L Олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии

МАТЕМАТИКА, РЕГИОНАЛЬНЫЙ ТУР

18 января 2003 г.

X класс

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи дает 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. На восточном базаре два торговца продают летающие ковры. Первый торговец требует за каждый ковер 10 золотых монет. У второго торговца один ковер стоит 11 золотых монет, но покупателю нескольких ковров он продает каждый последующий ковер на 10% дешевле предыдущего, а общую сумму оплаты за все ковры округляет до целого числа (так как золотые монеты на части не делят). Сколько по меньшей мере летающих ковров надо купить у второго торговца, чтобы количество уплаченных за них золотых монет было бы меньше, чем при покупке такого же количества ковров у первого торговца?

2. Упростить выражение $\dfrac{(a+1)^{1,5}-(a-1)^{1,5}}{2a+\sqrt{a^2-1}}$.

3. Для проведения учений сержант должен разбить 10 солдат по парам. Сколькими различными способами сержант может это сделать?

4. Две окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B так, что прямая O_1A является касательной для окружности с центром O_2. Доказать, что сумма площадей кругов, ограниченных этими окружностями, равна площади такого круга, для которого отрезок O_1O_2 является радиусом.

5. Социологи опросили 200 человек, предлагая каждому упорядочить три вида телепередач — новости, спортивные передачи и телесериалы — в порядке своего предпочтения. В ответах каждое возможное упорядочение встретилось по крайней мере 10 раз, причем 110 человек предпочли сериалы новостям, 140 человек предпочли новости спортивным передачам и 120 человек предпочли спортивные передачи сериалам. Сколько из опрошенных людей отметили телесериалы как свое первое предпочтение?

6. В некоторой точке окружности сидит кузнечик. Желая прыгнуть в другое место, кузнечик выбирает целое число $n \geqslant 3$, строит правильный n-угольник, вершины которого расположены на окружности и одна из вершин находится в точке, где и сидит кузнечик, а затем прыгает в следующую по часовой стрелке вершину этого n-угольника. Может ли кузнечик, прыгая таким способом, попасть назад в начальную точку, если он выбирает каждое значение n не больше одного раза?

L Олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии

МАТЕМАТИКА, РЕГИОНАЛЬНЫЙ ТУР

18 января 2003 г.

XI класс

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи дает 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Решить неравенство $\dfrac{1}{x^2-1} \geqslant \dfrac{1}{x^2+x-2}$.

2. Координаты середин сторон треугольника $(0;1)$, $(2;-1)$ и $(3;1)$. Найти координаты вершин этого треугольника.

3. Найти наибольшее натуральное число, которое равно сумме суммы цифр и произведения цифр этого же числа.

4. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ берут соответственно точки K и L так, что $|KL| = 3$, $|AK| = 4$ и $|AL| = 5$. Найти длину стороны квадрата $ABCD$.

5. Найти все такие пары (x, y) положительных целых чисел, для которых имеет место равенство $1 + 6x + 8y = xy$.

6. Около одной вершины правильного n-угольника написано число 1, а около остальных $n-1$ вершин числа 0. При каждом шаге можно выбирать одну вершину и менять числа, находящиеся около обеих ее соседних вершин (вместо 0 писать 1 или наоборот). Возможно ли совершая такие шаги достигнуть состояния, когда около всех вершин n-угольника будут числа 1, если:
   а) $n = 2002$;
   б) $n = 2003$?

L Олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии

МАТЕМАТИКА, РЕГИОНАЛЬНЫЙ ТУР

18 января 2003 г.

XII класс

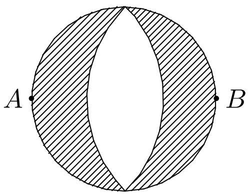
Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи дает 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Решить уравнение $2^{6x} + 16^{2x} = 2^{4x+1}$.

2. При каких значениях параметров a и b параболы $y = \dfrac{1}{2}x^2$ и $y = -x^2 + ax + b$ имеют общую касательную с углом подъема $45°$?

3. При каких целых значениях числа n число $n^4 + n^2 - 2$ делится на 72?

4. На рисунке изображена окружность с диаметром AB и дуги двух окружностей равного радиуса, центры которых находятся соответственно в точках A и B, а точки пересечения расположены на первой окружности. Найти площадь заштрихованной области, если $|AB| = 2$.



5. Найти наименьшее число, которое является членом всех трех арифметических прогрессий:

   12, 23, 34, ... ; 14, 27, 40, ... ; 15, 29, 43, ...

6. В деревне Ложь-Правдино имеется 200 жителей, из которых каждый говорит или только правду, или только ложь. Однажды все жители деревни сели за двумя круглыми столами (за каждым столом по 100 человек) и каждый из них сказал, является ли его сосед по столу справа честным или лжецом. Все сидящие за первым столом утверждали, что их сосед по столу справа лжец, а сидящие за вторым столом давали попеременно различные ответы (из каждых двух рядом сидящих человек один называл своего правого соседа честным, а второй называл своего правого соседа лжецом). Сколько лжецов было на самом деле за каждым из столов?