

Eesti koolinoorte LIII matemaatikaolümpiaad

28. jaanuar 2006

Piirkonnavor

10. klass

Lahendamisaega on 5 tundi.

Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.

Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Leia võrrandi

$$\frac{1 - (x^2 + 3x + 1)^2}{1 - (x + 2)^2} = 0$$

kõik reaalarvulised lahendid.

2. Imedemaal on praegu tulumaksumäär 10% ja tulumaksuvaba miinimum 1000 denaari (see tähendab, tulumaksu suurus on 10% kuusissetuleku sellest osast, mis ületab 1000 denaari). Helge Tuleviku Partei lubab kehtestada tulumaksumääraks 20% ja tulumaksuvabaks miinimumiks 2000 denaari. Millise kuusissetuleku puhul tuleks uue korra järgi maksta tulumaksu täpselt sama palju kui praegu?
3. Numbritest 1, 2, ..., 9 moodustatakse arvud nii, et iga number kuulub täpselt ühe arvu koosseisu. Kas saadud arvude summa võib olla
- 999;
 - 1000?
4. Firma sai oma käsutusse suure ruumi, millel on ristkülikukujuline põrand pindalaga 160 m². Ühe sirge vaheseinaga eraldati ruumist kõigepealt ruudukujulise põrandaga kabinet. Teise, eelmisega ristuva sirge vaheseinaga eraldati ülejäänud osast ristkülik külgede suhtega 2 : 1, mille lühem külg jäi vastu kabinetti. Kolmanda vaheseinaga jaotati see ristkülik kaheks ruudukujulise põrandaga vastuvõturuumiks. Kui suur on kabineti põrandat täielikult katva vaiba ümbermõõt, kui see on 8 m võrra suurem vastuvõturuumi põrandat täielikult katva vaiba ümbermõõdust? (Vaheseinte paksus lugeda nulliks.)
5. Täisnurkse kolmnurga ABC hüpotenuusil BC võetakse punktid D ja E nii, et $|AB| = |BE|$ ja $|AC| = |CD|$. Leia nurga DAE suurus.
6. Antud on ruudustik mõõtmetega $n \times n$. Ruudustiku igasse ruutu kirjutatakse üks täisarv nii, et igas 2×2 plokis ja igas 3×3 plokis asuvate arvude summa on paarisarv. Kas kõigi ruudustikku kirjutatud arvude summa saab olla paaritu arv, kui
- $n = 2005$;
 - $n = 2006$?

Eesti koolinoorte LIII matemaatikaolümpiaad

28. jaanuar 2006

Piirkonnavoore

11. klass

Lahendamisaega on 5 tundi.

Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.

Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Lahenda võrrandisüsteem

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{y}{x} \\ x^2 y = y^2 x + 2. \end{cases}$$

- Maastikumängus tuleb võistkonnal liikuda startist kõigepealt 100 meetrit põhja poole, siis pöörata senisest suunast 60 kraadi paremale ja liikuda edasi 200 meetrit, seejärel pöörata veelkord 60 kraadi paremale ja liikuda edasi 400 meetrit. Lõpuks tuleb võistkonnal pöörata paremale nii palju, et ollakse näoga starti suunas, ning liikuda otse starti tagasi. Millise nurga võrra peab võistkond viimasel korral pöörama ja milline vahemaa tuleb tal seejärel starti tagasi jõudmiseks läbida?
- Mitmel erineval viisil saab ruudustikus mõõtmetega 10×10 värvida korraga mustaks kaks ühikruutu, millel on vähemalt üks ühine tipp?
- Turuplatsil on ühesugused müügiboksid paigutatud tabelikujuliselt riskülikuna, kusjuures bokside arv ühe külje sihis ja bokside arv ristuva külje sihis erinevad rohkem kui 100 võrra. Esimene politsei patrull kontrollis läbi kõik boksid ühes risküliku pikema küljega paralleelses reas, teine politsei patrull aga kõik boksid seitsmes lühema küljega paralleelses reas. Kokkuvõtete tegemisel selgus, et teine patrull kontrollis rohkem bokse kui esimene. Leia vähim võimalik müügibokside arv turuplatsil.
- Kumera kuusnurga pikad diagonaalid lõikuvad ühes punktis ning jaotavad kuusnurga kuueks kolmnurgaks, millest viis on võrdse pindalaga S . Tõesta, et ka kuuenda kolmnurga pindala on S .
- Iga mittenegatiivse täisarvu x korral tähistagu $s(x)$ arvu x numbrite summat ja $k(x)$ arvu x numbrite korrutist. Olgu

$$a = 8888888877777776666665555444455556666677777788888888.$$

- Kas leidub arv n , mille korral $s(n) = k(n) = s(a)$?
- Kas leidub arv n , mille korral $s(n) = k(n) = k(a)$?

Eesti koolinoorte LIII matemaatikaolümpiaad

28. jaanuar 2006

Piirkonnavor

12. klass

Lahendamisaega on 5 tundi.

Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.

Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Imedemaal võetakse aasta alguses tööle uusi riigiametnikke. Tööleasujal lubatakse valida kahe võimaliku palgaskeemi vahel. Esimesel kuul maks-tav palk on mõlemal juhul 1000 denaari. Esimese skeemi kohaselt kasvab palk igal järgmisel kuul 100 denaari võrra, teise skeemi järgi aga on palk aasta piires püsiv, kuid igal järgmisel aastal kahekordistub võrreldes eel-mise aastaga. Mitu täisaastat tuleb ametnikul vähemalt töötada, et ta saaks teise skeemi järgi kokku rohkem palka kui esimese skeemi järgi?
2. Kolmnurga kõigi nurkade suurused rahuldavad võrrandit

$$4 \cos^2 2x = 1.$$

Leia kõik võimalused, millised saavad olla selle kolmnurga kolm nurka.

3. Juku arvutas taskuarvutiga avaldise $5 \log 2 + 7 \log 3 - \log 7$ väärtuse. Tasku-arvuti piiratud täpsuse tõttu sai ta vastuseks 4. Kas see tulemus on aval-dise tegelikust väärtusest suurem või väiksem? (Logaritmid on võetud alu-sel 10.)
4. Tahvlile kirjutatakse ükshaaval 2006 arvu järgmise eeskirja kohaselt. Esime-ne arv on 1, teiseks arvuks valitakse suvaline täisarv ning iga järgneva arvu leidmiseks liidetakse viimase tahvlil oleva arvu kolmekordne ja eelviimase arvu kahekordne.
 - a) Tõesta, et saadud 2006 arvu hulgas ei saa olla rohkem kui 1003 kol-mega jaguvat arvu.
 - b) Too näide teisena valitud arvust, mille korral saadud 2006 arvu hul-gas leidub täpselt 1003 kolmega jaguvat arvu.
5. Võrdhaarse kolmnurga ABC alusel BC võetakse punktid E ja F , kusjuures E asub tipule B lähemal kui F . Kolmnurga haaradel AB ja AC võetakse vastavalt punktid D ja G nii, et $|BD| = |CE|$ ja $|CG| = |BF|$. Olgu O sirgete EG ja FD lõikepunkt. Leia nurga DOG suurus, kui $\angle BAC = 70^\circ$.
6. Ruudustikus mõõtmetega $n \times n$ värviti mõned ruudud siniseks. On teada, et värvitud ruutude arv on igas reas erinev ja samuti igas veerus erinev. Leia kõik võimalused, milline saab olla värvitud ruutude koguarv.