

Eesti koolinoorte L täppisteaduste olümpiaad

MATEMAATIKA PIIRKONNAVOOR

18. jaanuaril 2003. a.

X klass

Lahendamiseks on aega 5 tundi.

Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.

Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Idamaa turul müüvad kaks kaupmeest lendavaid vaipu. Esimene kaupmees nõuab iga vaiba eest 10 kuldmünti. Teise kaupmehe juures maksab üks vaip 11 kuldmünti, kuid mitme vaiba korraga ostjale annab ta iga järgmise vaiba 10% eelmisest odavamalt ning ümardab kõigi vaipade eest kokku makstava summa täisarvuks (sest kuldmünte ei tükeldata). Mitu lendavat vaipa tuleb teiselt kaupmehelt vähemalt osta, et nende eest kokku makstavate kuldmüntide arv oleks väiksem kui samapalju vaipu esimeselt kaupmehelt ostes?

2. Lihtsusta avaldis
$$\frac{(a+1)^{1,5} - (a-1)^{1,5}}{2a + \sqrt{a^2 - 1}}.$$

3. Seersandil on vaja 10 sõdurit õppusteks paaridesse jaotada. Mitmel erineval viisil saab seersant seda teha?
4. Kaks ringjoont keskpunktidega O_1 ja O_2 lõikuvad punktides A ja B nii, et sirge O_1A on puutujaks ringjoonele keskpunktiga O_2 . Tõesta, et nende ringjoontega piiratud ringide pindalade summa on võrdne sellise ringi pindalaga, millele lõik O_1O_2 on raadiuseks.
5. Sotsioloogid küsitlesid 200 inimest, paludes igal inimesel panna kolm telesaadete liiki — uudised, spordisaated ja teleseriaalid — oma eelistuse järjekorda. Vastustes esines iga võimalik järjestus vähemalt 10 korral, kusjuures 110 vastajat eelistasid seriaale uudistele, 140 vastajat uudiseid spordisaadetele ja 120 vastajat spordisaateid seriaalidele. Kui paljud vastajatest märkisid oma esimeseks eelistuseks teleseriaalid?
6. Ringjoone mingis punktis istub rohutirts. Soovides hüpata kuhugi mujale, valib tirts täisarvu $n \geq 3$, konstrueerib korrapärase n -nurga, mille tipud on ringjoonel ja üks tipp on selles punktis, kus tirts parajasti istub, ning hüppab siis selle n -nurga päripäeva järgmisse tippu. Kas tirts võib niiviisi hüpates alguspunkti tagasi jõuda, kui ta ei vali ühtegi n väärtust rohkem kui üks kord?

Eesti koolinoorte L täppisteaduste olümpiaad

MATEMAATIKA PIIRKONNAVOOR

18. jaanuaril 2003. a.

XI klass

Lahendamiseks on aega 5 tundi.

Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.

Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Lahenda võrratus $\frac{1}{x^2 - 1} \geq \frac{1}{x^2 + x - 2}$.
2. Kolmnurga külgede keskpunktide koordinaadid on $(0; 1)$, $(2; -1)$ ja $(3; 1)$. Leia selle kolmnurga tippude koordinaadid.
3. Leia suurim naturaalarv, mis on võrdne oma numbrite summa ja numbrite korrutise summaga.
4. Ruudu $ABCD$ külgedel BC ja CD võetakse vastavalt punktid K ja L nii, et $|KL| = 3$, $|AK| = 4$ ja $|AL| = 5$. Leia ruudu $ABCD$ küljepikkus.
5. Leia kõik sellised positiivsete täisarvude paarid (x, y) , mille korral kehtib võrdus $1 + 6x + 8y = xy$.
6. Korrapärase n -nurga ühe tipu juurde on kirjutatud arv 1 ja ülejäänud $n-1$ tipu juurde arvud 0. Igal sammul võime valida ühe tipu ning muuta ära selle mõlema naabertipu juures olevad arvud (0 asemele 1 või vastupidi). Kas selliste sammudega on võimalik saavutada olukord, kus n -nurga kõigi tippude juures on arvud 1, kui:
 - a) $n = 2002$;
 - b) $n = 2003$?

Eesti koolinoorte L täppisteaduste olümpiaad

MATEMAATIKA PIIRKONNAVOOR

18. jaanuaril 2003. a.

XII klass

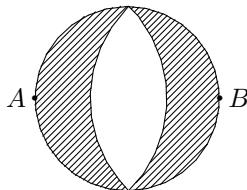
Lahendamiseks on aega 5 tundi.

Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.

Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Lahenda võrrand $2^{6x} + 16^{2x} = 2^{4x+1}$.
2. Milliste parameetrite a ja b väärtuste korral on parabolidel $y = \frac{1}{2}x^2$ ja $y = -x^2 + ax + b$ ühine puutuja tõusunurgaga 45° ?
3. Milliste täisarvude n korral jagub arv $n^4 + n^2 - 2$ arvuga 72?

4. Joonisel on kujutatud ringjoon diameetriga AB ning kahe võrdse raadiusega ringjoone kaared, mille keskpunktid on vastavalt punktides A ja B ning mille lõikepunktid paiknevad esimesel ringjoonel. Leia joonisel viirutatud ala pindala, kui $|AB| = 2$.



5. Leia vähim arv, mis esineb kõigi kolme aritmeetilise jada liikmena:

12, 23, 34, ... ; 14, 27, 40, ... ; 15, 29, 43,

6. Valetõe külas on 200 elanikku, kellest igatiüks räägib kas ainult tõtt või ainult valet. Kord istusid kõik külaelanikud kahe ümmarguse laua taha (kummagi laua taha 100) ning igatiüks neist ütles, kas tema parempoolne naaber on tõerääkija või valetaja. Esimese laua taga istujad väitsid kõik, et nende parempoolne naaber on valetaja, teise laua taga aga anti vaheldumisi erinevad vastused (igast kahest kõrvuti istujast üks nimetas oma parempoolset naabrit tõerääkijaks ja teine oma parempoolset naabrit valetajaks). Kui palju valetajaid oli kummagi laua taga istujate seas tegelikult?