Eesti koolinoorte LI täppisteaduste olümpiaad

MATEMAATIKA PIIRKONNAVOOR

7. veebruaril 2004. a.

Lahendused ja vastused

VII klass, I osa

1. 7. 2. 29. 3. 15. 4. 8. 5. 10. 6. $130°$. 7. $3\,\mathrm{cm}^2$. 8. $70°$. 9. 12. 10. 48.

VII klass, II osa

1. *Vastus:* ainus selline arv on 123.

Tähistades esialgu a küsimärkidega, moodustame korrutamistehte

$$\begin{array}{r}
?\,?\,?\cdot 7\,4\,8 \\ \hline
.\,.\,.\,. \\
.\,.\,.\,. \\
.\,.\,.\,. \\ \hline
.\,.\,.\,2\,0\,0\,4
\end{array}$$

Arvu a viimasel kohal peab olema number, mille korrutis 8-ga lõpeb numbriga 4. Sellised numbrid on 3 ja 8, kuid teine neist ei sobi, sest arv a peab olema paaritu. Niisiis lõpeb a numbriga 3 ja esimese punktiiri kohal on arv $3 \cdot 748 = 2244$. Arvu a teisel kohal peab olema selline number, mille korrutis 8-ga lõpeb numbriga 6, sest liites tulemusele arvu 2244 eelviimase numbri, peame saama 0-ga lõppeva arvu. Vajaliku omadusega on numbrid 2 ja 7 ning teise punktiiri kohal on siis vastavalt arv $2 \cdot 748 = 1496$ või $7 \cdot 748 = 5236$. Kui arvu a teisel kohal on 2, siis saame analoogilise arutlusega korrutise lõpust kolmanda numbri suhtes, et arvu a esimesele kohale võivad sobida numbrid 1 ja 6, seega $a = 123$ või $a = 623$. Kui arvu a teisel kohal on 7, siis võivad esimesele kohale sobida numbrid 3 ja 8, millega leiame veel kaks kandidaati $a = 373$ ja $a = 873$. Kuid neist neljast arvust annab ainult $a = 123$ korrutise, mille lõpust neljas number on 2.

2. *Vastus:* 43.

Rein vastas õigesti 80% testi 80 küsimusest, seega vastas ta õigesti $0{,}8 \cdot 80 = 64$ küsimusele. Nende hulgas oli algebraküsimusi $0{,}7 \cdot 30 = 21$. Järelikult vastas Rein õigesti $64 - 21 = 43$ geomeetriaküsimusele.

3. *Vastus:* $40 + \dfrac{80\pi}{3}$ kilomeetrit.

Lahendus 1. Kui sõita ühest linnast teise otse mööda välimist ringteed, siis läbitakse vahemaa $60 \cdot \dfrac{2\pi}{3} = 40\pi$ kilomeetrit. Kui aga sõita kõigepealt sisemisele ringteele, mööda selle kaart teise linna kohale ja tagasi välimisele ringteele, siis läbitakse vahemaa $20 + 40 \cdot \dfrac{2\pi}{3} + 20 = 40 + \dfrac{80\pi}{3}$ kilomeetrit. Esimese ja teise tee pikkuste vahe on $40\pi - 40 - \dfrac{80\pi}{3} = 40\dfrac{\pi}{3} - 40$ kilomeetrit. Et aga $\dfrac{\pi}{3} > 1$, siis on see vahe positiivne ehk esimene tee on pikem. On selge, et iga muu võimalik tee on pikem esimesest või teisest vaadeldud teest, seega on lühima tee pikkus $40 + \dfrac{80\pi}{3}$ kilomeetrit.

Lahendus 2. Ühest linnast teise sõiduks on kaks mõistlikku teed — mööda välimise ringtee 120° kaart või mööda sisemise ringtee 120° kaart ning kaht ringteid ühendavat teelõiku — kõik ülejäänud võimalikud teed on ilmselt pikemad kui üks neist kahest. Vaadeldavate kaarte pikkused on vastavalt $60 \cdot \dfrac{2\pi}{3} = 40\pi$ ja $40 \cdot \dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{80\pi}{3}$ ning nende vahe on $40\pi - \dfrac{80\pi}{3} = 40 \cdot \dfrac{\pi}{3}$ kilomeetrit. Kahe ringteid ühendava lõigu kogupikkus $2 \cdot 20 = 40$ kilomeetrit on sellest vahest väiksem (sest $\pi > 3$) ning vaadeldav liikumisvariant mööda sisemist ringteed on seega lühem.

VIII klass, I osa

1. 54. 2. 11. 3. 4. 4. 668. 5. 140%. 6. 65°. 7. 3. 8. 30°. 9. 8. 10. 48.

VIII klass, II osa

1. *Vastus:* 225 ja 625.

   Lahendus 1. Olgu a^2 otsitav kolmekohaline arv ja b^2 temast sajaliste numbri kustutamisel saadud kahekohaline arv. Seejuures $10 \leqslant a \leqslant 31$ ja $4 \leqslant b \leqslant 9$. Arv $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ peab jaguma 100-ga. Et arvud $a+b$ ja $a-b$ on sama paarsusega, siis on nad mõlemad paarisarvud. Samuti jaguvad mõlemad arvud 5-ga, sest kui jaguks ainult üks, siis peaks see arv jaguma 50-ga, mis pole võimalik a ja b suuruse tõttu. Seega $a+b$ ja $a-b$ jaguvad 10-ga ning ka nende summa $2a$ jagub 10-ga, mistõttu a jagub 5-ga. Kõne alla tulevad seega $a = 10$, $a = 15$, $a = 20$, $a = 25$ ja $a = 30$, kuid $10^2 = 100$, $20^2 = 400$ ja $30^2 = 900$ ei sobi, sest pärast sajaliste numbri kustutamist ei jää järele kahekohaline arv, $15^2 = 225$ ja $25^2 = 625$ aga sobivad.

   Lahendus 2. Kolmekohalised on parajasti arvude 10 kuni 31 ruudud. Arvutades need välja, saame 100, 121, 144, 169, 196, 225, 256, 289, 324, 361, 400, 441, 484, 529, 576, 625, 676, 729, 784, 841, 900, 961. Nendest arvudest jääb ainult 225 ja 625 puhul pärast sajaliste numbri kustutamist alles kahekohaline täisruut.

   Lahendus 3. Kahekohalised on parajasti arvude 4 kuni 9 ruudud: 16, 25, 36, 49, 64 ja 81. Vaadates läbi neile arvudele kõikvõimalike sajaliste numbrite lisamisel tekkivad kolmekohalised arvud, näeme, et täisruudud on neist ainult 225 ja 625.

2. *Vastus:* 30.

   Lahendus 1. Et tipu A juures asuv täisnurkne kolmnurk kaatetitega 3 ja 3 on võrdhaarne, siis on kõigi joonisel esinevate teravnurkade suurus 45°. Viirutatud ristküliku pindala saame, lahutades ristküliku $ABCD$ pindalast nelja võrdhaarse täisnurkse kolmnurga pindalad. Ristküliku $ABCD$ pindala on $8 \cdot 11 = 88$. Tippude A, B ja D juures asuvate võrdhaarsete täisnurksete kolmnurkade pindalad on vastavalt $\frac{3 \cdot 3}{2} = 4{,}5$, $\frac{5 \cdot 5}{2} = 12{,}5$ ja $\frac{8 \cdot 8}{2} = 32$. Neljandas kolmnurgas on hüpotenuusi pikkus $11 - 5 = 6$ ja hüpotenuusile tõmmatud kõrgus 3, mistõttu selle kolmnurga pindala on $\dfrac{6 \cdot 3}{2} = 9$. Seega saame viirutatud ristküliku pindalaks $88 - 4{,}5 - 12{,}5 - 32 - 9 = 30$.

Lahendus 2. Samuti nagu esimeses lahenduses paneme tähele, et kõigi joonisel esinevate teravnurkade suurus on $45°$. Seega on ka tipu B juures asuv täisnurkne kolmnurk võrdhaarne ning tema mõlema kaateti pikkus on $8 - 3 = 5$. Viirutatud ristküliku küljepikkused on seega $\sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$ ja $\sqrt{5^2 + 5^2} = 5\sqrt{2}$ ning selle ristküliku pindala on $3\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2} = 30$.

3. *Vastus:* 217.

Lahendus 1. Olgu Jüri korteri number n ning Mari korteri number (ja ühtlasi Jüri korruse number) m. Et m. korrusel asuvad korterid numbritega $10m - 9$ kuni $10m$, siis $10m - 9 \leqslant n \leqslant 10m$ ning $11m - 9 \leqslant n + m \leqslant 11m$. Et $n + m = 239$, saame siit Mari korteri numbri m jaoks võrratused $m \leqslant \dfrac{239 + 9}{11} = \dfrac{248}{11}$ ning $m \geqslant \dfrac{239}{11}$. Ainsa täisarvuna rahuldab neid võrratusi $m = 22$ ning Jüri korteri numbriks on siis $n = 239 - 22 = 217$.

Lahendus 2. Olgu Mari korteri number m, siis Jüri korter asub m. korrusel ning selle number on $10(m - 1) + k$, kus k on ühekohaline arv. Jüri ja Mari korterinumbrite summa on siis $10(m - 1) + k + m = 239$, kust $11m + k = 249$. On lihtne kontrollida, et ainus ühekohaline arv k, mille korral $249 - k$ jagub 11-ga, on $k = 7$. Siis $m = 22$ ning Jüri korteri numbriks saame $239 - 22 = 217$.

IX klass, I osa

1. 36. 2. 9. 3. $\dfrac{(ak + bm)x}{100}$ liitrit. 4. 1336. 5. 11. 6. $15°$. 7. 36 cm^2. 8. $160°$. 9. 6. 10. 48.

IX klass, II osa

1. *Vastus:* 108 sekundi jooksul.

Lahendus 1. Kui rong sõidab x kilomeetrit tunnis, siis ta läbib sekundis $x \cdot \frac{1000}{3600} = \frac{x}{3{,}6}$ meetrit ja y sekundi jooksul katab rong vahemaa $\frac{xy}{3{,}6}$ meetrit. See teelõik moodustab $\frac{xy}{3{,}6 \cdot 30} = \frac{xy}{108}$ rööpapikkust ning järelikult kuuleb Juku y sekundi jooksul $\frac{xy}{108}$ kolksu (eeldades, et ta alustab kuulamist mitte täpselt kolksu hetkel, vaid kahe kolksu vahepeal). Selleks, et kolksude arv võrduks rongi kiirusega kilomeetrites tunnis, peab kehtima võrdus $\frac{xy}{108} = x$, millest $y = 108$.

Lahendus 2. Olgu rongi kiirus x km/h, siis ühe tunni jooksul läbib rong x km ehk ületab $\frac{x \cdot 1000}{30}$ rööbast. Niisiis ületab rong x rööbast $\frac{30}{1000}$ tunni ehk $\frac{30 \cdot 3600}{1000} = 108$ sekundi jooksul — s.t. kui Juku kuulab kolkse 108 sekundi jooksul, siis on selle aja jooksul kuuldavate kolksude arv x võrdne rongi kiirusega km/h.

2. *Vastus:* 0, 1, 3, 5, 6 või 8.

Lahendus 1. Paneme kõigepealt tähele, et summa viimane number oleneb ainult liidetavate viimastest numbritest, seega võime arvude $1, 2, \ldots, n$ asemel liita nende viimased numbrid. Leiame summa $1 + 2 + \ldots + n$ viimased numbrid $n = 1, 2, \ldots, 10$ korral — need on vastavalt 1, 3, 6, 0, 5, 1, 8, 6, 5, 5. Et $1 + 2 + \ldots + 9 + 0 = 45$, siis vaadeldava summa viimased numbrid $n = 11, 12, \ldots, 20$ korral saame eespool loetletutest 5 liitmisel, s.t. need on vastavalt 6, 8, 1, 5, 0, 6, 3, 1, 0, 0, ning edasi hakkavad samad viimased numbrid 20 kaupa tsükliliselt korduma (sest summa $1 + 2 + \ldots + 9 + 0 + 1 + 2 + \ldots + 9 + 0$ lõpeb 0-ga). Järelikult saab vaadeldava summa viimane number olla 0, 1, 3, 5, 6 või 8 ning ei saa olla 2, 4, 7 ega 9.

Lahendus 2. Vaatleme summat $1 + 2 + \ldots + n$. Jätame igast liidetavast alles ainult üheliste numbri. Järelejäänud summast tõmbame maha kõik liidetavate paarid 1 ja 9, 2 ja 8, 3 ja 7 ning 4 ja 6. Alles jääb teatud arv liidetavaid 5 ja võib-olla veel arvud 1, 2, 3, 4. Seega on esimese n positiivse täisarvu summa viimane number sama mis arvu $5k$, $5k+1$, $5k+1+2$, $5k+1+2+3$ või $5k+1+2+3+4$ viimane number, kus k on täisarv. Esimest tüüpi arvud annavad viimaseks numbriks 0 või 5, teist tüüpi arvud 1 või 6, kolmandat tüüpi arvud 3 või 8, neljandat tüüpi arvud 6 või 1 ja viiendat tüüpi arvud 0 või 5.

Lahendus 3. Et $1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n \cdot (n+1)}{2}$, siis selle summa viimane number on pool arvu $n^2 + n$ jagamisel 20-ga tekkivast jäägist. Et arvule n mingi 20 kordse liitmine $n^2 + n$ jagamisel 20-ga tekkivat jääki ei muuda, siis piisab vaadelda n väärtusi 1, 2, $\ldots$, 20. Vastavad arvutused on esitatud järgmises tabelis:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$n^2 \pmod{100}$	1	4	9	16	25	36	49	64	81	0
$n^2 + n \pmod{20}$	2	6	12	0	10	2	16	12	10	10
$\dfrac{n^2+n}{2} \pmod{10}$	1	3	6	0	5	1	8	6	5	5

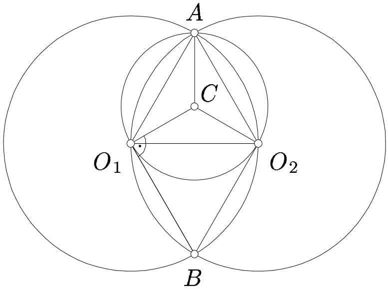
n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$n^2 \pmod{100}$	21	44	69	96	25	56	89	24	61	0
$n^2 + n \pmod{20}$	12	16	2	10	0	12	6	2	0	0
$\dfrac{n^2+n}{2} \pmod{10}$	6	8	1	5	0	6	3	1	0	0

Siit näeme, et arvu $\dfrac{n^2+n}{2}$ ehk summa $1+2+\ldots+n$ võimalikud viimased numbrid on 0, 1, 3, 5, 6 ja 8.

3. *Lahendus 1.* Kolmnurgad O_1O_2A ja O_1O_2B on võrdkülgsed (vt. joonist 1), sest nende kõik küljed on sama pikad kui ringjoonte ühine raadius O_1O_2. Olgu C kolmnurga O_1O_2A ümberringjoone keskpunkt. Kuna võrdkülgses kolmnurgas nurgapoolitajad ja külgede keskristsirged langevad kokku, siis lõik CO_1 poolitab kolmnurga O_1O_2A tipu O_1 juures oleva nurga, mistõttu $\angle CO_1O_2 = 30^\circ$. Seega

$$\angle CO_1B = \angle CO_1O_2 + \angle O_2O_1B = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ .$$

Näeme, et sirge O_1B ristub kolmnurga O_1O_2A ümberringjoone punktis O_1 selle ringjoone raadiusega CO_1, mis tähendabki, et O_1B puutub (punktis O_1) mainitud ringjoont.



Joonis 1

Lahendus 2. Samuti nagu esimeses lahenduses paneme tähele, et kolmnurgad O_1O_2A ja O_1O_2B on võrdkülgsed, mistõttu O_1BO_2A on romb ning sirge O_1B on paralleelne võrdkülgse kolmnurga O_1O_2A küljega O_2A. Et võrdkülgses kolmnurgas kõrgused ja külgede keskristsirged langevad kokku, siis kolmnurga O_1O_2A tipust O_1 küljele O_2A tõmmatud kõrgus läbib selle kolmnurga ümberringjoone keskpunkti ning sellega ristiolev sirge O_1B on järelikult ümberringjoone puutuja.

Lahendus 3. Nagu eelmistes lahendusteski paneme kõigepealt tähele, et kolmnurgad O_1O_2A ja O_1O_2B on võrdkülgsed. Siit $\angle O_2AO_1 = \angle O_2O_1B$. Vastavalt teoreemile puutuja ja kõõlu vahelisest nurgast on sirge O_1B kolmnurga O_1O_2A ümberringjoone puutuja.

4. *Vastus:* kui ruutude arv n avaldub kujul $n = 3k$ või $n = 3k + 2$, siis leidub võitev stateegia Maril; kui aga $n = 3k + 1$, siis Jüril.

Kui $n = 3k$ või $n = 3k+2$, siis liigutagu Maril esimesel käigul oma nuppu vastavalt kahe või ühe ruudu võrra edasi. Sellega saavutab Mari olukorra, kus ruutude arv, mis tal oma nupuga Jüri nupuni jõudmiseks tuleks astuda, jagub 3-ga. Edasi saab Mari kasutada järgmist strateegiat: kui Jüri käib oma nupuga ühe või kahe ruudu võrra Mari nupu poole, siis liigutab Mari oma nuppu vastavalt kahe või ühe ruudu võrra Jüri nupule vastu; kui aga Jüri käib ühe või kahe ruudu võrra Mari nupust eemale, siis liigutab Mari oma nuppu sama arvu ruutude võrra Jüri nupule järele. Pärast Jüri iga käiku on kaugus Mari ja Jüri nuppude vahel 3-ga mittejaguv arv, kuid pärast Mari iga vastust 3-ga jaguv arv. Et Mari nupp läheneb iga käiguga Jüri-poolsele lauaotsale ning Jüri nupp jääb alati Mari nupu ja selle lauaotsa vahele, siis saab nuppude kauguseks pärast Mari käiku varem või hiljem vähim 3-ga jaguv mittenegatiivne täisarv — null.

Kui $n = 3k + 1$, siis võidab Jüri, sest tal on ülalvaadeldud võiduseis: enne vastase (Mari) käiku on kaugus nuppude vahel 3-ga jaguv arv.

X klass

1. *Vastus:* $x = 3 \pm \sqrt{3}$.

Määrates antud ruutvõrrandi lahendite summa ja lahendite korrutise Viète'i valemite järgi, saame võrrandi $-2a = \sqrt{a^2 + 27}$. Ruutu tõstes leiame $4a^2 = a^2 + 27$ ehk $a^2 = 9$, millest $a = \pm 3$. Lähtevõrrandit rahuldab ainult lahend $a = -3$. Asetades a väärtuse algsesse ruutvõrrandisse, saame võrrandi $x^2 - 6x + 6 = 0$, mille lahendid on $x = 3 \pm \sqrt{3}$.

2. *Vastus:* $x = 2abc/(bc - ca + ab)$.

Lahendus 1. Ülesande tingimustest saame, et $\dfrac{1}{a} = \dfrac{x+y}{xy} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$ ning analoogiliselt $\dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}$ ja $\dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{x}$. Siit leiame

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = \frac{ab + bc - ca}{2abc}$$

ning $x = \dfrac{2abc}{ab + bc - ca}$.

Lahendus 2. Avaldades antud seostest vastavalt x, y ja z, saame:

$$x = \frac{ay}{y - a}\ , \tag{1}$$

$$y = \frac{bz}{z-b}\,, \tag{2}$$
$$z = \frac{cx}{x-c}\,. \tag{3}$$

Asendades võrdusse (1) kõigepealt (2) ja seejärel (3), saame

$$x = \frac{ay}{y-a} = \frac{a\dfrac{bz}{z-b}}{\dfrac{bz}{z-b} - a} = \frac{abz}{bz - az + ab} =$$
$$= \frac{ab\dfrac{cx}{x-c}}{(b-a)\dfrac{cx}{x-c} + ab} = \frac{abcx}{bcx - acx + abx - abc}\,.$$

Siit $abc = x(ab+bc-ca) - abc$ ehk $2abc = x(ab+bc-ca)$, kust $x = \dfrac{2abc}{ab+bc-ca}$.

3. *Vastus:* a) ei; b) jah.

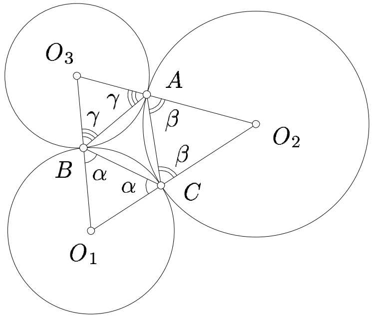
a) Kehtigu täisarvude a, b, c jaoks Pythagorase teoreemi võrdus $a^2+b^2=c^2$. Iga arv on oma ruuduga sama paarsusega; samuti on iga arv ja tema vastandarv sama paarsusega. Seega arvud a ja a^2 on sama paarsusega, b ja b^2 on sama paarsusega ning c ja $-c^2$ on sama paarsusega. Järelikult $a+b+c$ ja $a^2+b^2-c^2=0$ on sama paarsusega, s.t. $a+b+c$ on paarisarv ega saa võrduda 2003-ga.

b) Arvestades, et $2004 = 12 \cdot 167$, vaatleme kolmnurka küljepikkustega 3, 4 ja 5, mille puhul $3^2+4^2=5^2$ ja $3+4+5=12$. Suurendades selle kolmnurga küljepikkusi 167 korda, saame kolmnurga küljepikkustega $3\cdot167$, $4\cdot167$ ja $5\cdot167$, mis rahuldab ülesande tingimusi.

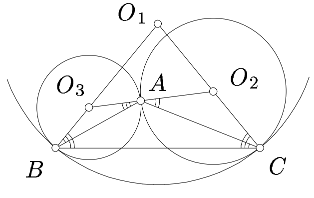
4. *Vastus:* $1:2$.

Üldisust kitsendamata võime eeldada, et kaheksanurga küljepikkus on 1. Kaheksanurga küljele toetuva ruudu küljepikkus on siis samuti 1, küljele toetuva võrdhaarse täisnurkse kolmnurga kaateti pikkus aga $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Joonisel mustaks värvitud ruudu küljepikkus on seega $1 - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$ ning viirutatud ruudu küljepikkus $1 - 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2} - 1$. Viirutatud ruudu ja musta ruudu küljepikkuste suhe on järelikult $\sqrt{2} : 1$ ning nende pindalade suhe on $2 : 1$. Viirutatud ruudu pindala suhe nelja musta ruudu kogupindalasse on siis $2 : 4$ ehk $1 : 2$.

5. *Lahendus 1.* Olgu O kolmnurga ABC ümberringjoone keskpunkt. Siis $|OA| = |OB|$. Vaatleme kiiri OA ja OB. Et kolmnurk ABC pole täisnurkne, siis $\angle AOB \neq 180^\circ$. Järelikult leidub ringjoon c_3, mis puutub kiiri OA ja OB vastavalt punktides A ja B. Analoogiliselt leidub ringjoon c_1, mis puutub kiiri OB ja OC vastavalt punktides B ja C, ning ringjoon c_2, mis puutub kiiri OC ja OA vastavalt punktides C ja A. Kuna c_2 ja c_3 puutuvad kiirt OA punktis A, puutuvad nad punktis A ka omavahel; analoogiliselt puutuvad c_3 ja c_1 omavahel punktis B ning c_1 ja c_2 omavahel punktis C.



Joonis 2



Joonis 3

Lahendus 2. Olgu α, β ja γ kolmnurga ABC sisenurkade suurused. Kui ABC on teravnurkne kolmnurk (vt. joonist 2), siis valime väljaspool kolmnurka sellised punktid O_1, O_2 ja O_3, et kehtiksid võrdused $\angle O_1BC = \angle O_1CB = \alpha$, $\angle O_2CA = \angle O_2AC = \beta$ ja $\angle O_3AB = \angle O_3BA = \gamma$. Sirge O_1O_2 läbib punkti C, sest $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, analoogiliselt läbib sirge O_2O_3 punkti A ja sirge O_3O_1 punkti B. Kui nüüd joonestada ringjoon keskpunktiga O_1 läbi tippude B ja C, ringjoon keskpunktiga O_2 läbi tippude

C ja A ning ringjoon keskpunktiga O_3 läbi tippude A ja B, siis puutuvad need kolm ringjoont paarikaupa.

Kui ABC on nürinurkne kolmnurk nürinurgaga näiteks tipu A juures (vt. joonist 3), siis tuleb punkt O_1 valida nii, et $\angle O_1BC = \angle O_1CB = \beta + \gamma$, edasine arutlus jääb samaks.

6. *Vastus:* a) 364.

Lahendus 1. Lahendame kõigepealt ülesande b)-osa. Et $k \geqslant 1$, siis on asutuses igal $k+1$ või $k+2$ telefoniga ametnikul üks k telefoniga vahetu alluv. Teiselt poolt, et $k < n$, siis on igal k telefoniga ametnikul üks $k+1$ või $k+2$ telefoniga vahetu ülemus. Seega on kõik k telefoniga ametnikud üksüheses vastavuses kõigi $k+1$ ja $k+2$ telefoniga ametnikega, mistõttu k telefoniga ametnikke on sama palju kui $k+1$ ja $k+2$ telefoniga ametnikke kokku.

Ülesande a) osas nimetatud juhul on asutuses kümme telefoni 1 ametnikul, üheksa telefoni samuti 1 ametnikul ning b) osa põhjal on kaheksa telefoni $1+1=2$ ametnikul, seitse telefoni $1+2=3$ ametnikul, kuus telefoni $2+3=5$ ametnikul, viis telefoni 8 ametnikul, neli telefoni 13 ametnikul, kolm telefoni 21 ametnikul, kaks telefoni 34 ametnikul ja üks telefon 55 ametnikul. Kokku on asutuses telefone seega $10\cdot1+9\cdot1+8\cdot2+7\cdot3+6\cdot5+5\cdot8+4\cdot13+3\cdot21+2\cdot34+1\cdot55 = 364$.

Lahendus 2. a) Olgu A_n telefonide koguarv asutuses, milles Eriti Tähtsal Ametnikul on n telefoni. Need telefonid jagunevad kolmeks: A_{n-1} telefoni, mis kuuluvad selle allasutuse töötajatele, mida juhib Eriti Tähtsa Ametniku $n-1$ telefoniga vahetu alluv, A_{n-2} telefoni, mis kuuluvad selle allasutuse töötajatele, mida juhib tema $n-2$ telefoniga vahetu alluv, ning n telefoni, mis kuuluvad Eriti Tähtsale Ametnikule endale. Seega kehtib võrdus $A_n = A_{n-1} + A_{n-2} + n$. On lihtne näha, et $A_2 = 3$ (kahe telefoniga ametnikule allub üks ühe telefoniga ja üks ilma telefonita ametnik) ning $A_3 = 7$ (kolme telefoniga ametnikule allub kahe telefoniga ametniku juhitav allasutus ja ühe telefoniga ametnik). Edasi leiame $A_4 = 7+3+4 = 14$, $A_5 = 14+7+5 = 26$, $A_6 = 46$, $A_7 = 79$, $A_8 = 133$, $A_9 = 221$, $A_{10} = 364$.

b) Olgu $B(m,k)$ ühe m telefoniga ametniku alluvuses töötavate k telefoniga ametnike arv. Kehtivad järgmised seaduspärasused.

1) Kui $m \geqslant 2$ ja $m > k$, siis $B(m,k) = B(m-1,k) + B(m-2,k)$,

sest kõik m telefoniga ametnikule alluvad k telefoniga töötajad kuuluvad selle ametniku $m-1$ telefoniga vahetu alluva või $m-2$ telefoniga vahetu alluva juhitavasse allasutusse.

2) Kui $k \geqslant 1$, siis $B(m+1, k+1) = B(m, k)$, sest kui $m+1$ telefoniga ametniku juhitava allasutuse igalt töötajalt üks telefon ära võtta ning senised telefonita töötajad koondada, siis muutuvad $k+1$ telefoniga töötajad k telefoniga töötajateks, kes alluvad m telefoniga ametnikule.

Nüüd saame $B(n, k+2) + B(n, k+1) = B(n-1, k+1) + B(n, k+1) = = B(n+1, k+1) = B(n, k)$.

XI klass

1. *Lahendus 1.* Et $216 = 2^3 3^3$ ja $8000 = 4^3 5^3$, siis võime avaldada

$$2^{n+6} + 3^{n+6} + 2^3 3^3 (2^n + 3^n) = (2^{n+3} + 3^{n+3})(2^3 + 3^3) ,$$
$$4^{n+6} + 5^{n+6} + 4^3 5^3 (4^n + 5^n) = (4^{n+3} + 5^{n+3})(4^3 + 5^3) .$$

Arvudel $2^3 + 3^3 = 35$ ja $4^3 + 5^3 = 189$ on aga ühistegur 7.

Lahendus 2. Paneme tähele, et

$$2^{n+6} + 3^{n+6} + 216(2^n + 3^n) = 2^n(2^6 - 1) + 3^n(3^6 - 1) + 217(2^n + 3^n),$$
$$4^{n+6} + 5^{n+6} + 8000(2^n + 3^n) = 4^n(4^6 - 1) + 5^n(5^6 - 1) + 8001(4^n + 5^n).$$

Et arvud $2^6 - 1$, $3^6 - 1$, $4^6 - 1$ ja $5^6 - 1$ jaguvad kõik 7-ga, nagu ka arvud 217 ja 8001, siis 7 on otsitav ühistegur.

2. *Vastus:* $\dfrac{nl^2}{8} \sin \dfrac{360°}{n}$, kui n on paaris; $\dfrac{nl^2}{2} \cdot \cos \dfrac{180°}{n} \cdot \tan \dfrac{90°}{n}$, kui n on paaritu.

Tõmmates korrapärase n-nurga keskpunktist lõigu igasse tippu, näeme, et korrapärase n-nurga pindala avaldub ümberringjoone raadiuse r kaudu valemiga

$$S_n = n \frac{r^2}{2} \sin \frac{360°}{n}.$$

Kui n on paarisarv, siis ühtib korrapärase n-nurga pikim diagonaal tema ümberringjoone diameetriga, ehk $l = 2r$, ning eelnev pindala valem saab kuju

$$S_n = \frac{nl^2}{8} \sin \frac{360^\circ}{n}.$$

Kui n on paaritu, siis vaatleme täisnurkset kolmnurka, mille hüpotenuusiks on korrapärase n-nurga ümberringjoone diameeter ja üheks kaatetiks pikim diagonaal. Nurk nende vahel on pool n-nurga küljele toetuvast piirdenurgast ehk pool nurgast $\frac{180^\circ}{n}$. Järelikult kehtib seos $l = 2r \cos \frac{90^\circ}{n}$ ning pindala valem omandab kuju

$$S_n = \frac{nl^2}{8} \cdot \frac{\sin \frac{360^\circ}{n}}{\cos^2 \frac{90^\circ}{n}} = \frac{nl^2}{2} \cdot \cos \frac{180^\circ}{n} \cdot \tan \frac{90^\circ}{n}\ .$$

3. *Vastus:* 2.

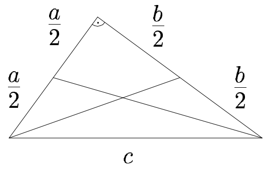
   Olgu a ja b antud kolmnurga kaatetite pikkused ja c hüpotenuusi pikkus, kusjuures kaatetile pikkusega a on tõmmatud mediaan pikkusega $\sqrt{3}$. See mediaan on hüpotenuusiks täisnurksele kolmnurgale, mille kaatetite pikkused on $\frac{a}{2}$ ja b (vt. joonist 4). Pythagorase teoreemi põhjal kehtib võrdus $\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2 = (\sqrt{3})^2 = 3$. Analoogiliselt on mediaan pikkusega $\sqrt{2}$ hüpotenuusiks täisnurksele kolmnurgale, mille kaatetite pikkused on a ja $\frac{b}{2}$, mistõttu kehtib ka võrdus $\left(\frac{b}{2}\right)^2 + a^2 = (\sqrt{2})^2 = 2$. Liites saadud kaks võrdust, saame $\frac{5}{4}(a^2 + b^2) = 5$ ehk $a^2 + b^2 = 4$. Selle kolmnurga hüpotenuusi pikkus on niisiis $\sqrt{a^2 + b^2} = 2$.

4. *Lahendus 1.* Et $|BD| = \frac{1}{2}|BC|$, siis on kolmnurga ABD küljele AB tõmmatud kõrgus pool kolmnurga ABC kõrgusest ja

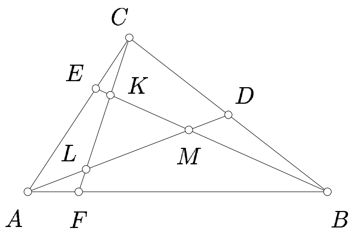
$S_{ABD} = \frac{1}{2} S_{ABC}$. Analoogiliselt $S_{ABE} = \frac{2}{3} S_{ABC}$. Lahutades siit eelmise võrduse, saame $S_{AME} - S_{BDM} = \frac{1}{6} S_{ABC}$. Lisaks $S_{AFC} = \frac{1}{6} S_{ABC}$. Lahutades eelmisest võrdusest selle, saame

$$S_{KLM} - S_{AFL} - S_{CEK} - S_{BDM} = 0,$$

millest järeldubki nõutav pindalade võrdsus.



Joonis 4



Joonis 5

Lahendus 2. Et $S_{ADC}+S_{BEA}+S_{CFB}-2S_{ADB}-2S_{BEC}-2S_{CFA} = 3S_{KLM}-3S_{AFL}-3S_{BDM}-3S_{CEK}$ (vt. joonist 5), siis avaldades vasakul esinevad pindalad kolmnurga ABC pindala kaudu, saame vasaku poole väärtuseks

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{5}{6} - 2 \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{1}{3} - 2 \cdot \frac{1}{6}\right) S_{ABC} = 0.$$

Järelikult on ka võrduse parema poole väärtus 0.

5. *Vastus:* jah.

Valime hulga $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ iga kaheelemendilise alamhulga $\{m, n\}$ jaoks ühe algarvu $p_{m,n}$ nii, et erinevatele alamhulkadele vastavad erinevad algarvud (samas loomulikult $p_{m,n} = p_{n,m}$). Defineerime arvud a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 järgmiselt:

$$a_i = p_{1,i} \cdot \ldots \cdot p_{i-1,i} \cdot p_{i+1,i} \cdot \ldots \cdot p_{5,i}$$

ehk arvu a_i algtegurid on parajasti need algarvud, mis vastavad elementi i sisaldavatele alamhulkadele. Nii saadud arvud rahuldavad ülesande tingimusi, sest mistahes paarikaupa erinevate indeksite r, s, t korral arvude a_r ja a_s suurim ühistegur on $p_{r,s} > 1$, kuid arvude a_s ja a_t suurim ühistegur on $p_{s,t} \neq p_{r,s}$, mistõttu kolme arvu a_r, a_s ja a_t suurim ühistegur on 1.

Märkus. Konkreetse näitena võime võtta

$$\begin{aligned} a_1 &= 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7, \\ a_2 &= 2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17, \\ a_3 &= 3 \cdot 11 \cdot 19 \cdot 23, \\ a_4 &= 5 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 29, \\ a_5 &= 7 \cdot 17 \cdot 23 \cdot 29. \end{aligned}$$

Igal kahel arvul leidub ühine algtegur, kuid ükski algtegur ei kuulu korraga kolme arvu koosseisu.

Ülaltoodud lahendust on lihtne üldistada viie positiivse täisarvu juhult n positiivse täisarvu juhule, kus $n \geqslant 3$ on suvaline.

6. *Vastus:* jah.

Astugu põrnikas esimesel sammul suvalisele ääreruudule A. Kui ruudustikus leidub mõni valge ruut B, mis erineb ruudust A, siis võib põrnikas liikuda selleni ja tulla sama teed pidi tagasi. Nii muutuvad ainult ruutude A ja B värvid, sest kõiki vahepealseid ruute külastab põrnikas paarisarv kordi. Nõnda jätkates on võimalik jõuda olukorrani, kus kõik ruudud peale A on mustad. Kui nüüd ka A on must, siis võib põrnikas kohe ruudustikult lahkuda. Kui A on valge, siis võib põrnikas teha kolmiksammu: astuda ruudu A kõrval asuvale ääreruudule C, tagasi ruudule A ning uuesti ruudule C, misjärel kõik ruudud on mustad.

XII klass

1. *Vastus:* sobib paar $\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$ või $\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$.

Meil tuleb valida kordajate a ja b väärtused nii, et alati, kui $f''(x) \geqslant 0$, oleks ka $g'(x) \geqslant 0$ ning alati, kui $f''(x) < 0$, oleks ka $g'(x) < 0$. Kindlasti kehtivad need tingimused siis, kui iga x

korral $f''(x) = g'(x)$. Et

$$\begin{aligned} f''(x) &= 12x^2 + 6(a^3+b^3)x + 2(a^2+b^2), \\ g'(x) &= 12x^2 + 108x + 2ab + 12, \end{aligned}$$

siis see võrdus kehtib alati, kui $f''(x)$ ja $g'(x)$ avaldistes on x vastavate astmete kordajad võrdsed. Nii saame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} 6(a^3+b^3) = 108 \\ 2(a^2+b^2) = 2ab+12 \end{cases},$$

mille võime teisendada kujule

$$\begin{cases} (a+b)(a^2-ab+b^2) = 18 \\ a^2-ab+b^2 = 6 \end{cases}.$$

Siit saame, et $a+b=3$. Asendades $b=3-a$ süsteemi teise võrrandisse, saame ruutvõrrandi $a^2-a(3-a)+(3-a)^2=6$ ehk $a^2-3a+1=0$, mille lahendid on $a=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ ja $a=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$. Esimesel juhul on $b=3-\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$, teisel juhul aga $b=3-\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

2. *Vastus:* 84.

Lahendus 1. Värvime kõigepealt mingid kaks teineteise vastas asuvat sektorit. Kui värvime need sektorid sama värviga (4 võimalust), siis võime mõlemad järelejäänud sektorid värvida suvalisega ülejäänud värvidest (kummagi sektori värvimiseks 3 võimalust). Seega on sel juhul värvimisvõimalusi $4\cdot3\cdot3=36$. Kui aga esmalt värvime kaks teineteise vastas asuvat sektorit eri värvidega ($4\cdot3$ võimalust), siis jääb kummagi ülejäänud sektori värvimiseks 2 värvi ning kokku on värvimisvõimalusi $4\cdot3\cdot2\cdot2=48$. Kokku on sektorite värvimiseks niisiis $36+48=84$ võimalust.

Lahendus 2. Tähistame sektorid vastupäeva liikudes tähtedega A, B, C, D. Värvime kõigepealt sektori A, selleks on 4 võimalust.

Seejärel värvime sektori B erinevaks sektorist A, selleks on 3 võimalust. Sektori C värvimiseks sektorist B erinevaks on 3 võimalust ning sektori D värvimiseks sektorist C erinevaks samuti 3 võimalust. Seega saame nelja sektorit värvida $4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 108$ viisil. Kuid siit tuleb kõrvale jätta värvimisviisid, kus sektorid A ja D on ühte värvi. Niisuguste värvimisviiside arvu leidmiseks käsitleme sektoreid A ja D tinglikult ühe sektorina. Kolmeks sektoriks jaotatud ringis peavad kõik sektorid olema eri värvi, järelikult on värvimisvõimalusi $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$. Ringi nelja sektori värvimiseks, kus kõik sektorid on erinevat värvi, on võimalusi seega $108 - 24 = 84$.

Lahendus 3. Sektoreid on võimalik nõutaval viisil värvida, kasutades selleks kahte, kolme või nelja värvi.

Nelja värvi korral tuleb iga sektor värvida erineva värviga ning rohkem piiranguid sellisele värvimisele ei ole — esimese sektori värvi valikuks on meil seega 4 võimalust, teise sektori värvi valikuks 3 võimalust, kolmanda sektori värvi valikuks 2 võimalust ja neljanda sektori värvi valikuks üksainus võimalus ning kokku saame nelja värviga värvimiseks $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ võimalust.

Kolme värvi korral on meil kõigepealt 4 võimalust kasutamata jääva värvi valikuks. Edasi tuleb mingi värviga värvida 2 sektorit, mis ei tohi paikneda teineteise kõrval — selle värvi valikuks on 3 võimalust ning sellega värvitavate sektorite paari valikuks 2 võimalust. Et lõpuks on veel 2 võimalust värvida ülejäänud kaks sektorit kahe ülejäänud värviga, siis kokku on kolme värviga värvimiseks $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 48$ võimalust.

Kahe värvi korral on meil kõigepealt $\dfrac{4 \cdot 3}{2} = 6$ võimalust kasutatavate värvide valikuks. Et ühe valitud värviga tuleb värvida üks mitte-naabersektorite paar ja teisega teine, siis on selleks veel 2 võimalust ning kokku seega $6 \cdot 2 = 12$ võimalust.

Kokkuvõttes saime, et sektorite nõutaval viisil värvimiseks on $24 + 48 + 12 = 84$ erinevat võimalust.

3. *Vastus:* sellise kuusnurga rajajoon, mille tipud asuvad punktides $(-1;0)$, $\left(-\dfrac{1}{2};1\right)$, $\left(\dfrac{1}{2};1\right)$, $(1;0)$, $\left(\dfrac{1}{2};-1\right)$ ja $\left(-\dfrac{1}{2};-1\right)$.

Lahendus 1. Vaatleme eraldi kolme juhtu.

Kui $x \geqslant \frac{1}{2}$, siis $|2x+1| = 2x+1$ ja $|2x-1| = 2x-1$ ning saame võrrandi $4x + 2|y| = 4$, kust $|y| = 2 - 2x$. Et $|y| \geqslant 0$, siis peab siin olema $x \leqslant 1$.

Kui $x \leqslant -\frac{1}{2}$, siis $|2x+1| = -2x-1$ ja $|2x-1| = -2x+1$ ning saame võrrandi $-4x+2|y| = 4$, kust $|y| = 2+2x$. Et $|y| \geqslant 0$, siis peab siin olema $x \geqslant -1$.

Kui $-\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$, siis $|2x+1| = 2x+1$ ja $|2x-1| = -2x+1$ ning saame võrrandi $2 + 2|y| = 4$, kust $|y| = 1$.

Näeme, et igaühel kolmest vaadeldud juhust paiknevad nõutava omadusega punktid kahel x-telje suhtes sümmeetrilisel lõigul ning kokku moodustavad need lõigud kuusnurga tippudega punktides $(-1;0)$, $\left(-\frac{1}{2};1\right)$, $\left(\frac{1}{2};1\right)$, $(1;0)$, $\left(\frac{1}{2};-1\right)$ ja $\left(-\frac{1}{2};-1\right)$ (vt. joonist 6).

Lahendus 2. Otsitav punktihulk on sümmeetriline x-telje suhtes, sest kui punkt (x,y) rahuldab ülesandes antud tingimust, siis rahuldab seda ka punkt $(x,-y)$. Samuti on punktihulk sümmeetriline y-telje suhtes, sest kui punkt (x,y) rahuldab ülesande tingimust, siis rahuldab seda ka punkt $(-x,y)$, nagu nähtub võrdusest

$$|2(-x)-1| + |2(-x)+1| + 2|y| = |2x+1| + |2x-1| + 2|y|.$$

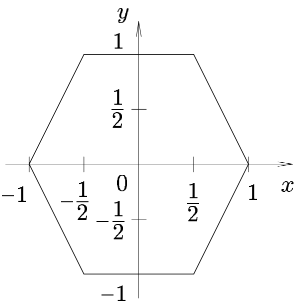
Seega piisab vaadelda punkte (x,y), kus $x \geqslant 0$ ja $y \geqslant 0$. Tingimus omandab sellisel juhul kuju $|2x-1| + 2x + 1 + 2y = 4$. Kui siin $0 \leqslant x \leqslant 1/2$, siis $|2x-1| = 1-2x$ ning tingimus on

$$1 - 2x + 2x + 1 + 2y = 4$$

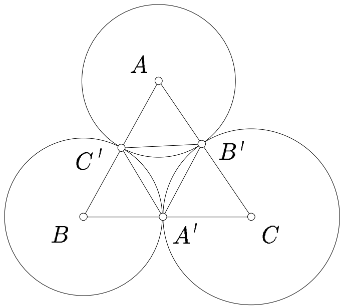
ehk $y = 1$. Kui $x \geqslant 1/2$, siis $|2x-1| = 2x-1$ ning tingimus on

$$2x - 1 + 2x + 1 + 2y = 4$$

ehk $y = 2-2x$. Nende kahe võrrandi järgi joonestame välja punktihulga tasandi I veerandis. Kujundi osad tasandi ülejäänud veerandites leiame peegeldamistega x- ja y-telje suhtes (vt. joonist 6).



Joonis 6



Joonis 7

4. Jagame mängijad kahte paari ning selgitame kummaski paaris võitja ja kaotaja. Seejärel mängib kummagi paari võitja teise paari kaotajaga ning nende kohtumiste võitjad ongi klubi kaks paremat. Tõepoolest, kui teise mängu võitja võitis ka esimeses kohtumises, siis kuulub ta kindlasti klubi kahe parema hulka, sest ta on võitnud kahte mängijat. Kui teise mängu võitja kaotas esimeses kohtumises, siis võitis ta teises mängus esimese mängu võitjat ja on sellega tugevam nii temast kui ka tema esimese mängu vastasest.

   Märkus. On võimalik tõestada, et n mängija hulgast m parema leidmiseks pole vaja rohkem kui $\binom{n}{2} - \binom{m}{2} - \binom{n-m}{2}$ mängu.

5. *Vastus:* $90° - \frac{\alpha}{2}$, $90° - \frac{\beta}{2}$ ja $90° - \frac{\gamma}{2}$.

   Lahendus 1. Et kolmnurk $BA'C'$ on võrdhaarne tipunurgaga β (vt. joonist 7), siis $\angle BA'C' = \angle BC'A' = \frac{180° - \beta}{2}$. Analoogiliselt saame $\angle CA'B' = \angle CB'A' = \frac{180° - \gamma}{2}$. Ringjoonte keskpunkte B ja C ühendav sirge läbib ringjoonte puutepunkti A'. Seepärast $\angle B'A'C' = 180° - \frac{180° - \beta}{2} - \frac{180° - \gamma}{2} = \frac{\beta + \gamma}{2}$ ehk võrduse $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ tõttu $\angle B'A'C' = 90° - \frac{\alpha}{2}$. Ülejäänud nurkade suurused leiame samamoodi.

Lahendus 2. Olgu I kolmnurga ABC siseringjoone keskpunkt ning A'', B'' ja C'' siseringjoone puutepunktid vastavalt külgedega BC, CA ja AB. Vaatleme võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} x + y = |AB| \\ y + z = |BC| \\ z + x = |CA| \end{cases}.$$

Sellel süsteemil on ühene lahend (x, y ja z saab üheselt avaldada $|AB|$, $|BC|$ ja $|CA|$ kaudu). Samal ajal on süsteemi lahendiks nii $x = |AB'| = |AC'|$, $y = |BC'| = |BA'|$, $z = |CA'| = |CB'|$ kui puutujalõikude võrdsuse põhjal ka $x = |AB''| = |AC''|$, $y = |BC''| = |BA''|$, $z = |CA''| = |CB''|$. Järelikult $A' = A''$, $B' = B''$ ja $C' = C''$. Seega lõigud IA', IB' ja IC' on risti vastavalt kolmnurga külgedega BC, CA ja AB, mistõttu $AB'IC'$, $BC'IA'$ ja $CA'IB'$ on kõõlnelinurgad. Siit $\angle B'A'C' = \dfrac{\angle B'IC'}{2} = \dfrac{180^\circ - \alpha}{2}$ ning analoogiliselt $\angle C'B'A' = \dfrac{180^\circ - \beta}{2}$ ja $\angle A'C'B' = \dfrac{180^\circ - \gamma}{2}$.

6. *Lahendus 1.* Pannes tähele, et $12^2 = 144$ ja $21^2 = 441$, moodustame arvud

$$\begin{aligned} M &= (10^n + 2)^2 = 10^{2n} + 4 \cdot 10^n + 4 = 10\ldots040\ldots04, \\ M' &= (2 \cdot 10^n + 1)^2 = 4 \cdot 10^{2n} + 4 \cdot 10^n + 1 = 40\ldots040\ldots01. \end{aligned}$$

Need arvud on ilmselt teineteise peegelarvud (kõik nullide rühmad koosnevad $n - 1$ nullist), samuti on nende korrutis täisruut, sest arvud ise on täisruudud.

Lahendus 2. Tõestame kõigepealt, et leidub neljakohaline arv, mille peegelarv on temast 4 korda suurem, st. kehtib seos $4 \cdot \overline{abcd} = \overline{dcba}$. Arvu kümnendkohtade määramiseks saame võrrandi

$$4(1000a + 100b + 10c + d) = 1000d + 100c + 10b + a,$$

mille võime teisendada kujule

$$1333a + 130b - 20c - 332d = 0.$$

Siin a peab olema paarisarv ja $4a < 10$, seega $a = 2$. Sellest lähtudes saame edasi $d = 8$, $b = 1$ ja $c = 7$. Otsitav arv on järelikult 2178.

Olgu nüüd $M = 21782178\ldots2178$, kus arv 2178 on kirjutatud n korda järjest. Siis arv $M' = 4M = 87128712\ldots8712$ on parajasti arvu M peegelarv. Arvud M ja M' on ülesandes nõutud omadusega, sest $M \cdot M' = M \cdot 4M = (2M)^2$.