LII Олимпиада по математике учащихся Эстонии

РЕГИОНАЛЬНЫЙ ТУР

15 января 2005 г.

VII класс

I часть: Время, отводимое для решения: 40 минут.
На этом листке написать только ответы, для решения можно использовать дополнительную бумагу.
Верный ответ каждой задачи дает 2 балла.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Найти последнюю цифру числа $2 \cdot 4 \cdot 6 + 6 \cdot 8 \cdot 10 + 10 \cdot 12 \cdot 14 + 14 \cdot 16 \cdot 18$.

. . . .

2. Обвести каждую дробь, которой можно заменить $\frac{m}{n}$ в неравенстве

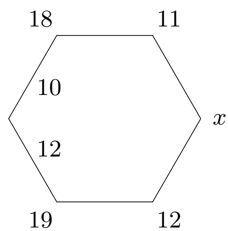
$$\frac{3}{4} < \frac{m}{n} < \frac{5}{6}.$$

$\frac{19}{24}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{7}{8}$

3. Найти наименьшее возможное значение суммы $a+b$ натуральных чисел a и b, если $3a \cdot 7b = 210$.

. . . .

4. На каждой стороне шестиугольника написали одно число, а в каждой вершине записали сумму чисел, находящихся на двух смежных с ней сторонах. На рисунке сохранилась лишь часть чисел. Найти при их помощи число, которое было написано на месте x.

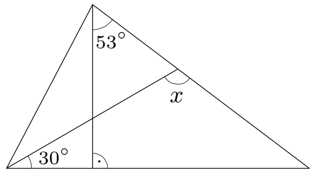


. . . .

5. В пятницу 1 кг пирога стоил 80 крон. В субботу в магазине была скидка 20%. Сколько стоило 200 г этого пирога в субботу?

. . . .

6. Найти величину угла x.

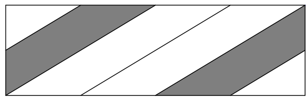


. . . .

7. Площади какого числа маленьких квадратов равна площадь четырёхугольника, ограниченного жирной линией?

. . . .

8. Большие стороны прямоугольника поделены на 4 равные части, а меньшие пополам. Какая часть площади прямоугольника закрашена тёмным цветом?

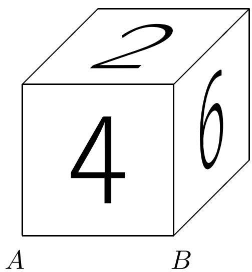


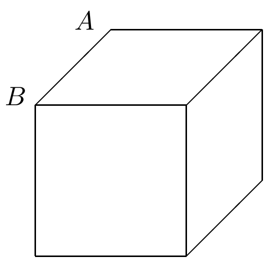
. . . .

9. Угол сектора равен 30°, а площадь этого сектора 3π см^2. Найти площадь всего круга.

. . . .

10. На каждую грань куба написано одно из чисел от 1 до 6 так, что сумма чисел, находящихся на противоположных гранях, равна 7. Куб поворачивают так, что точки A и B переходят из положения, показанного на левом рисунке, в положение, показанное на правом рисунке. Нанести на правый рисунок числа, находящиеся на видимых гранях куба после поворота.





LII Олимпиада по математике учащихся Эстонии

РЕГИОНАЛЬНЫЙ ТУР

15 января 2005 г.

VIII класс

I часть: Время, отводимое для решения: 40 минут.
На этом листке написать только ответы, для решения можно использовать дополнительную бумагу.
Верный ответ каждой задачи дает 2 балла.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Вычислить: $\dfrac{1 \cdot 3 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 18}{1 \cdot 2 \cdot 4 + 2 \cdot 4 \cdot 8} =$ . . . .

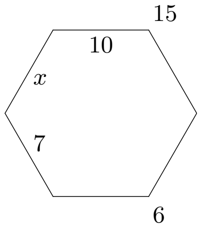
2. Пусть $x = -1$ и $y = 1$. Обвести выражение с наименьшим значением (если таковых несколько, то все такие выражения).

$$x^2 + y^2 \qquad (y - x)^2 \qquad y^2 - 2yx + x^2 \qquad x^2 - y^2$$

3. В школе 1100 учеников. Чему равно наибольшее число, про которое можно утверждать, что в школе обязательно найдётся столько учеников, у которых день рождения в один и тот же день?

. . . .

4. На каждой стороне шестиугольника написали одно число так, что суммы чисел, находящихся на противоположных стронах, равны. В каждой вершине записали сумму чисел, находящихся на двух смежных с ней сторонах. На рисунке сохранилась лишь часть чисел. Найти при их помощи число, которое было написано на месте x.

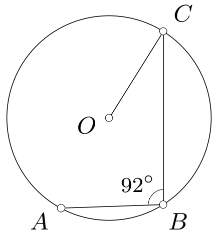


. . . .

5. Бабушка связала три четверти длины шарфа, когда выяснилось, что 10% уже связанной части придётся распустить. Сколько процентов длины шарфа останется ей связать после распускания?

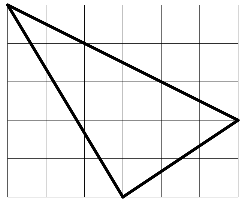
. . . .

6. Найти величину угла OCB, если точки A, B и C расположены на окружности с центром O, а $|AB| = |OC|$.



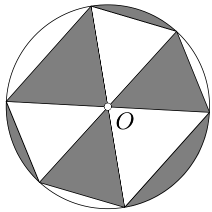
. . . .

7. Площади какого числа маленьких квадратов равна площадь треугольника, ограниченного жирной линией?



. . . .

8. Какая часть круга закрашена тёмным цветом, если O является центром окружности?

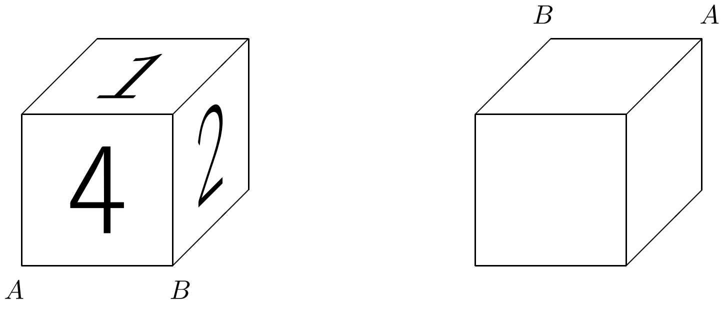


. . . .

9. Площадь всего круга в 1,2 раза больше площади сектора. Найти величину угла сектора.

. . . .

10. На каждую грань куба написано одно из чисел от 1 до 6 так, что сумма чисел, находящихся на противоположных гранях, равна 7. Куб поворачивают так, что точки A и B переходят из положения, показанного на левом рисунке, в положение, показанное на правом рисунке. Нанести на правый рисунок числа, находящиеся на видимых гранях куба после поворота.



LII Олимпиада по математике учащихся Эстонии

РЕГИОНАЛЬНЫЙ ТУР

15 января 2005 г.

IX класс

I часть: Время, отводимое для решения: 40 минут.
На этом листке написать только ответы, для решения можно использовать дополнительную бумагу.
Верный ответ каждой задачи дает 2 балла.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Вычислить: $\dfrac{2005^3 - 4 \cdot 2005}{2005^2 + 2 \cdot 2005} =$ . . . .

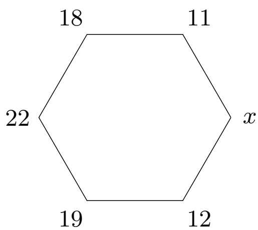
2. Пусть $x = -1$ и $y = 1$. Обвести выражение с наименьшим значением (если таковых несколько, то все такие выражения).

   $y^3 - x^3$ $\qquad (y - x)^3 \qquad y^3 - 3y^2x + 3yx^2 - x^3 \qquad y^3 + x^3$

3. Найти как наибольшее, так и наименьшее число среди трёхзначных чисел, которые делятся на 9, и цифрами которого являются три последовательных натуральных числа в каком-то порядке.

   . . . . и . . . .

4. На каждой стороне шестиугольника написали одно число, а в каждой вершине записали сумму чисел, находящихся на двух смежных с ней сторонах. На рисунке сохранилась лишь часть чисел. Найти при их помощи число, которое было написано на месте x.

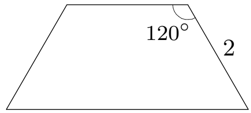


   . . . .

5. Телепередача закончилась в 16.00. Если бы не было рекламных пауз, которые составляли 20% от времени передачи, то передача закончилась бы в 15.30. Во сколько началась передача?

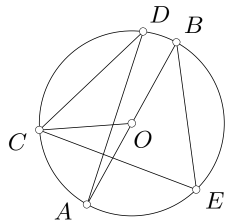
   . . . .

6. Один из углов равнобедренной трапеции равен 120°, а длина бокового ребра равна 2. Биссектриса тупого угла трапеции делит большее основание пополам. Найти длины оснований трапеции.



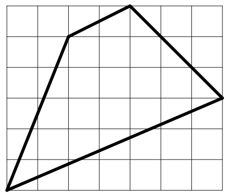
. . . . и . . . .

7. На окружности с центром O и диаметром AB выбраны точки C, D и E, как показано на рисунке. Найти сумму величин углов CDA и BEC.



. . . .

8. Площади какого числа маленьких квадратов равна площадь четырёхугольника, ограниченного жирной линией?



. . . .

9. Понятия *параллелограмм*, *ромб*, *прямоугольник* и *квадрат* обозначены в каком-то порядке буквами A, B, C и D. Найти, какое понятие обозначает каждая буква, если все три следующих утверждения верны:

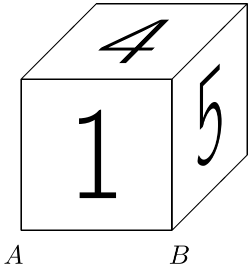
   а) A – это D, стороны которого равны;

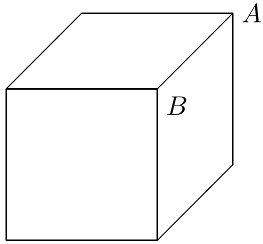
   б) D – это C, углы которого равны;

   в) B – это C, стороны которого равны.

A: . . . . B: . . . . C: . . . . D: . . . .

10. На каждую грань куба написано одно из чисел от 1 до 6 так, что сумма чисел, находящихся на противоположных гранях, равна 7. Куб поворачивают так, что точки A и B переходят из положения, показанного на левом рисунке, в положение, показанное на правом рисунке. Нанести на правый рисунок числа, находящиеся на видимых гранях куба после поворота.





LII Олимпиада по математике учащихся Эстонии

РЕГИОНАЛЬНЫЙ ТУР

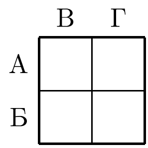
15 января 2005 г.

VII класс

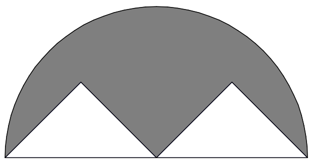
II часть: Время, отводимое для решения: 2 часа.
Решения задач написать на отдельном листе.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи дает 7 баллов. Написать только ответ недостаточно!
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Записать в каждую клетку одну цифру так, чтобы получившиеся двузначные числа не начинались с нуля и удовлетворяли приведённым далее условиям. Пояснить, в каком порядке заполнялись клетки. Обосновать, почему нет других возможностей.

   Вправо.
   А. Кратное числу 3.
   Б. Трёхкратное простого числа.
   Вниз.
   В. Кратное числу 25.
   Г. Квадрат натурального числа.



2. На диаметре полукруга построены два равных равнобедренных прямоугольных треугольника. Найти площадь части, закрашенной тёмным цветом, если диаметр полукруга равен 14 см.



3. Андре получил в подарок 5 пустых копилок. Каждый день он выбирает две разные копилки и в каждую одновременно опускает по одной однокроновой монете. Если таким образом собирать монеты, то возможно ли, что через некоторое время в каждой копилке окажется ровно

   а) четыре монеты;

   б) семь монет?

   В случае утвердительного ответа показать, каким образом следует действовать; отрицательный ответ обосновать.

LII Олимпиада по математике учащихся Эстонии

РЕГИОНАЛЬНЫЙ ТУР

15 января 2005 г.

VIII класс

II часть: Время, отводимое для решения: 2 часа.
Решения задач написать на отдельном листе.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи дает 7 баллов. Написать только ответ недостаточно!
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Записать в каждую клетку одну цифру так, чтобы получившиеся трёхзначные числа не начинались с нуля и удовлетворяли приведённым далее условиям. Пояснить, в каком порядке заполнялись клетки. Обосновать, почему нет других возможностей.

   Вправо.

   А. Делящийся на 5 квадрат натурального числа.

   Б. Число, делящееся на 5 и 6.

   В. Число, все цифры которого нечётные, и сумма цифр которого равна 11.

   Вниз.

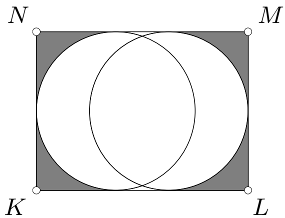
   Г. Число, которое на 222 больше единственного трёхзначного делителя числа 2005.

   Д. Число, две цифры которого чётные, и которое при делении на 4 даёт остаток 1.

   Е. Число, делящееся на 3.

	Г	Д	Е
А			
Б			
В			

2. В прямоугольник $KLMN$ вписаны две окружности, касающиеся сторон прямоуголника. Найти сумму площадей четырёх закрашенных тёмным цветом частей, если $|KL| = 12$ см, а расстояние между центрами окружностей составляет треть длины стороны KN.



3. В бассейне 8 клапанов для слива воды. При помощи системы можно выбрать ровно 4 клапана и изменить их состояние на противоположное (открытый клапан закрывается, закрытый открывается). Можно ли открыть все клапаны, применив эту систему несколько раз, если изначально открыт

   а) один клапан;

   б) два клапана?

   В случае утвердительного ответа показать, каким образом следует действовать; отрицательный ответ обосновать.

LII Олимпиада по математике учащихся Эстонии

РЕГИОНАЛЬНЫЙ ТУР

15 января 2005 г.

IX класс

II часть: Время, отводимое для решения: 4 часа.
Решения задач написать на отдельном листе.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи дает 7 баллов. Написать только ответ недостаточно!
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Малыш и Карлсон были голодными, поэтому они вдвоём съели тефтельки Фрекен Бок. После этого они оба стали сытыми. Известно, что сытый Малыш тяжелее голодного Карлсона, а сытый Карлсон ровно в два раза тяжелее голодного Малыша. Чей вес больше, голодного Малыша или тефтелек Фрекен Бок?

2. Вика выбрала некоторое трёхзначное число и записала все 23 остатка, которые образуются при делении этого числа на $8, 9, \ldots, 30$. Возможно ли, что среди этих остатков остаток 7 встречается

   а) по меньшей мере 8 раз;

   б) по меньшей мере 10 раз?

3. На плоскости строится две окружности, и из центра каждой окружности проводится касательная к другой окружности. Доказать, что если равны длины отрезков, соединяющих центр одной окружности и точку касания другой, то равны и радиусы окружностей.

4. Даны 2005 целых чисел. Волшебник Мерлин играет в следующую игру. Чтобы сделать ход, он выбирает некоторые 7 чисел и каждое выбранное число (независимо от других выбранных чисел) увеличивает на 1 или умножает на -1. Доказать, что при помощи конечного числа ходов Мерлин может превратить все 2005 чисел в нули.