Eesti koolinoorte LI täppisteaduste olümpiaad

MATEMAATIKA PIIRKONNAVOOR

7. veebruaril 2004. a.

X klass

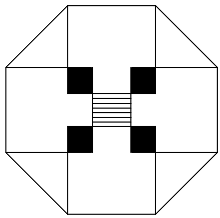
Lahendamiseks on aega 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Lahenda ruutvõrrand $x^2 + 2ax + \sqrt{a^2 + 27} = 0$, kui on teada, et selle võrrandi lahendite summa on võrdne lahendite korrutisega.

2. Olgu $a = \dfrac{xy}{x+y}$, $b = \dfrac{yz}{y+z}$ ja $c = \dfrac{zx}{z+x}$, kus x, y, z on nullist erinevad reaalarvud. Avalda x arvude a, b ja c kaudu.

3. Kas leidub täisnurkne kolmnurk, mille külgede pikkused on täisarvud ning mille ümbermõõt on
   a) 2003;
   b) 2004?

4. Korrapärase kaheksanurga neljale küljele kaheksanurga sisse konstrueeritakse ruudud nagu joonisel näidatud. Nende ruutude lõikumisel tekib viis väiksemat ruutu, millest keskmine on joonisel viirutatud ja neli ülejäänut värvitud mustaks. Leia viirutatud ruudu pindala ja mustade ruutude kogupindala suhe.



5. Tõesta, et mistahes mittetäisnurkse kolmnurga ABC korral leiduvad sellised kolm ringjoont c_1, c_2 ja c_3, et ringjooned c_2 ja c_3 puutuvad üksteist punktis A, ringjooned c_3 ja c_1 punktis B ning ringjooned c_1 ja c_2 punktis C.

6. Asutuse juht on Eriti Tähtis Ametnik, kellel on n telefoni ($n \geqslant 2$). Igale $m \geqslant 2$ telefoniga ametnikule alluvad vahetult kaks ametnikku, kellest ühel on $m-1$ ja teisel $m-2$ telefoni, kusjuures igal ametnikul peale Eriti Tähtsa Ametniku on täpselt üks vahetu ülemus.
   a) Leia telefonide koguarv asutuses juhul, kui $n = 10$.
   b) Tõesta, et iga $1 \leqslant k < n$ korral on k telefoniga ametnike arv asutuses võrdne $k+1$ ja $k+2$ telefoniga ametnike koguarvuga.

Eesti koolinoorte LI täppisteaduste olümpiaad

MATEMAATIKA PIIRKONNAVOOR

7. veebruaril 2004. a.

XI klass

Lahendamiseks on aega 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Olgu n naturaalarv. Tõesta, et arvudel $2^{n+6} + 3^{n+6} + 216(2^n + 3^n)$ ja $4^{n+6} + 5^{n+6} + 8000\,(4^n + 5^n)$ on 1-st suurem ühistegur.

2. Korrapärase n-nurga pikima diagonaali pikkus on l. Leia selle n-nurga pindala.

3. Täisnurkse kolmnurga kaatetitele tõmmatud mediaanide pikkused on $\sqrt{2}$ ja $\sqrt{3}$. Leia selle kolmnurga hüpotenuusi pikkus.

4. Kolmnurga ABC külgedel BC, CA ja AB valitakse vastavalt punktid D, E ja F nii, et $|BD| = \dfrac{1}{2}|BC|$, $|CE| = \dfrac{1}{3}|CA|$ ja $|AF| = \dfrac{1}{6}|AB|$. Olgu K lõikude BE ja CF lõikepunkt, L lõikude CF ja AD lõikepunkt ning M lõikude AD ja BE lõikepunkt. Tõesta, et kolmnurga KLM pindala on võrdne kolmnurkade AFL, BDM ja CEK pindalade summaga.

5. Kas leiduvad sellised viis positiivset täisarvu, millest mistahes kahel on olemas 1-st suurem ühistegur, mistahes kolm on aga ühisteguritta?

6. Mõõtmetega $m \times n$ ruudustiku ($m, n \geqslant 2$) iga ruut on värvitud kas valgeks või mustaks. Ruudustiku kõrval asub põrnikas. Algul ronib põrnikas mingile ruudustiku ääreruudule ja muudab selle värvi vastupidiseks. Igal järgmisel sammul liigub põrnikas ruudult, kus ta parajasti on, edasi mingile naaberruudule (naaberruutudeks loeme ühist serva omavaid ruute) ning muudab selle värvi vastupidiseks. Lõpuks, olles järjekordselt jõudnud mingile ääreruudule, roomab põrnikas ruudustikult minema. Kas põrnikas saab niiviisi alati, olenemata ruudustiku algsest värvimisest, kõik ruudud mustaks värvida?

Eesti koolinoorte LI täppisteaduste olümpiaad

MATEMAATIKA PIIRKONNAVOOR

7. veebruaril 2004. a.

XII klass

Lahendamiseks on aega 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Olgu antud funktsioonid

$$f(x) = x^4 + (a^3 + b^3)x^3 + (a^2 + b^2)x^2 + (a + b)x + 2004 ,$$
$$g(x) = 4x^3 + 54x^2 + (2ab + 12)x + 2003 .$$

Leia üks selline reaalarvude paar (a, b), mille korral g kasvab piirkondades, kus f graafik on nõgus, ning g kahaneb piirkondades, kus f graafik on kumer.

2. Ring on jaotatud neljaks erineva suurusega sektoriks. Iga sektor värvitakse ühega neljast kasutadaolevast värvist. Mitmel erineval viisil on võimalik need sektorid värvida nii, et iga kaks naabersektorit oleksid erinevat värvi (kõiki nelja värvi ei ole kohustuslik kasutada)?

3. Kujuta ristkoordinaadistikus kõigi nende punktide hulk, mille koordinaadid (x, y) rahuldavad tingimust $|2x - 1| + |2x + 1| + 2|y| = 4$.

4. Neljaliikmeline tenniseklubi soovib kohtumiseks oma sõprusklubiga välja valida klubi kaks parimat mängijat (nende omavaheline paremusvahekord pole oluline). On teada, et klubis ei ole kaht võrdse mängutasemega mängijat ning tugevam mängija võidab alati nõrgemat. Tõesta, et kahe parema mängija väljaselgitamiseks piisab neljast mängust.

5. Ringjooned c_1, c_2 ja c_3, mille keskpunktid on vastavalt A, B ja C, puutuvad üksteist paarikaupa väliselt, nii et ringjoonte c_2 ja c_3 puutepunkt on A', ringjoonte c_3 ja c_1 puutepunkt on B' ning ringjoonte c_1 ja c_2 puutepunkt on C'. Leia kolmnurga $A'B'C'$ sisenurkade suurused, kui kolmnurga ABC sisenurkade suurused on α, β ja γ.

6. Nimetame 0-ga mittelõppeva naturaalarvu M *peegelarvuks* arvu M', mis saadakse M numbrite kirjutamisel vastupidises järjekorras. Tõesta, et leidub lõpmata palju selliseid 0-ga mittelõppevaid naturaalarve M, mis ei lange kokku oma peegelarvuga M' ning mille korral $M \cdot M'$ on mingi täisarvu ruut.