

Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. В Стране Чудес в начале года на работу принимаются новые госслужащие. Поступающему на работу предлагают выбрать между двумя различными схемами зарплаты. Зарплата, выплачиваемая в первый месяц, составляет в обоих вариантах 1000 денаров. Согласно первой схеме, каждый следующий месяц зарплата будет увеличиваться на 100 денаров, согласно же второй схеме, на протяжении года зарплата постоянна, но каждый следующий год она удваивается по сравнению с предыдущим. Сколько полных лет надо проработать служащему, чтобы он согласно второй схеме заработал в сумме больше денег, чем согласно первой?
2. Величины всех углов треугольника удовлетворяют уравнению

$$4 \cos^2 2x = 1.$$

Найти все возможности, какими могут быть три угла треугольника.

3. Вова посчитал на калькуляторе значение выражения $5 \log 2 + 7 \log 3 - \log 7$. Из-за ограниченной точности калькулятора он получил ответ 4. Этот результат больше или меньше реального значения? (Логарифмы берутся по основанию 10).
4. На доске по одному записывают 2006 чисел согласно следующему правилу. Первое число 1, вторым числом выбирают произвольное целое число, а для нахождения каждого последующего числа складывают утроенное последнее записанное на доске число и удвоенное предпоследнее.
 - а) Доказать, что среди полученных 2006 чисел не может быть более 1003 чисел, делящихся на три.
 - б) Привести пример выбранного вторым числа, при котором среди 2006 чисел ровно 1003 делятся на 3.
5. На основании BC равнобедренного треугольника ABC берут точки E и F , причём E находится к вершине B ближе, чем F . На боковых сторонах треугольника AB и AC берут соответственно точки D и G так, что $|BD| = |CE|$ и $|CG| = |BF|$. Пусть O — точка пересечения прямых EG и FD . Найти величину угла DOG , если $\angle BAC = 70^\circ$.
6. Некоторые клетки клетчатого поля размерами $n \times n$ закрасили в синий цвет. Известно, что количество закрасенных клеток в каждой строке различно, а также и в каждом столбце различно. Найти все возможности, чему может равняться общее количество закрасенных клеток.