Eesti koolinoorte LII matemaatikaolümpiaad

PIIRKONNAVOOR

15. jaanuar 2005

X klass

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Leia kõik sellised reaalarvud, mille ruutjuur on arvust endast täpselt 1 võrra väiksem.

2. Lihtsusta avaldis $2(a+b)^{-1}+(a+c)^{-1}-3(b+c)^{-1}$, kui on teada, et arvud a, b ja c on positiivsed ning $b^2+2c^2=3a^2$.

3. Koolimajale paigaldati n tähest koosnev neoonreklaam, mille esimene täht on K, sellele järgneb $n-2$ tähte O ning viimane täht on L. Reklaami töötsüklis kestab iga faas ühe sekundi. Esimesel sekundil ei põle ükski täht; seejärel süttib K; seejärel süttib K-le järgnev O; seejärel järgmine O jne, kuni lõpuks põlevad kõik tähed; seejärel kustub L, siis viimane O, siis eelviimane O jne, kuni viimasel sekundil põleb ainult K. Kui palju maksab reklaami üks töötsükkel, kui ühe tähe põlemine ühe sekundi jooksul maksab 1 sendi?

4. Üheksakohalise naturaalarvu numbrite hulgas esineb vähemalt üks 7, vähemalt üks 3 ning vähemalt üks 8. Kui sellest arvust kustutada kõik numbrid 7, siis jääb järele 38-ga jaguv arv; kui kustutada kõik numbrid 3, siis jääb järele 78-ga jaguv arv; kui aga kustutada kõik numbrid 8, siis jääb järele 73-ga jaguv arv.
   a) Leia üks selline arv, mis koosneb ainult numbritest 7, 3 ja 8.
   b) Leia üks selline arv, mille numbrite hulgas on täpselt üks 7, täpselt üks 3 ja täpselt üks 8 ning mis ei sisalda numbrit 0.

5. Ringjoonel keskpunktiga O võetakse punktid A, B ja C. Olgu punktid D, E ja F vastavalt lõikude OA, OB ja OC keskpunktid ning G ja H vastavalt lõikude DE ja EF keskpunktid. Tõesta, et punktid O, G, E ja H asuvad ühel ringjoonel.

6. Klassi õpilastest igale poisile meeldib vähemalt üks klassiõde ja igale tüdrukule vähemalt üks klassivend. On teada, et kui mingite õpilaste A, B, C, D korral A-le meeldib B, B-le C ja C-le D, siis meeldib A-le ka D.
   a) Tõesta, et klassis leiduvad poiss ja tüdruk, kes meeldivad teineteisele.
   b) Kas võib väita, et klassis leidub tüdruk, kes meeldib kõigile poistele?

Eesti koolinoorte LII matemaatikaolümpiaad

PIIRKONNAVOOR

15. jaanuar 2005

XI klass

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Sirge $y = ax + b$ läbib punkte $(a; b+1)$ ja $(b-1; a)$. Leia a ja b väärtused.

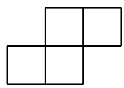
2. Kolmnurga ABC nurgad α ja β on sellised, et $4\sin^4\alpha + \sin^2 2\alpha = 2$ ja $\cos^2\beta - \sin^2\beta = 0$. Leia selle kolmnurga pindala, kui nurga α vastaskülje pikkus on 30 cm.

3. Alates 2001. a. on Juku iga aasta 31. detsembril lugenud kokku kõik oma aasta jooksul saadud hinded. Nende aastatega on Juku õppeedukus tunduvalt paranenud: igal järgmisel aastal on tal olnud 20% vähem kahtesid ja kolmandiku võrra rohkem viisi kui eelmisel aastal. Seejuures oli tal 2003. a. esmakordselt viisi rohkem kui kahtesid. On teada, et ühelgi aastal ei saanud Juku üle 300 hinde. Tõesta, et 2004. a. oli Jukul viisi täpselt kaks korda rohkem kui kahtesid.

4. Naturaalarvul n leiduvad sellised erinevad positiivsed tegurid a ja b, et kehtib võrdus $(a-5)(b+1) = n-5$. Tõesta, et $5n$ on mingi täisarvu ruut.

5. Kolmnurga ABC ümberringjoone kaarel, millele toetub nurk ABC, valitakse punkt D. Nurga ACD poolitaja lõikab kolmnurga ümberringjoont teist korda punktis E. Olgu X lõikude BE ja AC lõikepunkt. Tõesta, et kui $|XA| = |XB|$, siis nelinurk $BCDE$ on võrdhaarne trapets või ristkülik.

6. Ema ostis poest šokolaaditahvli mõõtmetega 2×2005. Ats ja Pets otsustasid mängida järgmist mängu. Igal käigul tohib Ats valida endale (murda uue või võtta olemasoleva) ühest ruudust koosneva tüki, Pets aga joonisel näidatud neljaruudulise tüki (joonist peegeldada ei tohi). Kui Pets enam ühtegi tükki võtta ei saa, siis jäävad kõik järelejäänud tükid Atsile. Käike tehakse kordamööda, alustab Ats. Kumb saab parima mängustrateegia korral rohkem šokolaadi?



Eesti koolinoorte LII matemaatikaolümpiaad

PIIRKONNAVOOR

15. jaanuar 2005

XII klass

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Aritmeetilise jada kuues liige on võrdne esimese viie liikme summaga ning üheteistkümnes liige on 1. Leia selle jada esimene liige.

2. Leia kõik niisugused reaalarvude paarid (a, b), mille korral funktsiooni $y = x^3 + ax^2 + bx + 1$ tuletise graafik lõikab x-telge kahel erineval kohal $x = a$ ja $x = b$.

3. Gümnaasiumis õpib teatud arv õpilasi. Pärast esimest veerandit olid mõned õpilastest viielised, mõned neljalised ja ülejäänud kolmelised. Pärast teist veerandit jäi senistest viielistest õpilastest ikka viielisteks 85%, ülejäänutest said neljalised, senistest neljalistest jäi neljalisteks 80%, ülejäänutest said kolmelised ning senistest kolmelistest jäid kolmelisteks kõik peale Juku, kellest sai kahemees. Osutus, et nüüd oli gümnaasiumis viielisi, neljalisi ja kolmelisi õpilasi ühepalju. Leia vähim võimalik õpilaste arv gümnaasiumis.

4. Positiivsel täisarvul n leiduvad sellised positiivsed tegurid a ja b, et kehtib võrdus $(a - 2)(b + 1) = n$. Tõesta, et $2n + 1$ on mingi täisarvu ruut.

5. Kolmnurga ABC tipust A tõmmatud nurgapoolitaja lõikab külge BC punktis D. Lisaks läbib punkti D veel kaks sirget: küljega AB paralleelne sirge, mis lõikab külge AC punktis E, ning küljega AC paralleelne sirge, mis lõikab külge AB punktis F. Tõesta, et
$$\frac{|EC|}{|FB|} = \frac{|CD|^2}{|BD|^2}.$$

6. Papa Carlo arvutis kehtib tingimus, et kasutaja parool peab koosnema 5 väiketähest. Turvalisuse huvides asendab papa Carlo selle uue tingimusega, et parool peab koosnema 4 väiketähest ja 1 erisümbolist (kasutaja valitud järjekorras). Buratino on selle arvuti kasutaja. Seni tundis Buratino ainult 30 väiketähte. Milline on vähim arv erisümboleid, mille ta peab selgeks õppima, et uue korra kohaselt oleks tal parooli valimiseks senisest rohkem võimalusi?