Eesti koolinoorte LIII matemaatikaolümpiaad

28. jaanuar 2006 Piirkonnavoor **Lahendused ja vastused**

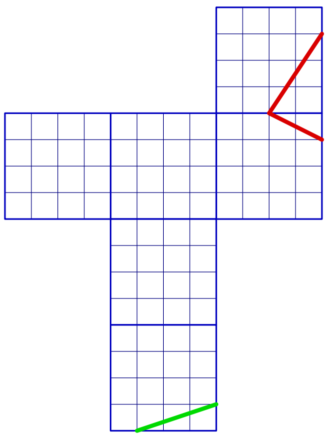
7. klass, I osa

1. 4
2. $0{,}02 > -0{,}2 > -\frac{1}{4}$
3. 819
4. $\frac{3}{5}$
5. 86
6. 7
7. 4 cm
8. 21°
9. $2{,}4\pi$ cm
10. Vt joonist 1.

Lahendused

1. $\frac{2006 \cdot 2007 - 2005 \cdot 2006}{1003} = \frac{2006 \cdot (2007 - 2005)}{1003} = 2 \cdot 2 = 4.$

2. Nende arvude vastandarvud on $-0{,}2$; $0{,}02$ ja $-\frac{1}{4} = -0{,}25$ ehk kahanevas järjekorras $0{,}02$; $-0{,}2$; $-0{,}25$.



Joonis 1

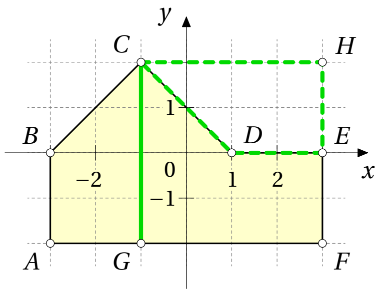
3. Kui sajaliste number on 9, siis on üheliste number samuti 9, sest ta ei saa olla 9-st suurem. Sel juhul sisaldaks arv võrdseid numbreid. Kui sajaliste number on 8, siis saab kümneliste number olla maksimaalselt 1. Üheliste number on sel juhul 9, see ei ühti eelnevate numbritega. Arv on 819.
4. Algarvud esimese kümne positiivse arvu seas on 2, 3, 5 ja 7. Arve, mis pole algarvud, on seega $10-4=6$, nende osakaal on $\frac{6}{10}$ ehk $\frac{3}{5}$.
5. 7 kolmekordset külastajat annavad kokku $7\cdot 3=21$ vaatamist ning 10 kahekordset külastajat $10\cdot 2=20$ vaatamist. Järele jääb $110-21-20=69$ ühekordset külastajat. Erinevate külastajate koguarv on $7+10+69=86$.
6. Lõikude pikkused on täisarvud, vähim on 1 (lõik $[5;6]$), suurim 8 (lõik $[-2;6]$). Esindatud on kõik pikkused, välja arvatud 4. Joonisel leidub järelikult 7 erineva pikkusega lõike.
7. Külgpindala võrdub põhja ümbermõõdu ja kõrguse korrutisega. Järelikult põhja ümbermõõt on $72:6=12$ cm. Kolmanda põhiserva pikkuseks saame $12-3-5=4$ cm.
8. Kolmnurk ADB on täisnurkne ja võrdhaarne, seetõttu $\angle ABC=45^\circ$. Seega $\angle ACB=180^\circ-114^\circ-45^\circ=21^\circ$.
9. Ruudu küljepikkus on 1 cm ning ringi raadius 1,2 cm. Ringi ümbermõõt on $2\pi\cdot 1{,}2=2{,}4\pi$ cm.
10. Leida tuleb tahk, mis pärast kuubi kokkuvoltimist satub kahe parempoolse tahu naabriks. Nende kolme tahu ühine tipp on parajasti alumise ruudu alumine parempoolne tipp. Lõikejoone üks otspunkt asub sellest ühe ja teine otspunkt kolme ühiku kaugusel (vastavalt üleval ja vasakul).

7. klass, II osa

1. *Vastus:* 5.

   Ahvenaid oli kalade seas $20\cdot 0{,}7=14$ ja hauge $20-14=6$. Viimastest pooled ehk 3 vastasid normidele, ülejäänud 3 haugi olid seega alamõõdulised. Alamõõdulisi kalu oli üldse $20\cdot 0{,}4=8$. Järelikult alamõõdulisi ahvenaid oli $8-3=5$.
2. a) Krundi plaan on kujutatud joonisel 2. Pindala saame leida kolmnurga BCD pindala ja ristküliku $ABEF$ pindala summana. Kolmnurga BCD pindala on $\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 2=4$, ristküliku $ABEF$ pindala aga $2\cdot 6=12$. Krundi pindala on seega $4+12=16$.

   b) Nõutav lõige on punkti C läbiv y-teljega paralleelne sirge. Uue krundi tipud on C, $G(-1;-2)$, F ja $H(3;2)$. Uus krunt on ruudukujuline, sest tema vastasküljed on paralleelsed, kõik küljed on ühepikkused ja diagonaalid samuti ühepikkused.



Joonis 2

3. *Vastus:* 3. aprill 1992, 1. juuni 1992 või 8. august 1992.
Olgu x Keiti sünnikuupäeva päeva number ja y tema sünnikuu number. Vaadeldav neljakohaline arv on siis $x92y$. See arv peab jaguma 2-ga, järelikult peab y olema kas 0, 2, 4, 6 või 8. Et y tähistab kuu numbrit, siis y-i väärtuseks ei saa olla 0. Edasi, arv jagub 9-ga parajasti siis, kui tema ristsumma jagub 9-ga.
   - Kui $y = 2$, siis peab arv $x922$ jaguma 9-ga, siit $x = 5$.
   - Kui $y = 4$, siis peab arv $x924$ jaguma 9-ga, siit $x = 3$.
   - Kui $y = 6$, siis peab arv $x926$ jaguma 9-ga, siit $x = 1$.
   - Kui $y = 8$, siis peab arv $x928$ jaguma 9-ga, siit $x = 8$.

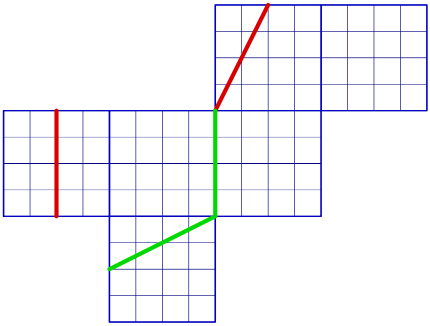
   Saadud arvudest 5922, 3924, 1926 ja 8928 jagub esimene arv 7-ga; ülejäänud kolm ei jagu 7-ga ja vastavad seega ülesande tingimustele. Otsitavaks sünnikuupäevaks võib olla 3. aprill 1992, 1. juuni 1992 või 8. august 1992.

8. klass, I osa

1. 26
2. $\dfrac{3}{5}$
3. 3
4. 116
5. 15%
6. 5
7. 0,36π
8. L
9. 16 cm^2
10. Vt joonist 3.

Lahendused

1. Antud avaldise väärtus on $(2-4)+(6-8)+\ldots+(46-48)+50 = (-2)\cdot 12+50 =$ $= 50 - 24 = 26$.



Joonis 3

2. Algarvud esimese kahekümne positiivse arvu seas on 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 ja 19. Arve, mis pole algarvud, on seega $20 - 8 = 12$, nende osakaal on $\frac{12}{20}$ ehk $\frac{3}{5}$.

3. Et arv on nagunii paarisarv, siis on ainuke tingimus, et ta jaguks 3-ga. Arvu ristsumma on $13 + x$, see jagub 3-ga, kui $x = 2, 5, 8$. See tähendab, võimalikke numbreid on 3.

4. 3 neljakordset külastajat annavad kokku $3 \cdot 4 = 12$ vaatamist, 7 kolmekordset külastajat $7 \cdot 3 = 21$ vaatamist ning 10 kahekordset külastajat $10 \cdot 2 = 20$ vaatamist. Järele jääb $149 - 12 - 21 - 20 = 96$ ühekordset külastajat. Erinevate külastajate koguarv on $3 + 7 + 10 + 96 = 116$.

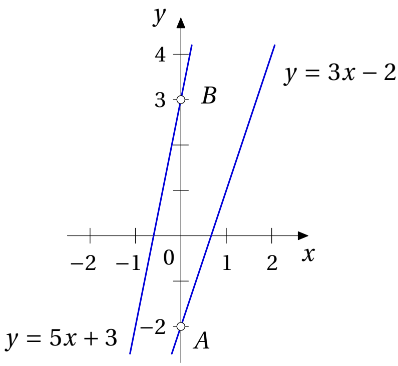
5. Hinna langus esialgsega võrreldes on $\frac{3}{20}$ ehk 15%.

6. Võttes võrrandites $x = 0$, saame punkti A jaoks $y = -2$, punkti B jaoks aga $y = 3$ (joonis 4). Lõigu AB pikkus on $2 + 3 = 5$.

7. Kui ruudu küljepikkus on 1, siis tema pindala on samuti 1, ringi diameeter on 1,2 ning ringi pindala on $\pi \cdot \frac{1{,}2^2}{4} = \frac{1{,}44}{4}\pi = 0{,}36\pi$. Ringi ja ruudu pindalate suhe on $0{,}36\pi : 1 = 0{,}36\pi$.

8. Liites võrdused kokku, saame $2|KL| + 2|LM| + 2|MK| = 40$ cm. Siit leiame $|KL| + |LM| + |MK| = 20$ cm. Lahutades viimasest võrdusest järgemööda ülesande võrdusi, saame $|MK| = 8$ cm, $|KL| = 5$ cm ja $|LM| = 7$ cm. Suurim nurk asub pikima külje MK vastas, seega tipu L juures.

9. Kolmnurgal ADC on kolmnurgaga ADE ühine tipust D tõmmatud kõrgus, aga alus on 4 korda pikem. Järelikult on kolmnurga ADC pindala kolmnurga ADE pindalast 4 korda suurem ehk 12 cm^2. Kolmnurgal ABC on kolmnurgaga ADC ühine tipust C tõmmatud kõrgus, aga alus on $\frac{4}{3}$ korda pikem, järelikult on kolmnurga ABC pindala $12 \cdot \frac{4}{3} = 16$ cm^2.



Joonis 4

10. Pinnalaotuse vasakpoolne tahk on kuubi esitahk. Seal olevat joont paralleelselt paremale nihutades märgime selle lõikejoone, mis asub kuubi serval. Sellega on paigas ka alumise tahu joone üks otspunkt, teine otspunkt asub tahu serva keskpunktis.

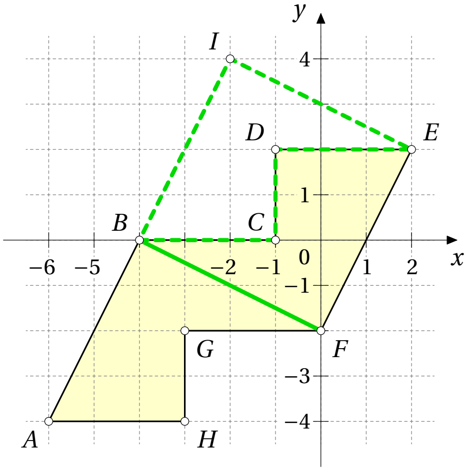
8. klass, II osa

1. *Vastus:* 40%.

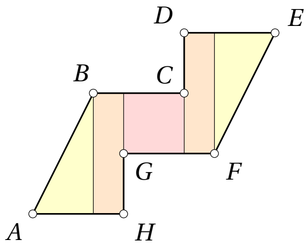
Lahendus 1. Olgu ühes kilos segus x kilo mandleid, kreeka pähkleid on siis $1-x$ kilo. Segus olevad mandlid maksavad $25x$ krooni ning kreeka pähklid $80(1-x)$ krooni. Seega kehtib võrdus $25x+80(1-x)=58$, millest $55x=22$ ja $x=\frac{2}{5}$. Mandleid on segus järelikult 40%.

Lahendus 2. Kui segus oleks mandleid ja kreeka pähkleid võrdses kaalus, siis oleks segu hind $0{,}5\cdot 80+0{,}5\cdot 25=52{,}5$ krooni, mis on 5,5 krooni odavam segu tegelikust hinnast. Üks kilo pähkleid maksab $80-25=55$ krooni rohkem kui üks kilo mandleid. Selleks, et kompenseerida hinnaerinevust 5,5 krooni, tuleks segus, kus on kumbagi komponenti võrdselt, asendada 0,1 kilo mandleid kreeka pähklitega. Seega tegelikult sisaldab segu 0,4 kilo mandleid ja 0,6 kilo kreeka pähkleid, st mandlite osakaal on 40%.

2. a) Krundi plaan on kujutatud joonisel 5. Pindala arvutamiseks jaotame krundi joonisel 6 näidatud viisil nelja vertikaalse sirgega osadeks, sirged läbivad punkte B, G, C ja F. Vasakpoolse kolmnurkse osa ja parempoolse kolmnurkse osa pindala on kummalgi $\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 4=4$, nendega külgnevate ristkülikute pindalad kummalgi $1\cdot 4=4$ ning keskmise ruudu pindala $2\cdot 2=4$. Kujundi pindala on seega $5\cdot 4=20$.



Joonis 5



Joonis 6

b) Nõutav lõige on sirge BF. Uue krundi tipud on B, F, E ja $I(-2;4)$. Ruudu saamiseks tuleb kujundit $ABFGHA$ nihutada paralleellükkega nii, et punkt A teiseneb punktiks B. Uus krunt on tõepoolest ruudukujuline, sest tema vastasküljed on paralleelsed, kõik küljed on ühepikkused ja diagonaalid samuti ühepikkused.

3. *Vastus:* 1, 3, 7 ja 9.

Et kolme erineva numbri summa on vähemalt 3, siis on kõik kolme numbri summadena saadud algarvud paaritud arvud. Näitame, et nelja numbri seas ei saa olla ühtegi paarisarvu. Kui numbrite hulgas oleks paarisarve üks või kaks, siis oleksid vähemalt kaks numbrit paaritud. Liites kahele paaritule numbrile juurde ühe paarisnumbri, saame summaks paarisarvu. Kui numbrite hulgas oleks paarisarve kolm või neli, siis liites kolm paarisnumbrit, saame jälle summaks paarisarvu. Seega tuleb neli numbrit valida paaritute numbrite 1, 3, 5, 7 ja 9 seast.

Valikusse ei saa korraga kuuluda 1, 3 ja 5, sest nende summa 9 ei ole algarv. Samuti ei saa valikusse korraga kuuluda 5, 7 ja 9, sest nende summa 21 ei ole algarv. Järelikult ei tohi valik üldse sisaldada numbrit 5, st sinna kuuluvad 1, 3, 7 ja 9. Need neli numbrit rahuldavad ülesande tingimusi, sest kõigi kolmikute summad $1+3+7=11$, $1+3+9=13$, $1+7+9=17$ ja $3+7+9=19$ on algarvud.

9. klass, I osa

1. 2
2. $\dfrac{1}{2}$
3. $\dfrac{5}{16}$
4. $\dfrac{49}{50}$
5. 5,5
6. 35°
7. 45°
8. $6\ \text{cm}^2$
9. $\dfrac{\pi}{6}\ \text{cm}^2$
10. Vt joonist 7.

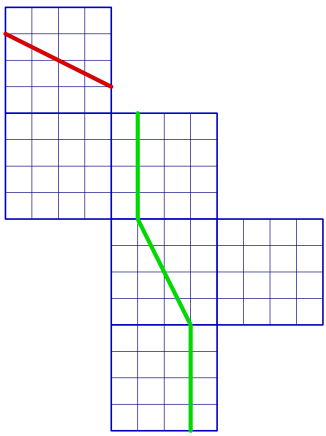
Lahendused

1. Antud võrratus on samaväärne võrratusega $(a-2)^2 < 1$ ehk $|a-2| < 1$. Et tegemist on täisarvudega, siis ainukese võimalusena $|a-2| = 0$ ehk $a = 2$.

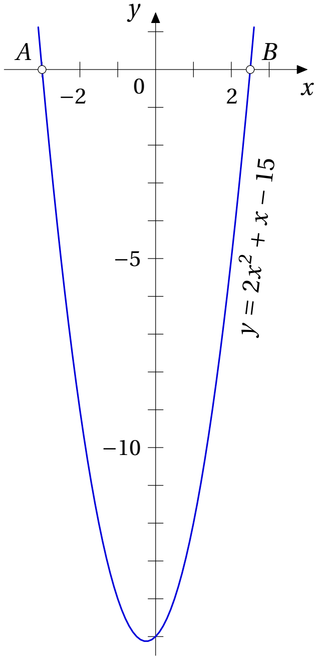
2. Avaldise väärtus on

$$1 + \left(\frac{100}{2006} - \frac{101}{2006}\right) + \left(\frac{102}{2006} - \frac{103}{2006}\right) + \ldots = 1 + \left(-\frac{1}{2006}\right) \cdot 1003 = \frac{1}{2}.$$

3. Et $1\frac{1}{4} - 1\frac{1}{8} = \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$, siis otsitav arv on $\frac{7}{16} - \frac{1}{8} = \frac{7-2}{16} = \frac{5}{16}$.



Joonis 7



Joonis 8

4. Murd $\frac{49}{50}$ rahuldab ülesande tingimusi; kõigil teistel arvust 1 väiksematel murdudel, mille lugeja ja nimetaja summa on 99, on lugeja väiksem ja nimetaja suurem, st kõik need murrud on sellest murrust väiksemad.

5. *Lahendus 1.* Võrrandi $2x^2 + x - 15 = 0$ lahendid on

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-15)}}{2 \cdot 2} = \frac{-1 \pm \sqrt{121}}{4} = \frac{-1 \pm 11}{4}$$

ehk $x_1 = -\frac{12}{4} = -3$ ja $x_2 = \frac{10}{4} = 2{,}5$. Lõigu AB pikkus on $3 + 2{,}5 = 5{,}5$ (joonis 8).

Lahendus 2. Ruutparabooli $y = ax^2 + bx + c$ nullkohtade vahelise kauguse l saab arvutada valemist $l = |x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{|a|}$. Seega antud juhul

$$l = \frac{\sqrt{1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-15)}}{2} = \frac{\sqrt{121}}{2} = \frac{11}{2}.$$

6. Sirge OC on nurga AOB poolitaja. Nurga AOC suurus on järelikult 70°. Sirge OD on nurga AOC poolitaja. Nurga COD suurus on 35°.

7. Võrdhaarsete kolmnurkade BAK ja CAL alusnurgad on omavahel võrdsed, sest kolmnurk LAK on samuti võrdhaarne. Seega on ka kolmnurkade BAK ja CAL tipunurgad võrdsed. Järelikult on kolmnurk BAC võrdhaarne täisnurkne kolmnurk ja $\angle CBA = \angle BCA = 45°$.

8. *Lahendus 1.* Kolmnurga ABM alus ja kõrgus on mõlemad 4 cm, seega selle kolmnurga pindala on $\frac{1}{2} \cdot 4^2 = 8\ \mathrm{cm}^2$. Olgu X lõikude AL ja BK lõikepunkt. Kolmnurga ABX alus on 4 cm ja kõrgus pool lõigu AK pikkusest ehk 1 cm, järelikult selle kolmnurga pindala on $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1 = 2\ \mathrm{cm}^2$. Värvitud kujundi pindala on $8 - 2 = 6\ \mathrm{cm}^2$.

   Lahendus 2. Olgu X lõikude AL ja BK lõikepunkt ning Y tipust M küljele AB tõmmatud kõrgus. Kolmnurga AYM pindala on pool ristküliku $AYMD$ pindalast, mis omakorda on pool ruudu $ABCD$ pindalast. Kolmnurga BYM pindala on niisama suur. Seega kolmnurga AMB pindalaks saame $2 \cdot \frac{1}{4} \cdot 16 = 8\ \mathrm{cm}^2$. Edasi, nelinurk $KLBA$ on ristkülik. Seega kolmnurga ABX pindala on pool kolmnurga ABL pindalast, mis aga moodustab poole ristküliku $KLBA$ pindalast, mis omakorda on pool ruudu $ABCD$ pindalast. Kolmnurga ABX pindala on $\frac{1}{8} \cdot 16 = 2\ \mathrm{cm}^2$. värvitud kujundi pindala on $8 - 2 = 6\ \mathrm{cm}^2$.

9. Nurk ACB on täisnurk, nurga BAC suurus on $\frac{1}{3} \cdot 90° = 30°$ ja samale kaarele toetuva kesknurga BOC suurus $60°$. Et leitud kesknurk on $\frac{1}{6}$ täispöördest, siis on ringi vastava osa pindala samuti $\frac{1}{6}$ kogu ringi pindalast ehk $\frac{1}{6} \cdot \pi \cdot 1^2 = \frac{\pi}{6}\ \mathrm{cm}^2$.

10. Üldisust kitsendamata võime lugeda, et pinnalaotusel märgitud joonega tahk on kuubi ülemine tahk. Järgmine vertikaalne joonelõik asub keskmise veeru ülemisel tahul. Keskmise veeru keskmisel tahul joon jätkub ja lõpeb ühe ühiku kaugusel kuubi tipust. Pinnalaotusel esialgselt märgitud joone teine ots jätkub pinnalaotuse alumisel tahul, seal asuv joonelõik on paralleelne tahu servaga.

9. klass, II osa

1. *Vastus:* $\frac{24}{19}$.

   Lahendus 1. Olgu a kaupade koguhind, jäätise hind on siis 4% sellest ehk $0{,}04a$ ning ülejäänud kaupade hind $0{,}96a$. Kui jäätis oleks olnud x korda kallim, siis oleks jäätise hind olnud $0{,}04ax$ ja kaupade koguhind

$0{,}04ax + 0{,}96a$. Et jäätise hind moodustaks kaupade koguhinnast 5%, peab kehtima võrdus

$$\frac{0{,}04ax}{0{,}04ax + 0{,}96a} = 0{,}05$$

ehk

$$\frac{4x}{4x + 96} = 0{,}05.$$

Siit saame $4x = 0{,}05 \cdot 4x + 0{,}05 \cdot 96$ ehk $3{,}8x = 4{,}8$, millest $x = \frac{4{,}8}{3{,}8} = \frac{24}{19}$.

Lahendus 2. Olgu a kaupade koguhind, sellest moodustab jäätis $0{,}04a$ ja ülejäänud kaubad $0{,}96a$. Selleks, et ülejäänud kaupade hind moodustaks $0{,}95$ kaupade koguhinnast, peab koguhind olema $\frac{0{,}96a}{0{,}95}$. Kaupade koguhind peab kasvama $\frac{0{,}96a}{0{,}95} - a = \frac{1}{95} \cdot a$ võrra. Jäätise uus hind on seega $0{,}04a + \frac{1}{95} \cdot a$, mis on senisest hinnast suurem

$$\frac{0{,}04a + \frac{1}{95} \cdot a}{0{,}04a} = \frac{0{,}04 \cdot 95 + 1}{0{,}04 \cdot 95} = \frac{4{,}8}{3{,}8} = \frac{24}{19}$$

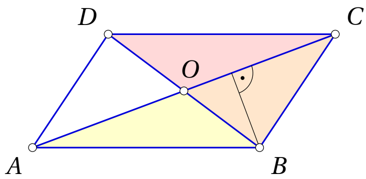
korda.

2. *Vastus:* ainuke selline arv on 111.

Olgu $\overline{ab1}$ nõutavate omadustega arv. Et arv on paaritu, siis ta saab jaguda vaid paaritute arvudega, st a ja b ei saa olla paarisarvud. Samuti ei jagu vaadeldav arv 5-ga, seega ei saa a ega b olla 5. Järelikult võivad arvu numbritena kõne alla tulla ainult 1, 3, 7 ja 9.

- Kui $a = b = 1$, siis saame arvu 111, mis rahuldab tingimusi.
- Kui mõni numbritest on 3, siis selleks, et arvu ristsumma $a + b + 1$ jaguks 3-ga, peab teine puuduv number olema 2, 5 või 8. Nendest aga ükski ei sobi.
- Kui mõni numbritest on 9, siis selleks, et arvu ristsumma $a + b + 1$ jaguks 9-ga, peab teine puuduv number olema 8, mis on samuti võimatu.
- Jääb vaadelda juhte, kus arv sisaldab ainult numbreid 1 ja 7. Et ükski arvudest 171, 711, 771 ei jagu 7-ga, siis rohkem sobivaid variante ei ole.

Märkus. Numbrite 3 ja 9 vaatlemise saab ka kokku võtta. Kui mõni numbritest jagub 3-ga, siis selleks, et arv jaguks selle numbriga, peab arv jaguma 3-ga, st tema ristsumma peab jaguma 3-ga. Selleks peab teine puuduv olema 2, 5 või 8, millest ükski ei sobi.



Joonis 9

3. *Lahendus 1.* Olgu $ABCD$ vaadeldav nelinurk ning O tema diagonaalide lõikepunkt (joonis 9). Eeldame, et kolmnurkadel AOB, BOC ja COD on võrdne pindala S. Kolmnurkade AOB ja BOC tipust B tõmmatud kõrgus on ühine, järelikult selleks, et neil kolmnurkadel oleks sama pindala, peavad nende alused AO ja CO olema võrdse pikkusega. Ülejäänud kahel kolmnurgal COD ja DOA on samuti ühine kõrgus, millele vastavad võrdse pikkusega alused CO ja AO. Järelikult on nende kolmnurkade pindalad võrdsed ehk kolmnurga DOA pindala võrdub kolmnurga COD pindalaga S.

Lahendus 2. Selleks, et kolmnurkadel AOB ja BOC oleks võrdne pindala, peab olema $|AO| = |CO|$. Seega punkt O poolitab diagonaali AC. Analoogiliselt saame kolmnurkade BOC ja COD abil, et punkt O poolitab diagonaali BD. Nelinurk $ABCD$ on niisiis rööpkülik, seetõttu on kolmnurk DOA kongruentne kolmnurgaga BOC ning tema pindala on samuti S.

4. *Vastus:* a) jah; b) ei.

Lahendus 1. a) Kui neli elanikku, kellest kolm on tõerääkijad ja üks valetaja, jaotada kaheks paariks, siis kahe tõerääkija paaris väidavad mõlemad, et kaaslane on tõerääkija, seevastu tõerääkija ja valetaja paaris väidavad mõlemad, et kaaslane on valetaja. Kumbagi liiki vastuseid on seega võrdne arv 2. Kõik 2004 elanikku võivad moodustada 501 sellist neljaliikmelist rühma.

b) Oletame, et 2006 elanikku andsid kumbagi liiki vastuseid võrdselt. Kahe tõerääkija paaris väidavad mõlemad, et kaaslane räägib tõtt. Kahe valetaja paaris väidavad samuti mõlemad, et kaaslane räägib tõtt. Tõerääkija ja valetaja paaris väidavad mõlemad, et kaaslane valetab. Seega annavad paari liikmed alati sama vastuse. Seega nii väiteid „kaaslane räägib tõtt“ kui ka väiteid „kaaslane valetab“ on paarisarv. Ent 2006 elaniku puhul peaks mõlemat liiki väiteid olema 1003, vastuolu.

Lahendus 2. a) Kui 2004 inimest moodustaksid 501 paari, kus kumbki paariline väidab, et kaaslane räägib tõtt, ja 501 paari, kus kumbki paariline väidab, et kaaslane valetab, siis oleks ülesande tingimus täidetud. Mõlemad olukorrad on tõepoolest saavutatavad: esimene siis, kui kõikides paarides on mõlemad liikmed tõerääkijad, teine siis, kui kõikides paarides on üks liige tõerääkija ja teine valetaja.

b) Uurime, kas on võimalik olukord, et paari liikmed annavad erineva vastuse. Kui see, kes väidab, et kaaslane räägib tõtt, on ise tõerääkija, siis peab tõele vastama teise liikme väide, et esimene on valetaja, vastuolu. Kui see, kes väidab, et kaaslane räägib tõtt, on ise valetaja, siis peab teine liige valetama, öeldes, et esimene on valetaja; järelikult on esimene tõerääkija, vastuolu. Seega pole vaadeldav olukord võimalik, vaid igas paaris antakse alati kaks ühesugust vastust. Et kumbagi liiki väiteid oleks võrdne arv, peab järelikult ka kumbagi liiki paare olema võrdne arv. Kui Imedemaal on 2006 elanikku, siis paare on üldse 1003 ja neid ei saa jaotada kaheks võrdseks osaks.

10. klass

1. *Vastus:* $x = 0$ ja $x = -2$.

   Lahendus 1. Ülesande murd võrdub nulliga parajasti siis, kui lugeja võrdub nulliga ja nimetaja on nullist erinev. Tingimus, et lugeja võrdub nulliga, annab $(x^2+3x+1)^2 = 1$, millest $x^2+3x+1 = 1$ või $x^2+3x+1 = -1$. Viimasest kahest võrrandist esimene on samaväärne ruutvõrrandiga $x^2+3x = 0$, mille lahendid on $x_1 = 0$ ja $x_2 = -3$, teine aga on samaväärne ruutvõrrandiga $x^2+3x+2 = 0$, mille lahendid on $x_3 = -1$ ja $x_4 = -2$. Tingimus, et nimetaja on nullist erinev, välistab lahendid $x_2 = -3$ ja $x_3 = -1$, järele jäävad $x_1 = 0$ ja $x_4 = -2$.

   Lahendus 2. Murru lugejat teisendades saame

   $$1-(x^2+3x+1)^2 = \big(1-(x^2+3x+1)\big)\cdot\big(1+(x^2+3x+1)\big) =$$
   $$= -(x^2+3x)\cdot(x^2+3x+2) = -x(x+3)(x+1)(x+2).$$

   Nimetajat teisendades saame

   $$1-(x+2)^2 = \big(1-(x+2)\big)\cdot\big(1+(x+2)\big) = -(x+1)(x+3).$$

   Et murd on võrdne nulliga parajasti siis, kui lugeja on võrdne nulliga ja nimetaja on nullist erinev, saame $x = 0$ või $x+2 = 0$.

2. *Vastus:* mitte üle 1000 denaari või täpselt 3000 denaari.

   Olgu x imedemaalase kuusissetulek. Kui $x \leqslant 1000$, siis on makstav tulumaks nii praeguse kui ka uue korra järgi 0, st kummalgi juhul sama suur. Kui $1000 < x \leqslant 2000$, siis tuleb praeguse korral järgi tulumaksu maksta, uue korra järgi aga mitte, st makstav tulumaks on erinev. Kui $x > 2000$, siis tuleb senise korra järgi maksta tulumaksu $(x-1000)\cdot\frac{10}{100}$ denaari, uue korra järgi aga $(x-2000)\cdot\frac{20}{100}$ denaari. Seega on meil vaja lahendada võrrand

   $$(x-1000)\cdot\frac{10}{100} = (x-2000)\cdot\frac{20}{100}.$$

Pärast murdude taandamist ning seejärel tulemuses sulgude avamist saame $\frac{1}{10}x - 100 = \frac{1}{5}x - 400$ ehk $\frac{1}{10}x = 300$, kust $x = 3000$.

3. *Vastus:* a) jah; b) ei.

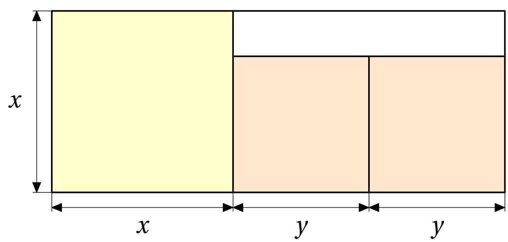
Lahendus 1. a) Kehtib võrdus $123 + 4 + 6 + 857 + 9 = 999$.

b) Oletame, et antud numbritest on moodustatud mingid arvud. Et iga arv annab 3-ga jagades sama jäägi nagu tema ristsumma, siis annab moodustatud arvude summa 3-ga jagades sama jäägi nagu nende arvude ristsummade summa $1 + 2 + \ldots + 9 = 45$ ehk jäägi 0. Järelikult jagub moodustatud arvude summa alati 3-ga ega saa võrduda arvuga 1000, mis 3-ga ei jagu.

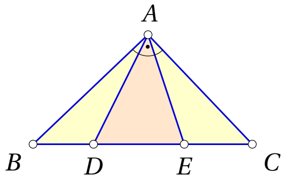
Lahendus 2. b) Oletame, et numbritest $1, 2, \ldots, 9$ on vastavalt ülesande tingimustele koostatud arvud, mille summa on 1000. Need arvud saavad olla ülimalt kolmekohalised; olgu s_1 nende üheliste numbrite summa, s_{10} kümneliste numbrite summa ja s_{100} sajaliste numbrite summa. Siis $s_1 + s_{10} + s_{100} = 1 + 2 + \ldots + 9 = 45$ ning s_1 saab olla ainult kas 10, 20, 30 või 40. Kui $s_1 = 40$, siis s_{10} üheliste number peab olema 6, mis ei ole võimalik $(40 + 6 > 45)$. Kui $s_1 = 30$, siis s_{10} üheliste number peab olema 7, st $s_{10} = 7$, kuid siis peab olema $s_{100} = 9$, mis ei ole võimalik $(30 + 7 + 9 \neq 45)$. Kui $s_1 = 20$, siis s_{10} üheliste number peab olema 8, st $s_{10} = 8$ ja $s_{100} = 9$ või $s_{10} = 18$ ja $s_{100} = 8$. Mõlemal juhul saame jällegi, et $s_1 + s_{10} + s_{100} \neq 45$. Lõpuks, kui $s_1 = 10$, siis s_{10} üheliste number peab olema 9, st $s_{10} = 9$ ja $s_{100} = 9$ või $s_{10} = 19$ ja $s_{100} = 8$ või $s_{10} = 29$ ja $s_{100} = 7$. Ka siin kõigil kolmel juhul $s_1 + s_{10} + s_{100} \neq 45$. Seega ei ole sobivate liidetavate koostamine numbritest $1, 2, \ldots, 9$ võimalik.

4. *Vastus:* 32 m.

Olgu kabineti põranda servapikkus x meetrit ja vastuvõturuumi põranda servapikkus y meetrit (joonis 10). Kogu ruumi põranda servapikkus on ühes suunas x ja teises suunas $x + 2y$ meetrit. Järelikult kehtib seos $x(x + 2y) = 160$. Teiselt poolt teame, et $x - y = 2$. Avaldades siit y ja asendades eelmisse võrrandisse, saame $x(x+2x-4) = 160$ ehk $3x^2-4x-160 = 0$.



Joonis 10



Joonis 11

Selle ruutvõrrandi lahendid on $x_1 = 8$ ja $x_2 = -\dfrac{20}{3}$, millest kõiki ülesande tingimusi rahuldab ainult esimene. Kabineti põrandat katva vaiba ümbermõõt on seega $4 \cdot 8 = 32$ meetrit.

5. *Vastus:* 45°.

Lahendus 1. Kolmnurgad ABE ja ACD on võrdhaarsed, tipunurkadega vastavalt B ja C (joonis 11). Nüüd

$$\begin{aligned}\angle DAE &= \angle BAE + \angle CAD - \angle BAC = \\ &= \frac{180^\circ - \angle ABE}{2} + \frac{180^\circ - \angle ACD}{2} - 90^\circ = \\ &= 90^\circ - \frac{\angle ABE + \angle ACD}{2}.\end{aligned}$$

Et kolmnurk ABC on täisnurkne, siis $\angle ABE + \angle ACD = 90^\circ$, mille tõttu $\angle DAE = 90^\circ - \dfrac{90^\circ}{2} = 45^\circ$.

Lahendus 2. Tähistame $\angle BEA = \angle BAE = \alpha$, $\angle CDA = \angle CAD = \beta$ ning $\angle DAE = \xi$. Kolmnurgast DAE saame

$$180^\circ - \alpha - \beta = \xi,$$

kolmnurga ABC tipu A juurest aga

$$90^\circ - \alpha - \beta = -\xi.$$

Lahutades esimesest seosest teise, saame $90^\circ = 2\xi$, millest $\xi = 45^\circ$.

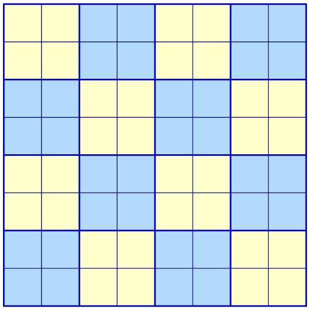
6. *Vastus:* a) jah; b) ei.

a) Täidame ruudustiku 3., 6., …, 2004. rea ruudud arvudega 0 ning ülejäänud ridade ruudud arvudega 1 (joonis 12). Igas 2×2 plokis on siis arvude summa kas 2 või 4, igas 3×3 plokis on arvude summa 6. Tabelis üldse on arvudega 0 täidetud $\dfrac{2004}{3} = 668$ rida, arvudega 1 aga $2005 - 668 = 1337$ rida. Et igas reas asub 2005 arvu, siis on kõigi tabeli arvude summa paaritu.

b) Jaotame ruudustiku 2×2 plokkideks (joonis 13), üldse tekib meil seega 1003×1003 plokki. Et igas 2×2 plokis on arvude summa paarisarv, siis peab ka ruudustiku arvude kogusumma olema kindlasti paarisarv.

1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1

Joonis 12



Joonis 13

11. klass

1. *Vastus:* $x = -1$, $y = 1$.

Korrutades võrrandi pooled läbi avaldisega xy, saame $x^2 = y^2$, kust $x = y$ või $x = -y$. Asendades teises võrrandis x^2 asemele y^2 ja y^2 asemele x^2, saame $y^3 = x^3 + 2$. See võrdus ilmselt ei kehti $x = y$ korral, järelikult $x = -y$ ning $x^3 = -y^3$. Nüüd aga saame $y^3 = -y^3 + 2$, kust $y^3 = 1$. Seega oleme leidnud ainsa lahendi $y = 1$, $x = -1$. Kontrollides selgub, et see tõesti rahuldab antud võrrandisüsteemi.

2. *Vastus:* 150°; $300\sqrt{3}$ m.

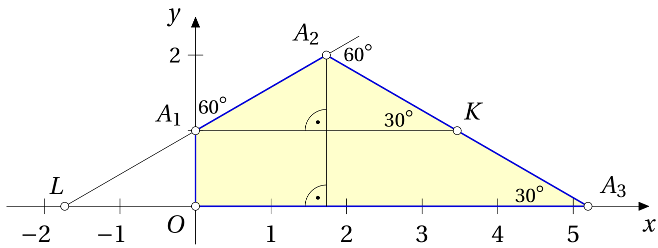
Lahendus 1. Olgu start koordinaatide alguspunktis O, põhjasuund y-telje positiivses suunas ning ühiklõigu pikkus 100 m. Tähistame pöördepunktid vastavalt A_1, A_2 ja A_3. Siis vastavalt ülesande tingimustele $|OA_1| = 1$, $|A_1A_2| = 2$ ja $|A_2A_3| = 4$ ning $\overrightarrow{OA_1} = (0;1)$, $\overrightarrow{A_1A_2} = (2\sin 60^\circ; 2\cos 60^\circ) = (\sqrt{3}; 1)$ ja $\overrightarrow{A_2A_3} = (4\sin 120^\circ; 4\cos 120^\circ) = (2\sqrt{3}; -2)$ (joonis 14). Seega

$$\overrightarrow{OA_3} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} = (3\sqrt{3}; 0).$$

Kaugus punktist A_3 starti O on niisiis $300\sqrt{3}$ m ning suund 270° põhjasuunast päripäeva arvates. Et esimeses kahes pöördepunktis pöörati kokku $2 \cdot 60^\circ = 120^\circ$ võrra, siis on punktis A_3 vaja pöörata veel 150° võrra.

Lahendus 2. Kasutame samu tähiseid nagu esimeses lahenduses. Lisaks olgu K lõigu A_2A_3 keskpunkt. Et $|A_1A_2| = |A_2K| = 2$, siis on kolmnurk A_1A_2K võrdhaarne tipunurgaga $\angle A_1A_2K = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$. Järelikult $\angle A_2A_1K = \angle A_2KA_1 = 30^\circ$.

Edasi, $\angle OA_1K = 180^\circ - 60^\circ - 30^\circ = 90^\circ$ ehk lõik A_1K on paralleelne x-teljega. Et $|A_2K| = |KA_3|$, siis on A_1K kesklõiguks kolmnurgale LA_2A_3, kus L on punkti A_3 läbiva x-teljega paralleelse sirge lõikepunkt sirgega A_1A_2.



Joonis 14

Seega ka $\angle A_2LA_3 = \angle A_2A_3L = 30^\circ$. Kolmnurga A_1A_2K tipust A_2 tõmmatud kõrgus on $2\sin 30^\circ = 1$, kolmnurga LA_2A_3 kõrgus aga $2 \cdot 1 = 2$. Et $|OA_1| = 1$, siis asub punkt O sirgel LA_3 ning viimane sirge ühtib tegelikult x-teljega.

Võrdhaarse kolmnurga LA_2A_3 haara A_2A_3 pikkus on 4, aluse LA_3 pikkus on seega $2 \cdot 4 \cdot \cos 30^\circ = 4\sqrt{3}$. Täisnurksest kolmnurgast LOA_1, kus $|LA_1| = 2$, leiame lõigu LO pikkuseks $2\cos 30^\circ = \sqrt{3}$. Järelikult lõigu OA_3 pikkus on $4\sqrt{3} - \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$. Maastikumängu võistkond peab seega punktis A_3 pöörduma nurga $180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$ võrra ja pärast seda läbima starti tagasi jõudmiseks vahemaa $3\sqrt{3} \cdot 100 = 300\sqrt{3}$ meetrit.

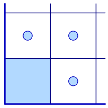
3. *Vastus:* 342.

Lahendus 1. Arvutame, mitmel viisil on võimalik ruudustikus valida värvimiseks kujundi esimene ruut ja seejärel teine ruut.

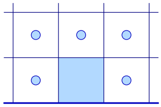
- Kui esimene ruut asub nurgas (joonis 15), siis saab teda valida 4 viisil ning pärast iga sellist valikut teist ruutu 3 viisil. Kokku on kahe ruudu valimiseks $4 \cdot 3 = 12$ võimalust.
- Kui esimene ruut asub küljel (joonis 16), aga mitte nurgas, siis saab teda valida $4 \cdot 8 = 32$ viisil ning seejärel teist ruutu 5 viisil. Kokku $32 \cdot 5 = 160$ võimalust.
- Kui esimene ruut ei asu küljel ega nurgas (joonis 17), siis saab teda valida $8 \cdot 8 = 64$ viisil ning teist ruutu 8 viisil. Kokku $64 \cdot 8 = 512$ võimalust.

Üldse saab kahte ruutu järjest värvida $12 + 160 + 512 = 684$ viisil. Siinjuures lugesime iga kujundit parajasti kaks korda, sest kumbki ruut võib olla esimene. Erinevaid kujundeid on järelikult $\dfrac{684}{2} = 342$.

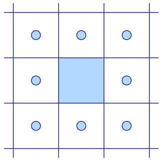
Lahendus 2. Kujundeid, mille üks ruut asub teise kõrval otse üleval, on $10 \cdot 9 = 90$, sest alumine ruut võib olla igal pool peale ülemise rea ja tema valikuga on määratud ka ülemise ruudu asukoht. Kujundeid, mille üks ruut asub teisest üleval paremal, on $9 \cdot 9 = 81$, sest alumine ruut võib asuda



Joonis 15



Joonis 16



Joonis 17

igal pool vasakus alumises 9×9 osas ning tema valikuga on samuti ülemise ruudu asukoht määratud. Neid kahte liiki kujundeid on $90+81 = 171$. Kõik ülejäänud kujundid on parajasti need, mis on saadavad vaadeldud kahte tüüpi kujunditest 90° pööramisega, ja neid on kokku samuti 171. Üldse on kujundeid seega $171 + 171 = 342$.

4. *Vastus:* 2006.

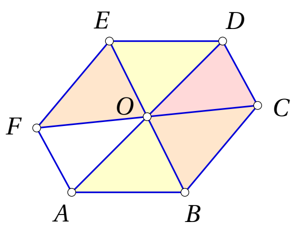
Olgu x müügibokside arv ristküliku pikema külje sihis ja y lühema külje sihis. Esimene politseipatrull kontrollis läbi x boksi, teine aga $7y$ boksi. Ülesande tingimuste põhjal kehtivad võrratused $x > y + 100$ ja $7y > x$. Järelikult $7y > y + 100$ ehk $6y > 100$. Et y peab olema täisarv, siis saame siit $y \geqslant 17$. Võrratus $x > y + 100$ annab nüüd $x > 117$ ehk $x \geqslant 118$. Müügibokside arv rahuldab seega võrratust $xy \geqslant 17 \cdot 118 = 2006$. Teiselt poolt, müügibokside arv 2006 on tõepoolest võimalik, sest $x = 17$ ja $y = 118$ puhul võrratused $x > y + 100$ ja $7y > x$ kehtivad.

5. Olgu $ABCDEF$ vaadeldav kuusnurk ning O tema diagonaalide lõikepunkt (joonis 18). Eeldame, et ühise tipuga O kolmnurkade $AOB, \ldots, EOF$ pindala on S, ning tõestame, et ka kolmnurga FOA pindala on S. Et kolmnurgad AOB ja DOE on võrdse pindalaga, siis

$$\frac{1}{2} \cdot |AO| \cdot |BO| \cdot \sin \angle AOB = \frac{1}{2} \cdot |DO| \cdot |EO| \cdot \sin \angle DOE,$$

millest nurkade AOB ja DOE võrdsuse tõttu saame

$$|AO| \cdot |BO| = |DO| \cdot |EO|.$$



Joonis 18

Analoogiliselt saame kolmnurkadest BOC ja EOF pindalade võrdsusest

$$|BO| \cdot |CO| = |EO| \cdot |FO|.$$

Jagades pooliti viimased kaks võrdust ja vabanedes murdudest, jõuame võrduseni

$$|FO| \cdot |AO| = |CO| \cdot |DO|.$$

Kolmnurga FOA pindala on seega

$$\frac{1}{2} \cdot |FO| \cdot |AO| \cdot \sin \angle FOA = \frac{1}{2} \cdot |CO| \cdot |DO| \cdot \sin \angle COD = S.$$

6. *Vastus:* a) ei; b) jah.

a) Arvu a numbrite summa on $s(a) = 364 = 2^2 \cdot 7 \cdot 13$. Kui mingi arvu n numbrite korrutis oleks 364, siis jaguks arvu numbrite korrutis 13-ga, st mingi number peaks jaguma 13-ga. Et numbrid on kõik väiksemad kui 13, siis peab see number olema 0. Kuid sel juhul on ka arvu n numbrite korrutis 0. Järelikult niisugust arvu n ei leidu.

b) Kirjutame arvule a juurde $k(a) - s(a)$ numbrit 1 ning võtame tulemuse arvuks n. Saadud arvu n numbrite korrutis $k(n)$ võrdub arvu a numbrite korrutisega $k(a)$, numbrite summa $s(n)$ on aga $s(a) + k(a) - s(a) = k(a)$.

12. klass

1. *Vastus:* 4 aastat.

Ametniku kogupalk n aasta järel on esimesel juhul sellise aritmeetilise jada (a_k) esimese $12n$ liikme summa, kus $a_1 = 1000$ ja $d = 100$, st

$$A(n) = \frac{2a_1 + (12n-1)d}{2} \cdot 12n = 12000n + \frac{12n(12n-1)}{2} \cdot 100.$$

Teisel juhul on ametniku kogupalk n aasta järel sellise geomeetrilise jada (b_k) esimese n liikme summa, kus $b_1 = 12000$ (esimese aasta palk) ja $q = 2$ (sest igal järgmisel aastal palk kahekordistub võrreldes eelmise aastaga), st

$$B(n) = b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = 12000 \cdot (2^n - 1).$$

Jääb üle kontrollida kummagi avaldise väärtusi, kui $n = 1, 2, \ldots$:

n	$A(n)$	$B(n)$
1	18600	12000
2	51600	36000
3	99000	84000
4	160800	180000

Seega $n = 4$ on vähim väärtus, mille puhul kehtib võrratus $B(n) > A(n)$.

2. *Vastus:* 60°, 60°, 60° ja 120°, 30°, 30°.

Võrrandit teisendades saame $\cos^2 2x = \frac{1}{4}$, st $\cos 2x = \frac{1}{2}$ või $\cos 2x = -\frac{1}{2}$. Et meid huvitavad ainult nurgad 0° ja 180° vahel, st $0^\circ < 2x < 360^\circ$, siis esimesest võrrandist $2x = 60^\circ$ või $2x = 300^\circ$, teisest võrrandist aga $2x = 120^\circ$ või $2x = 240^\circ$. Sobivad x väärtused on niisiis 30°, 60°, 120° ja 150°. Ainsad võimalused, kuidas kolmnurga kõik kolm nurka saavad olla selliste suurustega, on 60°, 60°, 60° ning 120°, 30°, 30°.

3. *Vastus:* suurem.

Logaritmi omaduste põhjal

$$5\log 2 + 7\log 3 - \log 7 = \log \frac{2^5 3^7}{7} = \log \frac{69984}{7}.$$

Et $69984 < 70000$, siis on viimane avaldis väiksem kui

$$\log \frac{70000}{7} = \log 10^4 = 4.$$

Märkus. Avaldise $5\log 2 + 7\log 3 - \log 7$ täpne väärtus on $3{,}9999007\ldots$

4. *Vastus:* b) sobib iga 3-ga jaguv arv.

a) Ühendame tahvlile kirjutatud arvud järjestikusteks paarideks. Tõestame, et iga paari esimene arv ei jagu 3-ga. Ilmselt kehtib see omadus esimeses paaris. Kui mingi paari a, b esimene arv ei jagu 3-ga, siis ka järgmise paari esimene arv $2a + 3b$ ei jagu 3-ga, sest $2a$ ei jagu 3-ga.

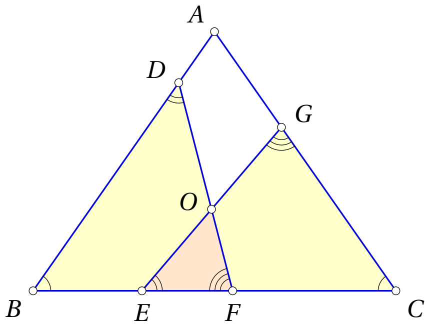
b) Eeldame, et esimese paari teine arv jagub 3-ga ning tõestame, et sama kehtib siis ka kõigi järgnevate paaride kohta. Kui mingi paari a, b teine arv jagub 3-ga, siis järgmise paari teine arv $2b + 3\cdot(2a+3b)$ jagub samuti 3-ga, sest $2b$ jagub 3-ga.

Märkus. Lahendusest nähtub, et leidub ainult kaks võimalust: kas ükski arv ei jagu 3-ga või täpselt pooled arvud jaguvad 3-ga. Viimane võimalus realiseerub parajasti siis, kui teiseks arvuks valida mingi 3-ga jaguv arv.

5. *Vastus:* 55°.

Kolmnurgad BDF ja CEG (joonis 19) on sarnased (isegi kongruentsed), sest $\angle FBD = \angle GCE$ ja nurkade lähisküljed on vastavalt võrdsed. Siit tulenevalt on kolmnurk BDF sarnane kolmnurgaga OEF, sest $\angle BDF = \angle CEG$ ja $\angle BFD$ on ühine. Seega $\angle DOG = \angle EOF = \angle ABC$. Et aga $\angle BAC = 70^\circ$, siis $\angle ABC = \frac{180^\circ - 70^\circ}{2} = 55^\circ$.

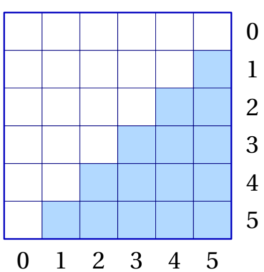
Märkus. Tingimus, et E asub tipule B lähemal kui F, ei ole tegelikult oluline, ülesande väide kehtib ka ilma selleta.



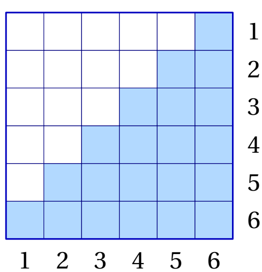
Joonis 19

6. *Vastus:* $\dfrac{n(n-1)}{2}$ ja $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Värvitud ruutude arv reas (veerus) on alati vähemalt 0 ja ülimalt n. Seega peavad värvitud ruutude arvud ruudustiku ridades (veergudes) olema n erinevat arvu nendes piirides. Kui leiduks kaks rida, millest ühes oleks värvitud 0 ruutu ja teises n ruutu, siis võiks ühes veerus värvitud ruutude arv muutuda ainult 1 ja $n-1$ vahel, seega ei saaks kõigis n veerus olla väritud ruute erineval arvul. Siit saame kaks võimalust: värvitud ruutude arvud ridades on kas $0, 1, \ldots, n-1$ või $1, 2, \ldots, n$. Esimesel juhul sisaldab tabel $0 + 1 + \ldots + (n-1) = \dfrac{(n-1)n}{2}$ värvitud ruutu, teisel juhul aga $1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ värvitud ruutu. Kumbki olukord on ka tegelikult võimalik, esimesel juhul piisab värvida ruudustikus kõik diagonaalist allpool asuvad ruudud (joonis 20), teisel juhul aga kõik diagonaalist allpool või diagonaalil asuvad ruudud (joonis 21).



Joonis 20



Joonis 21