LII Олимпиада по математике учащихся Эстонии

РЕГИОНАЛЬНЫЙ ТУР

15 января 2005 г.

X класс

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи дает 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Найти все такие действительные числа, квадратный корень из которых ровно на 1 меньше самого числа.
2. Упростить выражение $2(a+b)^{-1}+(a+c)^{-1}-3(b+c)^{-1}$, если известно, что числа a, b и c положительные и $b^2+2c^2=3a^2$.
3. На школьное здание поместили неоновую рекламу, состоящую из n букв. Её первая буква K, за ней следуют $n-2$ буквы O и последняя буква L. В рабочем цикле рекламы каждая фаза длится одну секунду. В первую секунду не горит ни одна буква; затем загорается K; затем загорается следующая за K буква O; затем следующая O и так далее, пока в конце не горят все буквы. Затем гаснет L, после этого последняя O, после неё предпоследняя O и так далее, пока в последнюю секунду не остаётся гореть только K. Сколько стоит один рабочий цикл рекламы, если горение одной буквы в течение одной секунды стоит 1 цент?
4. Девятизначное натуральное число содержит в своей записи цифры 7, 3 и 8 по крайней мере по одному разу. Если в этом числе зачеркнуть все цифры 7, то останется число, делящееся на 38; если зачеркнуть все цифры 3, то останется число, делящееся на 78; если же зачеркнуть все цифры 8, то останется число, делящееся на 73.
   а) Найти одно такое число, которое состоит только из цифр 7, 3 и 8.
   б) Найти одно такое число, которое не содержит в своей записи ни одной цифры 0 и содержит цифры 7, 3 и 8 ровно по одному разу.
5. На окружности с центром O берутся точки A, B и C. Пусть точки D, E и F – соответственно середины отрезков OA, OB и OC, а G и H – соответсвенно середины отрезков DE и EF. Доказать, что точки O, G, E и H лежат на одной окружности.
6. Из учеников класса каждому мальчику нравится по меньшей мере одна девочка и каждой девочке нравится по меньшей мере один мальчик. Известно, что если для каких-то четырёх учеников A, B, C, D ученику A нравится B, ученику B нравится C, а ученику C нравится D, то ученику A нравится также и D.
   а) Доказать, что в классе найдутся мальчик и девочка, которые нравятся друг другу.
   б) Можно ли утверждать, что в классе найдётся девочка, которая нравится всем мальчикам?

LII Олимпиада по математике учащихся Эстонии

РЕГИОНАЛЬНЫЙ ТУР

15 января 2005 г.

XI класс

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи дает 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Прямая $y = ax + b$ проходит через точки $(a; b+1)$ и $(b-1; a)$. Найти значения a и b.

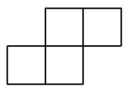
2. Углы α и β треугольника ABC такие, что $4\sin^4\alpha + \sin^2 2\alpha = 2$ и $\cos^2\beta - \sin^2\beta = 0$. Найти площадь этого треугольника, если длина стороны, противолежащей углу α, равна 30 см.

3. Начиная с 2001 года, 31 декабря каждого года Юра подсчитывал все свои полученные за год оценки. За эти годы успеваемость Юры существенно улучшилась: в каждый следующий год у него было на 20% меньше двоек и на треть больше пятёрок, чем в предыдущий. При этом в 2003 году у него впервые было пятёрок больше, чем двоек. Известно, что ни в один год Юра не получил более 300 оценок. Доказать, что в 2004 году у Юры было пятёрок ровно вдвое больше, чем двоек.

4. У натурального числа n имеются такие различные положительные делители a и b, что выполняется равенство $(a-5)(b+1) = n-5$. Доказать, что $5n$ является квадратом некоторого целого числа.

5. На дуге описанной окружности треугольника ABC, на которую опирается угол ABC, берётся точка D. Биссектриса угла ACD пересекает окружность второй раз в точке E. Пусть X – точка пересечения отрезков BE и AC. Доказать, что если $|XA| = |XB|$, то четырёхугольник $BCDE$ является равнобедренной трапецией или прямоугольником.

6. Мама купила в магазине шоколадку размерами 2×2005. Андрей и Паша решили сыграть в следующую игру. При каждом ходе Андрей может выбрать себе (отломать новый или взять существующий) кусок шоколада, состоящий из одного квадратика, а Паша – изображённый на рисунке кусок из 4 квадратиков (рисунок отражать нельзя). Когда Паша не может больше взять ни одного куска, то все оставшиеся куски достаются Андрею. Ходы делают по очереди, начинает Андрей. Кто получит в случае наилучшей стратегии больше шоколада?



LII Олимпиада по математике учащихся Эстонии

РЕГИОНАЛЬНЫЙ ТУР

15 января 2005 г.

XII класс

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи дает 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Шестой член арифметической прогрессии равен сумме пяти первых, а одиннадцатый член равен 1. Найти первый член этой прогрессии.
2. Найти все такие пары действительных чисел (a, b), при которых график производной, взятой от функции $y = x^3 + ax^2 + bx + 1$, пересекает ось x в двух различных точках $x = a$ и $x = b$.
3. В гимназии учится определённое число учеников. По итогам первой четверти некоторые из них были отличниками, некоторые хорошистами, а остальные – троечниками. Во второй четверти 85% тех, кто был отличником, остались отличниками, остальные стали хорошистами. Из тех, кто был в первой четверти хорошистом, остались хорошистами 80%, остальные стали троечниками. Все троечники остались троечниками и по итогам второй четверти, кроме Юры, который стал двоечником. Оказалось, что после второй четверти в гимназии отличников, хорошистов и троечников поровну. Найти наименьшее возможное число учеников в гимназии.
4. У положительного целого числа n имеются такие положительные делители a и b, что выполняется равенство $(a-2)(b+1) = n$. Доказать, что $2n+1$ является квадратом некоторого целого числа.
5. Биссектриса угла A треугольника ABC пересекает сторону BC в точке D. Через точку D проходят ещё две прямые: одна из них параллельна стороне AB и пересекает сторону AC в точке E, другая параллельна стороне AC и пересекает сторону AB в точке F. Доказать, что
$$\frac{|EC|}{|FB|} = \frac{|CD|^2}{|BD|^2}.$$
6. В компьютере Папы Карло действует условие, что пароль пользователя должен состоять из 5 маленьких букв. В целях безопасности Папа Карло заменяет это условие новым, согласно которому пароль должен состоять из 4 маленьких букв и 1 специального символа (в порядке, выбираемом пользователем). Буратино является пользователем этого компьютера. Раньше Буратино знал только 30 маленьких букв. Какое наименьшее число специалных символов он должен выучить, чтобы для выбора пароля согласно новому порядку у него было больше возможностей, чем раньше?