LI Олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии

МАТЕМАТИКА, РЕГИОНАЛЬНЫЙ ТУР

7 февраля 2004 г.

X класс

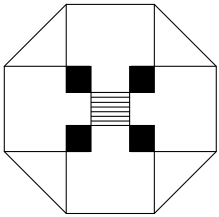
Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи дает 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Решить квадратное уравнение $x^2 + 2ax + \sqrt{a^2 + 27} = 0$, если известно, что сумма корней этого уравнения равна произведению этих же корней.

2. Пусть $a = \dfrac{xy}{x+y}$, $b = \dfrac{yz}{y+z}$ и $c = \dfrac{zx}{z+x}$, где x, y, z отличные от нуля действительные числа. Выразить x через числа a, b и c.

3. Найдется ли прямоугольный треугольник, длины сторон которого являются целыми числами и периметр которого равен
   а) 2003;
   б) 2004?

4. На четырех сторонах правильного восьмиугольника во внутренюю сторону построены квадраты, как показано на рисунке. При пересечении этих квадратов возникают пять меньших квадратов, средний из которых на рисунке заштрихован, а остальные четыре закрашены черным цветом. Найти отношение площади заштрихованного квадрата к общей площади черных квадратов.



5. Доказать, что для любого непрямоугольного треугольника ABC найдутся такие три окружности c_1, c_2 и c_3, что окружности c_2 и c_3 будут касаться друг друга в точке A, окружности c_3 и c_1 в точке B, а окружности c_1 и c_2 в точке C.

6. Начальник учреждения, Особо Важный Чиновник имеет n телефонов $(n \geqslant 2)$. Каждому чиновнику, имеющему $m \geqslant 2$ телефонов, непосредственно подчиняются два чиновника, у одного из которых $m-1$, а у другого $m-2$ телефонов, причем каждый чиновник, кроме Особо Важного Чиновника, имеет ровно одного непосредственного начальника.
   а) Найти общее число телефонов в учреждении в случае, если $n = 10$.
   б) Доказать, что для любого $1 \leqslant k < n$ число чиновников, имеющих k телефонов, равно общему числу чиновников, имеющих $k+1$ и $k+2$ телефонов.

LI Олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии

МАТЕМАТИКА, РЕГИОНАЛЬНЫЙ ТУР

7 февраля 2004 г.

XI класс

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи дает 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Пусть n натуральное число. Доказать, что числа $2^{n+6}+3^{n+6}+216(2^n+3^n)$ и $4^{n+6}+5^{n+6}+8000\,(4^n+5^n)$ имеют общий делитель, больший чем 1.

2. Длина наибольшей диагонали правильного n-угольника равна l. Найти площадь этого n-угольника.

3. Длины медиан, проведенных к катетам прямоугольного треугольника, равны $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$. Найти длину гипотенузы этого треугольника.

4. На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC берут соответственно точки D, E и F так, что $|BD|=\frac{1}{2}|BC|$, $|CE|=\frac{1}{3}|CA|$ и $|AF|=\frac{1}{6}|AB|$. Пусть K точка пересечения отрезков BE и CF, L точка пересечения отрезков CF и AD, а M точка пересечения отрезков AD и BE. Доказать, что площадь треугольника KLM равна сумме площадей треугольников AFL, BDM и CEK.

5. Найдутся ли пять положительных целых чисел таких, что у любых двух из них имеется общий делитель, больший чем 1, а никакие три из них не имеют общего делителя?

6. Каждая клетка клетчатой доски размера $m\times n$ $(m,n\geqslant 2)$ покрашена либо в черный, либо в белый цвет. Рядом с доской находится жук. Сначала жук ползет на какую-нибудь крайнюю клетку доски и изменяет ее цвет на противоположный. При каждом очередном шаге жук перемещается с клетки, на которой он находится, на какую-нибудь соседнюю с ней клетку (соседними считаются клетки, имеющие общее ребро) и изменяет ее цвет на противоположный. Наконец, достигнув в очередной раз какой-нибудь крайней клетки, жук уползает с доски. Может ли жук таким способом всегда, независимо от первоначальной раскраски доски, перекрасить все клетки в черный цвет?

LI Олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии

МАТЕМАТИКА, РЕГИОНАЛЬНЫЙ ТУР

7 февраля 2004 г.

XII класс

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи дает 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Пусть даны функции

$$f(x) = x^4 + (a^3+b^3)x^3 + (a^2+b^2)x^2 + (a+b)x + 2004\,,$$
$$g(x) = 4x^3 + 54x^2 + (2ab+12)x + 2003\,.$$

Найти одну такую пару действительных чисел (a, b), для которых g возрастает в областях, где график f вогнутый, и g убывает в областях, где график f выпуклый.

2. Круг разделен на четыре разных по величине сектора. Каждый сектор закрашивают одним из четырех имеющихся цветов. Сколькими различными способами возможно покрасить эти сектора так, чтобы каждые два соседних сектора были бы разного цвета (использовать все четыре цвета не обязательно)?

3. Изобразить в прямоугольной системе координат множество всех таких точек, координаты которых (x, y) удовлетворяют условию $|2x-1| + |2x+1| + 2|y| = 4$.

4. Теннисный клуб, имеюший четыре члена, желает выбрать для встречи с дружеским клубом двух своих лучших игроков (кто из этих двух игроков лучше, не существенно). Известно, что в клубе нет двух равных по уровню игроков и более сильный игрок всегда побеждает более слабого. Доказать, что для выявления двух лучших игроков достаточно провести четыре игры.

5. Окружности c_1, c_2 и c_3, центры которых соответственно A, B и C, попарно касаются друг друга снаружи, так что A' точка касания окружностей c_2 и c_3, B' точка касания окружностей c_3 и c_1 и C' точка касания окружностей c_1 и c_2. Найти величины внутренних углов треугольника $A'B'C'$, если величины внутренних углов треугольника ABC равны α, β и γ.

6. Назовем число M' *зеркальным числом* натурального числа M, не оканчивающегося на 0, если оно получено путем написания цифр числа M в противоположном порядке. Доказать, что найдется бесконечно много таких натуральных чисел M, не оканчивающихся на 0, которые не совпадают со своим зеркальным числом M' и для которых $M \cdot M'$ является квадратом некоторого целого числа.