Eesti koolinoorte LII matemaatikaolümpiaad

PIIRKONNAVOOR

15. jaanuar 2005

Lahendused ja vastused

7. klass, I osa

1. 0
2. $\dfrac{19}{24}$
3. 7
4. 8
5. 12 krooni 80 senti
6. 113°
7. 8,5
8. $\dfrac{3}{8}$
9. 36π cm^2
10. Ees 6, üleval 4, paremal 2

7. klass, II osa

1. *Vastus:* esimeses reas on 7 ja 8, teises reas 5 ja 1.

   Reas B asuva arvu esimene number peab olema 5, sest arvu 25 kordsed veerus C lõpevad kas 5-ga või 0-ga. Ainukesed arvud, mis algavad 5-ga ja võrduvad mingi algarvu kolmekordsega, on 51 ja 57. Et 7 ei saa olla ühegi arvu ruudu viimane number, siis asub reas B arv 51 ning veerus D ainuke kahekohaline 1-ga lõppev täisruut 81. Veerus C võib asuda arv 25 või arv 75, neist annab reas A kolmega jaguva arvu ainult 75.

2. *Vastus:* $24{,}5\,(\pi-1)$ cm^2.

   Poolringi pindala on $\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot 7^2 = 24{,}5\pi$ cm^2. Tõmmates kummagi kolmnurga tipust ristlõigu poolringi diameetrile, tekib neli võrdhaarset täisnurkset kolmnurka kaateti pikkusega 3,5 cm. Nende kolmnurkade kogupindala on $4\cdot\frac{3{,}5^2}{2} = \frac{7^2}{2} = 24{,}5$ cm^2. Värvitud osa pindala on poolringi ja kolmnurkade pindalade vahe ehk $24{,}5\pi - 24{,}5 = 24{,}5\,(\pi-1)$ cm^2.

3. *Vastus:* a) jah; b) ei.

   a) Kui Andre paneb esimesel päeval mündi esimesse ja teise karpi, teisel päeval teise ja kolmandasse karpi jne kuni viiendal päeval viiendasse ja esimesse karpi, siis on tal viie päevaga kogunenud igasse karpi 2 münti. Järgmise viie päevaga saab ta samamoodi lisada igasse karpi veel 2 münti.

Müntide kogumise strateegiat näitab järgmine tabel.

Päev	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
1. karp	1				1	1				1
2. karp	1	1				1	1			
3. karp		1	1				1	1		
4. karp			1	1				1	1	
5. karp				1	1				1	1

b) Et alguses oli müntide koguarv 0 ja iga päevaga suurenes see 2 võrra, siis oli müntide koguarv igal päeval paarisarv. Kui igas karbis oleks seitse münti, siis oleks münte kokku $5 \cdot 7 = 35$ ehk paaritu arv. Järelikult ei saa sellist olukorda esineda.

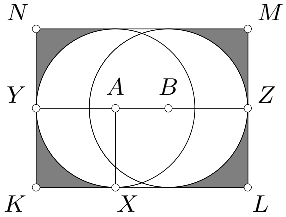
8. klass, I osa

1. $\frac{27}{8}$
2. $x^2 - y^2$
3. 4
4. 8
5. 32,5%
6. 32°
7. 10,5
8. $\frac{1}{2}$
9. 300°
10. Ees 1, üleval 4, paremal 5

8. klass, II osa

1. *Vastus:* esimeses reas on 6, 2, 5, teises 2, 4, 0 ja kolmandas 3, 1, 7.

   Et $2005 = 5 \cdot 401$, siis asub veerus D arv $401 + 222 = 623$. Rea A arv peab olema 5-ga lõppeva arvu ruut, neist on kolmekohalised ainult $15^2 = 225$ ja $25^2 = 625$, seega asub reas A arv 625. Rea B arv peab jaguma 30-ga ja algama numbriga 2, seega võimalused on 210, 240 ja 270. Neist sobib ainult 240, sest muidu oleks veerus E asuval arvul kaks numbrit, teine ja kolmas, paaritud. Rea C arvu kaks viimast numbrit peavad olema paaritud ja nende summa peab olema $11 - 3 = 8$. Variandid on 17, 35, 53 ja 71. Tingimus, et veeru E arv peab andma 4-ga jagades jäägi 1, välistab teise ja neljanda variandi ning tingimus, et veeru F arv peab jaguma 3-ga, välistab kolmanda variandi. Rea C arvuks sobib seega ainult 317.



Joonis 1

2. *Vastus:* $81\left(1-\dfrac{\pi}{4}\right)$ cm^2.

Lahendus 1. Olgu r kummagi ringjoone raadius ning A ja B ringjoonte keskpunktid (joonis 1). Külje KN pikkus on siis $2r$. Külje KL pikkus on aga

$$|KL| = r + \frac{|KN|}{3} + r = 2r + \frac{2r}{3} = 2r\left(1+\frac{1}{3}\right) = \frac{8r}{3}.$$

Et $|KL| = 12$ cm, siis saame võrrandi $\dfrac{8r}{3} = 12$, millest $r = 4{,}5$ cm. Vaatleme nüüd ruutu $KXAY$ küljepikkusega 4,5 cm. Selle pindala on $4{,}5^2$ cm^2, sektori AXY pindala aga $\dfrac{\pi \cdot 4{,}5^2}{4}$ cm^2. Värvitud osa KXY pindala on järelikult

$$4{,}5^2 - \frac{\pi \cdot 4{,}5^2}{4} = 4{,}5^2\left(1-\frac{\pi}{4}\right)\ \text{cm}^2.$$

Et üldse on värvitud neli niisugust osa, siis saame ristküliku värvitud ala kogupindalaks

$$4 \cdot 4{,}5^2\left(1-\frac{\pi}{4}\right) = 9^2\left(1-\frac{\pi}{4}\right) = 81\left(1-\frac{\pi}{4}\right)\ \text{cm}^2.$$

Lahendus 2. Lõik KL on lõigust KN pikem parajasti ringjoonte keskpunktide vahelise kauguse võrra, sest nihutades parempoolset ringjoont selle vahemaa võrra vasakule, katavad ringjooned teineteist ja ristkülik $KLMN$ teiseneb ruuduks. Järelikult

$$|KL| = |KN| + \frac{|KN|}{3} = \frac{4}{3}|KN|.$$

Et $|KL| = 12$ cm, siis $|KN| = \dfrac{3}{4} \cdot 12 = 9$ cm. Värvitud osade pindala leidmiseks tuleb nihutamisel tekkinud ruudu pindalast lahutada ringi pindala. Tulemus on

$$9^2 - \frac{\pi \cdot 9^2}{4} = 81\left(1-\frac{\pi}{4}\right)\ \text{cm}^2.$$

3. *Vastus:* a) ei; b) jah.

   a) Avatud klappide arv saab igal sammul muutuda ainult paarisarvu võrra, sest kui mingil sammul valitud neljast klapist on alguses a avatud, siis pärast on avatud $4-a$ klappi, seega nende arv muutub $4-a-a=4-2a$ võrra. Kui alguses on avatud üks klapp, siis jääb avatud klappide arv pärast iga sammu paarituks ega saa seetõttu võrduda 8-ga.

   b) Valime ühe avatud ja mingid kolm suletud klappi ning muudame nende nelja klapi asendi vastupidiseks. Pärast seda on basseinis neli klappi avatud ja neli suletud. Teise sammuga avame neli suletud klappi.

9. klass, I osa

1. 2003
2. y^3+x^3
3. 765 ja 234
4. 8
5. 13.30
6. 2 ja 4
7. 90°
8. 19
9. A: ruut, B: romb, C: rööpkülik, D: ristkülik
10. Ees 5, üleval 3, paremal 1

9. klass, II osa

1. *Vastus:* lihapallid kaalusid rohkem.

   Olgu k ja K vastavalt tühja ja täis kõhuga Karlssoni kaal, v ja V vastavalt tühja ja täis kõhuga Väikevenna kaal ning l lihapallide kaal. Et pärast lihapallide ärasöömist sai Karlssonil ja Väikevennal kõht täis, siis

$$K+V=k+v+l.$$

   Täis kõhuga Väikevend kaalub rohkem kui tühja kõhuga Karlsson, seega $V>k$. Seda arvestades on ülaltoodud võrduse kehtivuseks vajalik, et

$$K<v+l.$$

   Samuti, täis kõhuga Karlsson kaalub kaks korda rohkem kui tühja kõhuga Väikevend ehk $K=2v$. Asetades selle viimasesse võrratusse ja koondades mõlemalt poolelt suuruse v, saame

$$v<l.$$

   Järelikult kaalusid lihapallid rohkem kui tühja kõhuga Väikevend.

2. *Vastus:* a) jah; b) jah.

   a) Paneme tähele, et arv

$$240 = 8 \cdot 30 = 10 \cdot 24 = 12 \cdot 20 = 15 \cdot 16$$

   jagub arvudega 8, 10, 12, 15, 16, 20, 24 ja 30. Seega annab arv 247 kõigi nende arvudega jagades jäägi 7.

   b) Paneme tähele, et arv

$$\begin{aligned} 720 = 8 \cdot 90 = 9 \cdot 80 = 10 \cdot 72 = 12 \cdot 60 = \\ = 15 \cdot 48 = 16 \cdot 45 = 18 \cdot 40 = 20 \cdot 36 = 24 \cdot 30 \end{aligned}$$

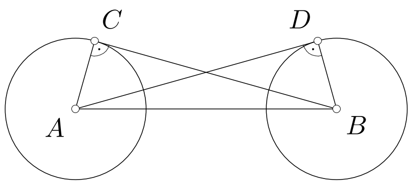
   jagub arvudega 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 24 ja 30. Seega annab arv 727 kõigi nende arvudega jagades jäägi 7.

   Märkus. Lahendusest nähtub, et arvud 247 ja 727 annavad vastavalt täpselt 8 ja täpselt 10 jääki 7.

   Järgnevas tabelis on kirjas kõik arvud, mis sobivad ülesande a)-osa lahendusse. Neist 727 ja 847 sobivad ühtlasi ka b)-osa lahendusse.

Arv:	247	367	427	487	511	547	607	727	847	907	967
Jääkide 7 arv:	8	9	8	8	8	8	8	10	10	8	8

3. Olgu A ja B antud ringjoonte keskpunktid ning C ja D neid ringjooni puutuvate sirgete puutepunktid (joonis 2). Siis $\angle ACB = 90°$ ja $\angle BDA = 90°$. Ülesande tingimuste põhjal $|BC| = |AD|$. Seega on ACB ja BDA täisnurksed kolmnurgad, mille hüpotenuusid langevad kokku ja vastavad kaatetid on võrdsed. Järelikult on võrdsed ka nende kolmnurkade teised kaatetid ehk $|AC| = |BD|$.



Joonis 2

4. *Lahendus 1.* Vaatleme kõigi arvude absoluutväärtuste summat. Näitame, et Merlin saab seda summat vähendada 1 võrra. Kui antud 2005 arvu hulgas leidub vähemalt üks negatiivne, siis valime välja selle ja veel mingid 6 arvu; esimesele arvule liidame ühe ja ülejäänud 6 arvu korrutame (-1)-ga, millega absoluutväärtuste summa väheneb 1 võrra. Kui antud 2005 arvu

hulgas ei leidu negatiivseid, aga leidub vähemalt üks positiivne, siis valime välja ühe positiivse arvu ja veel mingid 6 arvu ning korrutame kõiki arve (-1)-ga; seejärel teeme eelnevas kirjeldatud sammu. Niisuguste operatsioonidega saame arvude absoluutväärtuste summat vähendada juhul, kui arvude hulgas leidub nullist erinevaid arve. Kui absoluutväärtuste summa on kahanenud nullini, siis on ka kõik antud arvud muutunud nullideks.

Lahendus 2. Näitame, et Merlin saab vähendada suvalise arvu erinevust nullist 1 võrra, jättes kõik ülejäänud arvud samaks. Olgu a vaadeldav arv. Valime veel mingid 6 arvu. Kui $a > 0$, siis korrutame teda esmalt (-1)-ga ja seejärel liidame talle $2a-1$ korda arvu 1, ülejäänud 6 arvu korrutame igal käigul (-1)-ga. Nii asendub arv a arvuga $-a+(2a-1) = a-1$, ülejäänud 6 arvu jäävad samaks, sest neid korrutatakse $2a$ korda arvuga -1. Kui $a < 0$, siis liidame talle $2(-a)-1$ korda arvu 1 ja lõpuks korrutame teda (-1)-ga, ülejäänud 6 arvu korrutame igal käigul (-1)-ga. Siis asendub arv a arvuga $-(a+2(-a)-1) = a+1$, ülejäänud 6 arvu jäävad jällegi samaks. Niiviisi positiivseid arve vähendades ja negatiivseid arve suurendades saab Merlin kõik nullist erinevad arvud järk-järgult nullideks muuta.

Lahendus 3. Näitame kõigepealt, et nelja käiguga saab Merlin suurendada suvalist ühte ja vähendada suvalist teist arvu 1 võrra, jättes kõik teised arvud samaks. Olgu a suurendatav arv ja b vähendatav arv. Valime veel mingid 6 arvu $c_1, \ldots, c_6$ ning teisendame arve järgmiselt (valides esimesel käigul arvud $a, c_1, \ldots, c_6$ ja ülejäänud kolmel käigul arvud $c_1, \ldots, c_6, b$):

$$\begin{array}{ccccccccc}
a & & a+1 & & & & & & \\
c_1 & & -c_1 & & c_1 & & -c_1 & & c_1 \\
\vdots & \to & \vdots & \to & \vdots & \to & \vdots & \to & \vdots \\
c_6 & & -c_6 & & c_6 & & -c_6 & & c_6 \\
 & & b & & -b & & -b+1 & & b-1
\end{array}$$

Fikseerime nüüd ühe suvalise arvu a. Valides järgnevalt mingi arvu $b > 0$ (kui selliseid on), saab Merlin ülalkirjeldatud viisil vähendada arvu b järk-järgult nullini, nii et arv a vastavalt suureneb ja ülejäänud arvud ei muutu. Nii saab ta teha järjest nullideks kõik algselt positiivsed arvud peale arvu a. Valides seejärel mingi arvu $b < 0$ (kui selliseid on), saab Merlin samal viisil suurendada arvu b järk-järgult nullini, nii et arv a vastavalt väheneb ja ülejäänud arvud ei muutu. Nii saab ta teha järjest nullideks kõik algselt negatiivsed arvud peale arvu a. Seega on nüüd kõik arvud peale a muudetud nullideks. Kui $a > 0$, siis valime talle 6 kaaslast ja korrutame kõiki arve (-1)-ga. Ainukese nullist erineva negatiivse arvu aga saame nulliks muuta operatsioonidega, kus vaadeldavale arvule liidame 1, mingit 6 nulliga võrduvat arvu aga korrutame (-1)-ga.

10. klass

1. *Vastus:* $\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ on ainus selline arv.

   Lahendus 1. Otsitavad arvud on parajasti võrrandi $\sqrt{x} = x - 1$ lahendid. Tõstes selle võrrandi pooled ruutu, saame $x = (x-1)^2$ ehk $x^2 - 3x + 1 = 0$. Tekkinud ruutvõrrandi lahendid on $x_1 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ ja $x_2 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$. Lahend x_1 rahuldab esialgset võrrandit, sest $x_1 > 0$ ja $x_1 - 1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} > 0$, lahend x_2 aga ei rahulda, sest arv $x_2 - 1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ ei saa olla ruutjuure väärtuseks.

   Lahendus 2. Ülesande tingimustest saadud võrrandis $\sqrt{x} = x - 1$ teeme muutujavahetuse $\sqrt{x} = y$. Saame võrrandi $y = y^2 - 1$ ehk $y^2 - y - 1 = 0$, mille lahendid on $y_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ ja $y_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Et arvu ruutjuur ei saa olla negatiivne, siis esimene lahend ei sobi. Järelikult $\sqrt{x} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, millest $x = \dfrac{1^2 + 2\sqrt{5} + 5}{4} = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

2. *Vastus:* 0.

   Teisendame antud avaldist:

$$
\begin{aligned}
2 \cdot (a+b)^{-1} + (a+c)^{-1} - 3 \cdot (b+c)^{-1} &= \\
&= \frac{2}{a+b} + \frac{1}{a+c} - \frac{3}{b+c} = \\
&= \frac{2(a+c)(b+c) + (a+b)(b+c) - 3(a+b)(a+c)}{(a+b)(a+c)(b+c)} = \\
&= \frac{2c^2 + b^2 - 3a^2}{(a+b)(a+c)(b+c)} = 0.
\end{aligned}
$$

3. *Vastus:* n^2 senti.

   Lahendus 1. Igas faasis põleb niisama palju tähti, kui palju temast poole tsükli (st n faasi) kaugusele jäävas faasis on kustunud. Seega jagunevad faasid n paariks, milles põlevad vastavalt 0 ja n, 1 ja $n-1$, …, $n-1$ ja 1 tähte, st põlevate tähtede koguarv igas vaadeldavas faaside paaris on n. Et paare on n ja igas paaris põleb n tähte, siis ühtekokku põlevad tähed tsükli jooksul n^2 sekundit.

   Lahendus 2. Põlevate tähtede arvud faaside kaupa on 0, 1, …, n, $n-1$, …, 1. Et ühe tähe põlemine ühe faasi kestel maksab ühe sendi, siis võrdub reklaami töötsükli hind nende arvude summaga sentides. Aritmeetilise jada summa valemi kohaselt

$$(0+1+\ldots+n)+(n-1+\ldots+1)=\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n(n-1)}{2}.$$

Viies murrud ühisele nimetajale ja võttes ühise teguri n sulgude ette, saame

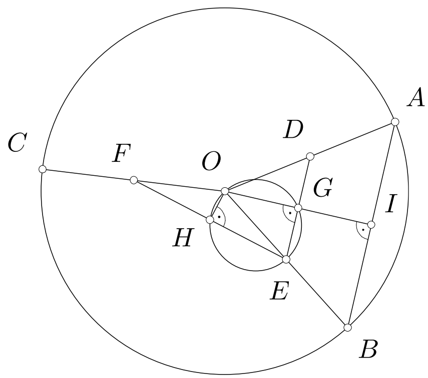
$$\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n\cdot 2n}{2}=n^2.$$

4. *Vastus:* a) sobib näiteks arv 738738738; b) sobib näiteks arv 738649116.

   a) Arv 738 ilmselt rahuldab nõutud jaguvuse tingimusi. Sobiva 9-kohalise ainult numbritest 7, 3 ja 8 koosneva arvu saame, kui kirjutame arvu 738 kolm korda järjest – kõigi numbrite 7 kustutamisel saame siis $383838 = 10101 \cdot 38$, kõigi numbrite 3 kustutamisel $787878 = 10101 \cdot 78$ ning kõigi numbrite 8 kustutamisel $737373 = 10101 \cdot 73$.

   b) Piisab leida arvude 73, 38 ja 78 selline ühiskordne $\overline{uvwxyz}$, mis ei sisalda numbreid 7, 3, 8 ega 0. Siis on arv $738\overline{uvwxyz}$ nõutava omadusega: numbri 7 kustutamisel saame arvu $38\overline{uvwxyz}$, numbri 3 kustutamisel arvu $78\overline{uvwxyz}$ ning numbri 8 kustutamisel arvu $73\overline{uvwxyz}$, mis jaguvad vastavalt 38-ga, 78-ga ja 73-ga. Arvu $\text{VÜK}(73, 38, 78) = 108186$ kordseid läbi proovides leiame, et arvuks $\overline{uvwxyz}$ sobib $6 \cdot 108186 = 649116$.

   Märkus. On veel ainult üks arv, mis sobib selle ülesande a)-osa vastuseks, nimelt 378738378. Ülesande b)-osa rahuldab rohkem arve.



Joonis 3

5. *Lahendus 1.* Et $|OA| = |OB|$, siis ka $|OD| = |OE|$, seega on kolmnurk ODE võrdhaarne (joonis 3). Punkt G kui aluse DE keskpunkt on siis tipust O tõmmatud kõrguse aluspunkt ning $\angle OGE = 90^\circ$. See aga tähendab, et

punkt G asub ringjoonel diameetriga OE. Analoogiliselt saame, et punkt H asub ringjoonel diameetriga OE.

Lahendus 2. Olgu I lõigu AB keskpunkt. Siis on lõik OI võrdhaarse kolmnurga OAB tipust O tõmmatud kõrgus. Et OIB on täisnurkne kolmnurk hüpotenuusiga OB ja täisnurgaga tipu I juures, siis asub I ringjoonel diameetriga OB. Vähendades kolmnurga OIB lineaarmõõtmeid kaks korda, teiseneb ta kolmnurgaks OGE. Järelikult asub punkt G ringjoonel diameetriga OE. Sama kehtib punkti H kohta.

Märkus. Lahendusest võime järeldada, et kui punkt B on fikseeritud, punkt A aga teeb mööda ringjoont liikudes täisringi, siis kujundab punkt G ringjoone diameetriga OE.

6. *Vastus:* b) ei.

Lahendus 1. a) Valime klassist välja ühe poisi. Talle meeldivate tüdrukute hulgast valime ühe tüdruku, edasi sellele tüdrukule meeldivate poiste hulgast ühe poisi, siis järgmise tüdruku jne. Varem või hiljem peame mõne õpilase valima teist korda. Seega leidub õpilaste hulgas mingi poistest ja tüdrukutest koosnev tsükkel $P_1 \to T_1 \to P_2 \to T_2 \to \ldots \to P_k \to T_k \to P_1$, kus igale õpilasele meeldib talle järgnev õpilane. Kui tsükkel koosneb ainult kahest liikmest, siis on „õnnelik paar“ leitud. Vastasel korral rahuldavad P_1, T_1, P_2, T_2 ülesande tingimust, järelikult P_1-le meeldib T_2 ning me saame tsüklist ära jätta T_1 ja P_2. Järk-järgult tsüklit lühendades jõuame lõpuks kaheliikmelise tsüklini.

b) Klass võib koosneda neljast õpilasest, kes moodustavad kaks „õnnelikku paari“.

Lahendus 2. a) Kasutame induktsiooni õpilaste arvu järgi. Kui klassis on üks poiss ja üks tüdruk, siis vastavalt ülesande tingimustele meeldivad nad teineteisele. Vaatleme nüüd klassi, kus on $n+1$ õpilast. Eemaldame ühe õpilase – üldisust kitsendamata olgu see tüdruk. Kui järelejäänud n õpilase hulgas on ülesande tingimused täidetud, siis saame kasutada induktsiooni eeldust ja leida „õnneliku paari“. Samas võis aga juhtuda, et esialgses klassis leidus mõni poiss, kellele meeldis ainult väljajäetud tüdruk. Sel juhul eemaldame klassist ka kõik niisugused poisid. Kui nüüd allesjäänud õpilaste hulk rahuldab ülesande tingimusi, saame jälle kasutada induktsiooni eeldust, kui aga mitte, siis jätkame nende tüdrukute eemaldamisega, kes kaotasid poiste väljajätmisega kõik neile meeldivad poisid. Nii jätkates jõuame lõpuks kas induktsiooni eeldusi rahuldava hulgani või tühja hulgani. Esimesel juhul on ülesanne lahendatud. Teisel juhul järeldub ülesande „meeldivustingimusest” induktsiooniga, et esimesena välja jäetud tüdruk meeldib kõigile poistele. Kuna ka sellele tüdrukule peab mõni poiss meeldima, siis oleme jällegi leidnud „õnneliku paari“.

b) Kui klass jaguneb hulgaks „sõpruskondadeks“, millest igaühes leidub nii poisse kui ka tüdrukuid ning milles igale poisile meeldivad kõik tüdrukud ja igale tüdrukule kõik poisid, siis on ülesande tingimused täidetud, aga pole tüdrukut, kes meeldiks kõigile poistele.

11. klass

1. *Vastus:* $a = b = 1$.

   Kuna sirge $y = ax + b$ läbib punkti $(a;\, b+1)$ ja $(b-1;\, a)$, siis

$$a \cdot a + b = b + 1,$$
$$a \cdot (b-1) + b = a.$$

   Esimesest võrrandist saame $a^2 = 1$ ehk $a = \pm 1$. Kui $a = -1$, siis annab teine võrrand $-(b-1) + b = -1$, ehk $1 = -1$, vastuolu. Kui $a = 1$, siis annab teine võrrand $(b-1) + b = 1$ ehk $2b = 2$, kust $b = 1$.

2. *Vastus:* $450\ \text{cm}^2$.

   Kasutades kahekordse nurga siinuse valemit, saame

$$4\sin^4\alpha + \sin^2 2\alpha = 4\sin^4\alpha + 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha =$$
$$= 4\sin^2\alpha(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = 4\sin^2\alpha.$$

   Seega teiseneb ülesande esimene võrrand võrrandiks $4\sin^2\alpha = 2$ ehk $\sin^2\alpha = \frac{1}{2}$. Et α on kolmnurga nurk, siis $\sin\alpha > 0$ ning seega $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, kust $\alpha = 45^\circ$ või $\alpha = 135^\circ$.

   Ülesande teise võrrandi kirjutame kahekordse nurga koosinuse valemi abil kujul $\cos 2\beta = 0$, millest $2\beta = 90^\circ$ või $2\beta = 270^\circ$ ehk $\beta = 45^\circ$ või $\beta = 135^\circ$. Et α ja β on ühe ja sama kolmnurga kaks nurka, siis $\alpha + \beta < 180^\circ$, mistõttu ainsa võimalusena saame, et $\alpha = \beta = 45^\circ$. Niisiis on ABC võrdhaarne täisnurkne kolmnurk kaateti pikkusega 30 cm. Sellise kolmnurga pindala on $\frac{30 \cdot 30}{2} = 450\ \text{cm}^2$.

3. *Lahendus 1.* Olgu Jukul 2001. aastal K kahte ja V viit, siis 2002., 2003. ja 2004. aastal oli tal vastavalt $\frac{4}{5}K$, $\frac{4^2}{5^2}K$ ja $\frac{4^3}{5^3}K$ kahte ning vastavalt $\frac{4}{3}V$, $\frac{4^2}{3^2}V$ ja $\frac{4^3}{3^3}V$ viit. Et need kõik peavad olema täisarvud, siis peab K jaguma arvuga $5^3 = 125$ (sest $\text{SÜT}\,(4,5) = 1$) ning V peab jaguma arvuga $3^3 = 27$ (sest $\text{SÜT}\,(4,3) = 1$).

Et Juku ei saanud aastas üle 300 hinde, siis K ei saa olla suurem kui $2 \cdot 125 = 250$. Kui aga oleks $K = 250$, siis saanuks Juku 2003. aastal $\frac{4^2}{5^2}K = 160$ kahte ja rohkem kui 160 viit, ehk kokku ikkagi üle 300 hinde. Seega $K = 125$ ning Juku kahtede arvud 2002., 2003. ja 2004. aastal olid vastavalt $\frac{4}{5} \cdot 125 = 100$, $\frac{4}{5} \cdot 100 = 80$ ja $\frac{4}{5} \cdot 80 = 64$. Et viite arv ületaks kahtede arvu esmakordselt 2003. aastal, peab olema $\frac{4}{3}V \leqslant 100$ ja $\frac{4^2}{3^2}V > 80$, ehk $V \leqslant 75$ ja $V > 45$. Arvestades, et V peab jaguma 27-ga, leiame siit ainsa võimalusena $V = 54$, kust viite arv 2004. aastal on $\frac{4^3}{3^3} \cdot 54 = 128$ ehk täpselt kaks korda suurem kahtede arvust samal aastal.

Lahendus 2. Olgu Jukul 2004. aastal K kahte ja V viit. Siis 2003., 2002. ja 2001. aastal oli tal vastavalt $\frac{5}{4}K$, $\frac{5^2}{4^2}K$ ja $\frac{5^3}{4^3}K$ kahte ning vastavalt $\frac{3}{4}V$, $\frac{3^2}{4^2}V$ ja $\frac{3^3}{4^3}V$ viit. Et need arvud oleksid kõik täisarvud, peavad K ja V jaguma arvuga $4^3 = 64$. Arvestades, et Juku ei saanud ühelgi aastal üle 300 hinde, tulevad K ja V väärtustena kõne alla ainult 64, 128, 196 (väärtus 0 ei sobi, sest siis ei saaks kahtede ülekaal muutuda viite ülekaaluks; väärtused 256 ja suuremad samuti ei sobi, sest $256+64 > 300$). Tingimusest, et 2003. aastal oli Jukul viisi kahtedest rohkem, saame $\frac{3}{4}V > \frac{5}{4}K$ ehk $\frac{V}{K} > \frac{5}{3}$. Tingimusest, et 2002. aastal oli Jukul viisi ülimalt sama palju kui kahtesid, saame $\frac{3^2}{4^2}V \leqslant \frac{5^2}{4^2}K$ ehk $\frac{V}{K} \leqslant \frac{5^2}{3^2}$. Seega peab $\frac{V}{K}$ rahuldama võrratusi

$$\frac{5}{3} < \frac{V}{K} \leqslant \frac{25}{9}.$$

Et $V > K$, siis võivad suhte $\frac{V}{K}$ väärtused olla $\frac{2}{1}$, $\frac{3}{1}$ ja $\frac{3}{2}$, neist rahuldab võrratusi ainult esimene.

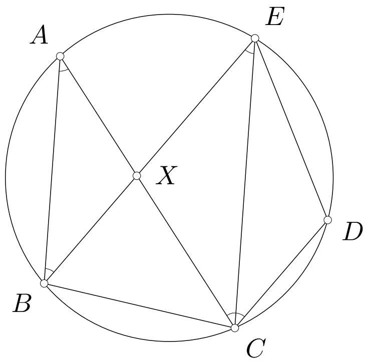
4. Avades sulud ja koondades mõlemalt poolt liikme -5, saame

$$ab - 5b + a = n.$$

Et ab, a ja n jaguvad a-ga, siis peab ka $5b$ jaguma a-ga. Teisalt, et ab, $5b$ ja n jaguvad b-ga, siis peab ka a jaguma b-ga. Olgu $5b = ka$ ja $a = lb$, kus vastavalt ülesande tingimusele $l \neq 1$. Siis $5b = klb$ ehk $5 = kl$. Ainsa võimalusena saame siit $l = 5$, st $a = 5b$. Nüüd

$$5n = 5 \cdot (ab - 5b + a) = 5 \cdot (5b^2 - 5b + 5b) = 25b^2 = (5b)^2.$$

Märkus. Lahendusest nähtub, et ülesande tingimusi rahuldab lõpmata palju arve, kõik nad on määratud valemiga $n = 5m^2$, kus m on positiivne täisarv. Ülesandes nimetatud tegurid on $a = 5m$ ja $b = m$.



Joonis 4

5. Et $|XA| = |XB|$, siis $\angle CAB = \angle EBA$ (joonis 4). Nüüd

$$\angle DCE = \angle ECA = \angle EBA = \angle CAB = \angle CEB.$$

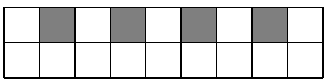
Järelikult on sirged CD ja BE paralleelsed. Et nurgad DCE ja CEB on võrdsed, siis toetuvad nad sama pikkusega kaartele, mistõttu $|CB| = |DE|$.

6. *Vastus:* Ats.

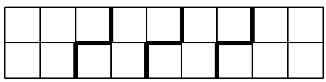
Värvime ruudustiku nii, nagu näidatud joonisel 5. Värvitud ruute on kokku $\frac{2005-1}{2} = 1002$. Et Pets saab lõigata ainult neljaruudulisi rombikujulisi tükke, siis peab iga tema tükk sisaldama parajasti ühte värvitud ruutu. Kui Ats valib oma tükke samuti ainult värvitud ruutude seast, siis lõpeb mäng täpselt 1002 käigu pärast. Pets saab selle ajaga 501 rombikujulist tükki ehk $4 \cdot 501 = 2004$ tükki šokolaadi. Ats saab aga kõik ülejäänud tükid, mida on $2 \cdot 2005 - 2004 = 2006$.

Märkus 1. Lahenduses ei kasutata fakti, et Ats alustab. Ats võidaks ka siis, kui alustaja oleks Pets. Samuti nähtub lahendusest, et Ats võidaks isegi juhul, kui lubada Petsil kujundit kirjeldavat joonist peegeldada.

Märkus 2. On võimalik tõestada, et Pets saab endale garanteerida vähemalt 2004 tükki. Jagame šokolaadi osadeks nii, nagu näidatud joonisel 6. Nii tekib 1002 osa. Kui Pets valib igal käigul tüki, mis mahub tervenisti ühe osa sisse, siis saab ta valida vähemalt 501 tükki, sest Ats suudab oma käiguga maksimaalselt ühe osa Petsile sobimatuks muuta.



Joonis 5



Joonis 6

12. klass

1. *Vastus:* $-\frac{1}{7}$.

Lahendus 1. Olgu vaadeldava jada üldliige $a_n = a_1 + (n-1)d$, siis

$$a_1 + \ldots + a_5 = 5a_1 + (1+2+3+4)\cdot d = 5a_1 + 10d$$

ning $a_6 = a_1 + 5d$. Niisiis $5a_1 + 10d = a_1 + 5d$, ehk $4a_1 + 5d = 0$, kust $d = -\frac{4}{5}a_1$. Nüüd $a_{11} = a_1 + 10d = a_1 - \frac{40}{5}a_1 = -7a_1$, kust $a_1 = -\frac{1}{7}a_{11} = -\frac{1}{7}$.

Lahendus 2. Aritmeetilise jada summa valemi abil saame $\frac{a_1+a_5}{2}\cdot 5 = a_6$ ehk

$$5a_1 + 5a_5 = 2a_6.$$

Võrdusest $a_5 - a_1 = \frac{4}{5}(a_6 - a_1)$ avaldame $5a_5 = 4a_6 + a_1$. Asetades tulemuse eelmisse võrdusse, saame

$$6a_1 + 2a_6 = 0.$$

Et $a_6 - a_1 = a_{11} - a_6$, siis

$$a_1 = 2a_6 - a_{11} = -6a_1 - 1,$$

kust $7a_1 = -1$ ja $a_1 = -\frac{1}{7}$.

2. *Vastus:* $a = \frac{1}{3}$, $b = -\frac{5}{9}$ on ainus selline arvupaar.

Lahendus 1. Funktsiooni $y = x^3 + ax^2 + bx + 1$ tuletis on

$$y' = 3x^2 + 2ax + b = 3\cdot\left(x^2 + \frac{2a}{3}x + \frac{b}{3}\right).$$

Vastavalt ülesande tingimusele on selle nullkohtadeks, ehk teisisõnu ruutvõrrandi $x^2 + \frac{2a}{3}x + \frac{b}{3} = 0$ lahenditeks, parajasti a ja b. Viete'i valemitest saame $a + b = -\frac{2a}{3}$ ja $ab = \frac{b}{3}$. Kui siin $b = 0$, siis esimesest võrdusest saame, et ka $a = 0$, mis on vastuolus ülesande tingimusega. Seega $b \neq 0$ ning $a = \frac{1}{3}$. Esimene võrdus omandab nüüd kuju $\frac{1}{3} + b = -\frac{2}{9}$, kust $b = -\frac{5}{9}$.

Lahendus 2. Et a ja b on tuletise $y' = 3x^2 + 2ax + b$ nullkohad, siis peavad nad rahuldama võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} 3a^2 + 2a^2 + b = 0 \\ 3b^2 + 2ab + b = 0. \end{cases}$$

Esimesest võrrandist leiame $b = -5a^2$. Asetades selle teise võrrandisse, saame $75a^4 - 10a^3 - 5a^2 = 0$. Kui oleks $a = 0$, siis oleks ka $b = 0$, mis ei sobi ülesande tingimustega. Seega võime viimase võrrandi pooli jagada arvuga $5a^2$, millega tekib ruutvõrrand $15a^2 - 2a - 1 = 0$. Selle lahendid on $a = -\frac{1}{5}$ ja $a = \frac{1}{3}$. Esimesel juhul saame $b = -\frac{1}{5}$, teisel juhul aga $b = -\frac{5}{9}$. Et a ja b peavad olema erinevad, siis sobib ainult teine võimalus.

3. *Vastus:* 103.

Eeldame, et pärast esimest veerandit oli gümnaasiumis a viielist, b neljalist ja c kolmelist õpilast. Pärast teist veerandit oli viielisi õpilasi $\frac{17}{20}a$, neljalisi õpilasi $\frac{3}{20}a + \frac{4}{5}b$ ning kolmelisi õpilasi $\frac{b}{5} + c - 1$. Ülesande tingimuste põhjal on need kolm arvu võrdsed. Võrdusest $\frac{17}{20}a = \frac{3}{20}a + \frac{4}{5}b$ leiame

$$b = \frac{5}{4}\left(\frac{17}{20}a - \frac{3}{20}a\right) = \frac{5}{4} \cdot \frac{14}{20}a = \frac{7}{8}a.$$

Võrdusest $\frac{17}{20}a = \frac{b}{5} + c - 1$ saame

$$c = \frac{17}{20}a - \frac{b}{5} + 1 = \frac{17}{20}a - \frac{7}{40}a + 1 = \frac{27}{40}a + 1.$$

Et c on täisarv, siis peab a jaguma 40-ga, st $a = 40n$, kus n on täisarv. Ka kõik teised õpilaste arvud tulevad sel juhul täisarvud. Kokku on gümnaasiumis õpilasi

$$a + b + c = a + \frac{7}{8}a + \frac{27}{40}a + 1 = \frac{102}{40}a + 1 = 102n + 1.$$

Juht $n = 0$ ei sobi, sest pärast esimest veerandit leidus nii viielisi kui ka neljalisi õpilasi. Vähima õpilaste arvu annab seega $n = 1$, mille korral on gümnaasiumis $102 + 1 = 103$ õpilast.

4. Avades sulud, saame

$$ab - 2b + a - 2 = n.$$

Et ab, a ja n jaguvad a-ga, siis peab $2b + 2$ jaguma a-ga. Teisalt, et ab, $2b$ ja n jaguvad b-ga, siis peab ka $a - 2$ jaguma b-ga. Järelikult $2b + 2 = ka$ ja $a - 2 = lb$, kus k ja l on positiivsed täisarvud (l on positiivne, sest $a - 2$ on ülesande tingimuste põhjal arvu n tegur ja positiivne). Avaldades teisest võrdusest a ja asetades esimesse, saame $2b + 2 = klb + 2k$. Kui oleks $k = l = 1$, siis kehtiks $2b + 2 = b + 2$ ehk $b = 0$, mis pole võimalik, sest b on arvu n tegur. Seega $kl \geqslant 2$. Et $klb \geqslant 2b$ ja $2k \geqslant 2$, siis annab saadud võrdus ainsa võimalusena $k = 1$, $l = 2$ ehk $a = 2b + 2$. Nüüd

$$2n + 1 = 2 \cdot (ab - 2b + a - 2) + 1 =$$

$$= 2 \cdot \big((2b+2)b - 2b + 2b + 2 - 2\big) + 1 =$$
$$= 4b^2 + 4b + 1 = (2b+1)^2.$$

Märkus. Lahendusest nähtub, et ülesande tingimusi rahuldab lõpmata palju arve, kõik nad on määratud valemiga $n = 2m(m+1)$, kus m on positiivne täisarv. Ülesandes nimetatud tegurid on $a = 2m + 2$ ja $b = m$.

5. *Lahendus 1.* Nelinurk $AEDF$ on romb (joonis 7), sest tema vastasküljed on paralleelsed ning diagonaal AD poolitab nurga EAF. Et kolmnurgad ECD ja FDB on sarnased paralleelsete külgede tõttu, siis

$$\frac{|EC|}{|FD|} = \frac{|CD|}{|DB|}$$

ning

$$\frac{|ED|}{|FB|} = \frac{|CD|}{|DB|}.$$

Korrutades need võrdused pooliti ja arvestades, et $|ED| = |FD|$, saamegi vajaliku tulemuse.

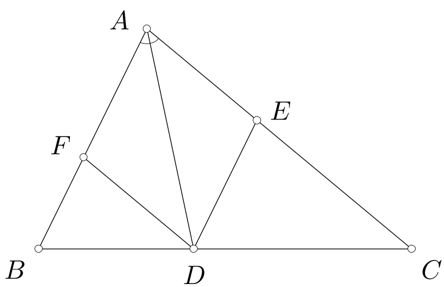
Lahendus 2. Nurgapoolitaja omaduse põhjal

$$\frac{|BD|}{|CD|} = \frac{|AB|}{|AC|}.$$

Et kolmnurk ABC on sarnane kolmnurgaga FBD, siis $|AB| = \dfrac{|FB|}{|BD|} \cdot |BC|$. Analoogiliselt leiame $|AC| = \dfrac{|EC|}{|CD|} \cdot |BC|$. Asendades viimased kaks avaldist esimesse võrdusesse, saame

$$\frac{|BD|}{|CD|} = \frac{|FB|}{|BD|} \cdot \frac{|CD|}{|EC|},$$

millest järeldub otsitav võrdus.



Joonis 7

6. *Vastus.* 7.

Olgu x vajalike erisümbolite arv. Vana reegli kohaselt oli Buratinol parooli valimiseks 30^5 võimalust, sest igaühte parooli 5 sümbolist võis ta valida 30 viisil. Uue reegli puhul on 5 võimalust valida positsioon, mitmendal esineb paroolis erisümbol, x võimalust valida see erisümbol ning 30^4 võimalust valida ülejäänud positsioonidele tähed, üldse seega $5x \cdot 30^4$ võimalust. Selleks, et uue reegli puhul oleks parooli valimiseks rohkem võimalusi, peab kehtima võrratus $5x \cdot 30^4 > 30^5$ ehk $5x > 30$, millest $x > 6$. Järelikult peab Buratino selgeks õppima vähemalt 7 erisümbolit.