Eesti koolinoorte L täppisteaduste olümpiaad

MATEMAATIKA PIIRKONNAVOOR

18. jaanuaril 2003. a.

Lahendused ja vastused

VII klass, I osa

1\. 8. 2. $x = -8$, $y = 4$. 3. 41. 4. 0. 5. 2 dabbit. 6. $161°$. 7. 3 cm. 8. 16 cm^2. 9. $0{,}8\pi\ \mathrm{dm}^2$. 10. C.

VII klass, II osa

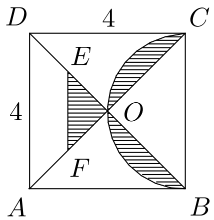
1. *Vastus:* 83,6%.

   Olgu tiigi vee ruumala x, siis esmaspäeva õhtuks on tiigi veest jäätunud $0{,}8x$. Järgmise päeva õhtuks on sellest alles 95%, s.o. $0{,}95 \cdot 0{,}8x = 0{,}76x$. Kolmapäeva õhtuks on jäätunud 10% lisaks, s.o. kokku $1{,}1 \cdot 0{,}76x = 0{,}836x$. Seega on kolmapäeva õhtuks jäätunud 83,6% tiigi veest.

2. *Vastus:* $(2\pi - 3)\ \mathrm{cm}^2$.

   Ruudu $ABCD$ pindala on $S_{ABCD} = 4^2 = 16\ \mathrm{cm}^2$ (vt. joonist 1). Kuna punktid E ja F poolitavad vastavalt lõigud OD ja OA, siis täisnurkse kolmnurga FOE pindala moodustab neljandiku täisnurkse kolmnurga AOD pindalast. Kolmnurga AOD pindala aga moodustab omakorda neljandiku ruudu pindalast. Seega $S_{EOF} = \dfrac{1}{4^2} \cdot S_{ABCD} = 1\ \mathrm{cm}^2$.

   Ülejäänud viirutatud osa pindala saame, lahutades poolringi pindalast kolmnurga BOC pindala. Poolringi raadius on pool ruudu $ABCD$ küljepikkusest, s.o. 2 cm, ning poolringi pindala seega $\dfrac{1}{2} \cdot 2^2 \cdot \pi = 2\pi\ \mathrm{cm}^2$. Kolmnurga BOC pindala on neljandik ruudu pindalast, s.o. $\dfrac{1}{4} \cdot 4^2 = 4\ \mathrm{cm}^2$. Niisiis ülejäänud viirutatud osa pindala on $(2\pi - 4)\ \mathrm{cm}^2$ ning viirutatud osa kogupindala on $(2\pi - 4) + 1 = (2\pi - 3)\ \mathrm{cm}^2$.



Joonis 1

3. *Vastus:* 19, 97, 73 ja 31.

   Et ükski paarisnumbriga ega 5-ga lõppev kahekohaline arv ei ole algarv, peavad tähed A, B, C ja D tähistama numbreid 1, 3, 7 ja 9 mingis järjekorras võetuna. Neist moodustatud kahekohalised algarvud, mis koosnevad erinevatest numbritest, on 13, 17, 19, 31, 37, 71, 73, 79 ja 97.

   Paneme tähele, et iga täht esineb otsitavates algarvudes AB, BC, CD ja DA täpselt ühe arvu alguses ja ühe arvu lõpus. Seega on üheks võidunumbriks kindlasti 97 kui ainus 9-ga algav algarv. Numbriga 9 lõppevatest arvudest sobib nüüd vaid 19. Seega tuleb ülejäänud kahte võidunumbrit otsida arvude 31, 71 ja 73 seast. Ülesande tingimustele vastavad ainult arvud 31 ja 73. Seega ainus võimalik võidunumbrite komplekt on 19, 97, 73 ja 31.

VIII klass, I osa

1. 2. 2. $x = -1{,}5$, $y = 3$. 3. 62. 4. a on 2 korda suurem kui b. 5. 0. 6. 101°. 7. 60 cm. 8. 16 cm^2. 9. $\dfrac{4}{\pi}$. 10. B.

VIII klass, II osa

1. *Vastus:* 18, 24 ja 7.

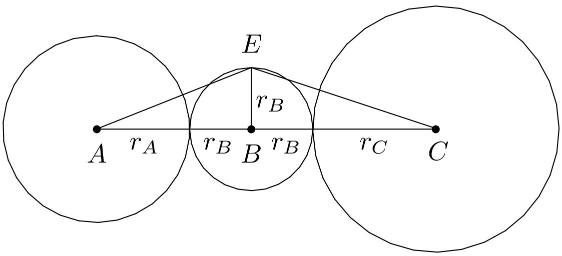
   Olgu otsitavad arvud a, b ja c. Ülesande tingimuste kohaselt $a + 3 = b - 3 = 3c = n$, millest $a = 3c - 3$ ja $b = 3c + 3$. Leides nüüd summa $a + b + c = 3c - 3 + 3c + 3 + c = 7c$, saame $7c = 49$, kust $c = 7$ ning $a = 18$ ja $b = 24$.

2. *Vastus:* 4,5 cm^2.

Tähistame ringjoonte raadiused vastavalt r_A, r_B ja r_C (vt. joonist 2). Üldisust kitsendamata võime eeldada, et $r_B < r_A \leqslant r_C$. Vastavate ringide pindalade summa on $\pi(r_A^2+r_B^2+r_C^2) = 26\pi\ \mathrm{cm}^2$, millest $r_A^2 + r_B^2 + r_C^2 = 26$. Ainsad sobivad naturaalarvud, mille korral see võrdus kehtib, on $r_B = 1$, $r_A = 3$ ja $r_C = 4$. Kolmnurga AEC aluse pikkus on niisiis

$$|AC| = r_A + 2r_B + r_C = 3 + 2 \cdot 1 + 4 = 9\ \mathrm{cm}$$

ja kõrgus $|BE| = r_B = 1$ cm. Seega on kolmnurga AEC pindala $\frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BE| = 4{,}5\ \mathrm{cm}^2$.



Joonis 2

3. *Vastus:* 6, 7 ja 11.

   Ülesande tingimustest järeldub, et arv 462 jagub nii arvuga N kui ka arvuga $N - 4$. Leiame arvu 462 algtegureiks lahutuse $462 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11$ ning selle põhjal tema kõik positiivsed tegurid:

   $$1,\ 2,\ 3,\ 6,\ 7,\ 11,\ 14,\ 21,\ 22,\ 33,\ 42,\ 66,\ 77,\ 154,\ 231,\ 462.$$

   Näeme, et nende tegurite seas on kolm paari selliseid, mille vahe on 4 — need on 6 ja 2, 7 ja 3 ning 11 ja 7. Järelikult on laegaste arvu N võimalikud väärtused 6, 7 ja 11.

IX klass, I osa

1. 1,91. 2. 4 ja -4. 3. 105. 4. 5 ja -5. 5. värvi 450 g, lahustit 50 g. 6. 81. 7. 24 cm. 8. 35. 9. 6 cm. 10. B ja D.

IX klass, II osa

1. *Vastus:* 40-aastane.

   Olgu x Britta vanus 20 aastat tagasi, siis Anna ja Caroli vanused 20 aastat tagasi olid vastavalt $\frac{x}{4}$ ja $\frac{x}{2}$. Praegu on Anna ja Britta vanused seega vastavalt $\frac{x}{4}+20$ ja $x+20$. Siit saame võrrandi

   $$x + 20 = 2 \cdot \left(\frac{x}{4} + 20\right),$$

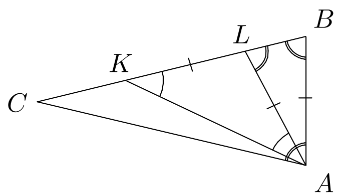
   ehk (avades sulud ja korrutades 2-ga läbi) $2x+40 = x+80$, kust $x = 40$. Carol oli niisiis 20 aastat tagasi $\frac{40}{2} = 20$ aastane ning praegu on seega 40-aastane.

2. *Vastus:* 1.

   Kuna $\angle KAL = \angle AKL$, siis kolmnurk AKL on võrdhaarne alusega AK, millest $|KL| = |AL|$. Et nurk ALB on kolmnurga ALK välisnurk, siis selle suurus on võrdne kolmnurga ALK ülejäänud kahe sisenurga suuruste summaga. Seega

   $$\angle ALB = \angle KAL + \angle AKL = 2\angle KAL = \angle BAC = \angle ABC$$

   (vt. joonist 3). Niisiis on kolmnurk BAL võrdhaarne alusega BL, millest $|AL| = |AB| = 1$. Kuna eespool näitasime, et $|KL| = |AL|$, siis $|KL| = 1$.



Joonis 3

3. *Vastus:* 1008, 1210 ja 3432.

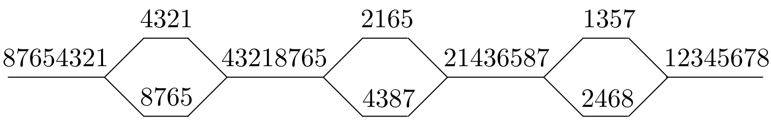
   Olgu x ülesandes mainitud “vahepealne täisarv”, siis vaadeldava neljakohalise arvu kahest esimesest numbrist moodustuv arv on

$x+1$ ja kahest viimasest numbrist moodustuv arv on $x-1$ ning see neljakohaline arv ise on $100(x+1)+(x-1)$. Vastavalt ülesande tingimustele on arv x arvu $100(x+1)+(x-1)$ jagaja, s.t. arv

$$100(x+1)+(x-1)=101x+99$$

jagub arvuga x. Siit näeme, et 99 peab jaguma arvuga x, s.t. x peab olema üks arvudest $1, 3, 9, 11, 33, 99$. Et arv $x+1$ peab olema kahekohaline, siis võimalused 1, 3 ja 99 ei sobi. Järelejäänud võimalused 9, 11 ja 33 annavad otsitavaks neljakohaliseks arvuks vastavalt $100\cdot 10+8=1008$, $100\cdot 12+10=1210$ ja $100\cdot 34+32=3432$, mis kõik ka sobivad.

4. Märgime vedurid numbritega $1,2,\ldots,8$ järjekorras paremalt vasakule. Vedurite algne järjestus on siis 87654321. Esimesel hargnemiskohal suuname vedurid 1 kuni 4 ülemisele haruteele ning vedurid 5 kuni 8 alumisele haruteele. Lastes alumise harutee veduritel esimesena hargnemiselt välja sõita, saame esimese hargnemise järel rivi 43218765 (vt. joonist 4). Järgmisel hargnemiskohal suuname vedurid 5 ja 6 ülemisele haruteele, vedurid 7 ja 8 alumisele haruteele, seejärel vedurid 1 ja 2 ülemisele ning vedurid 3 ja 4 alumisele haruteele. Lastes veduritel välja sõita kahekaupa vaheldumisi kummaltki haruteelt, alustades alumisest, saame järgneval horisontaallõigul rivi 21436587. Viimasel hargnemiskohal suuname paaritu numbriga vedurid ülemisele ja paarisnumbriga vedurid alumisele teele. Lastes veduritel välja sõita ühekaupa vaheldumisi kummaltki haruteelt, alustades alumisest, saamegi vajaliku järjestuse 12345678.



Joonis 4

Märkus. On lihtne veenduda, et rohkem kui 8 vedurit ülesandes esitatud tingimustel vastupidisesse järjekorda seada ei saa. Tõepoolest, 3 hargnemisega raudteesõlme läbimiseks on kokku $2^3=8$ erinevat võimalust, mistõttu rohkem kui 8 veduri korral leiduvad alati vähemalt kaks neist, mis läbivad raudteesõlme üht ja sama teed mööda ning mille omavaheline järjekord ei saa seetõttu muutuda.

X klass

1. *Vastus:* 4.

   Vastavalt ülesande tingimustele tuleb teiselt kaupmehelt korraga k vaiba ostmisel maksta esimese vaiba eest 11, teise eest $11 \cdot 0{,}9$, kolmanda eest $11 \cdot 0{,}9^2$, $\ldots$, k. vaiba eest $11 \cdot 0{,}9^{k-1}$ kuldmünti. Nii leiame makstavaks kogusummaks (ilma täisarvuks ümardamata) kahe vaiba korral $11(1+0{,}9) = 20{,}9$, kolme vaiba korral $11(1+0{,}9+0{,}9^2) = 29{,}81$ ja nelja vaiba korral $11(1+0{,}9+0{,}9^2+0{,}9^3) = 37{,}829$ kuldmünti. Arvestades ümardamist tuleks niisiis tegelikult teisele kaupmehele maksta vastavalt 21, 30 ja 38 kuldmünti, esimesele kaupmehele aga vastavalt 20, 30 ja 40 kuldmünti. Niisiis on teisele kaupmehele makstav kuldmüntide arv väiksem, kui osta korraga vähemalt 4 vaipa.

2. *Vastus:* $\sqrt{a+1} - \sqrt{a-1}$.

   Lahendus 1. Kasutame lugejas kuupide vahe valemit ja teisendame:

$$\frac{(a+1)^{1{,}5} - (a-1)^{1{,}5}}{2a + \sqrt{a^2-1}} = \frac{(\sqrt{a+1})^3 - (\sqrt{a-1})^3}{2a + \sqrt{a^2-1}} =$$
$$= \frac{(\sqrt{a+1} - \sqrt{a-1}) \cdot ((a+1) + \sqrt{(a+1)(a-1)} + (a-1))}{2a + \sqrt{a^2-1}} =$$
$$= \frac{(\sqrt{a+1} - \sqrt{a-1}) \cdot (2a + \sqrt{a^2-1})}{2a + \sqrt{a^2-1}} =$$
$$= \sqrt{a+1} - \sqrt{a-1}\,.$$

   Lahendus 2. Kaotame nimetajast irratsionaalsuse ja teisendame:

$$\frac{(a+1)^{1{,}5} - (a-1)^{1{,}5}}{2a + \sqrt{a^2-1}} =$$
$$= \frac{\big((a+1)^{1{,}5} - (a-1)^{1{,}5}\big) \cdot (2a - \sqrt{a^2-1})}{4a^2 - (a^2-1)} =$$
$$= \frac{\big((a+1)\sqrt{a+1} - (a-1)\sqrt{a-1}\big) \cdot (2a - \sqrt{a^2-1})}{3a^2+1} =$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{3a^2+1} \cdot \big(2a(a+1)\sqrt{a+1} - 2a(a-1)\sqrt{a-1} - \\
&\qquad - (a+1)^2\sqrt{a-1} + (a-1)^2\sqrt{a+1}\big) = \\
&= \frac{1}{3a^2+1} \cdot \big(\sqrt{a+1} \cdot (2a^2+2a+a^2-2a+1) - \\
&\qquad - \sqrt{a-1} \cdot (2a^2-2a+a^2+2a+1)\big) = \\
&= \frac{\sqrt{a+1} - \sqrt{a-1} \cdot (3a^2+1)}{3a^2+1} = \sqrt{a+1} - \sqrt{a-1}\,.
\end{aligned}
$$

3. *Vastus:* 945.

Lahendus 1. Nummerdame sõdurid naturaalarvudega 1, 2, ..., 10 ja koostame paarid ükshaaval, valides igal sammul suvaliselt paarilise *vähima numbriga* veel vabale sõdurile. Sõduri 1 paarilise valikuks on meil 9 võimalust ning suvalise valiku korral jääb 8 sõdurit vabaks. Teisel sammul on vähima numbriga vabale sõdurile paarilise valikuks niisiis 7 võimalust, kolmandal sammul 5 võimalust jne. Seega kokkuvõttes võime valikuprotsessi läbi viia $9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1 = 945$ erineval viisil. Iga võimalik sõdurite paarideks jaotus on aga saadav täpselt ühe sellise valikuprotsessi tulemusena, sest antud paarideks jaotus määrab üheselt, millise sõduri millisel protsessi sammul pidime valima. Seetõttu on võimalikke paarideks jaotusi niisama palju kui võimalusi valikuprotsessi läbiviimiseks, s.t. 945.

Lahendus 2. Olgu sõdurite võimalike paarideks jaotuste arv x. Kuna paare on 5, siis võimalikke paarideks jaotusi koos paaride järjekorra määramisega on $x \cdot 5!$. Paarideks jaotused koos paaride järjekorra määramisega saame loendada aga ka teisiti: esimese paari valikuks on $\dfrac{10 \cdot 9}{2}$ võimalust, teise paari valikuks järelejääva 8 sõduri seast $\dfrac{8 \cdot 7}{2}$ võimalust jne. Seega

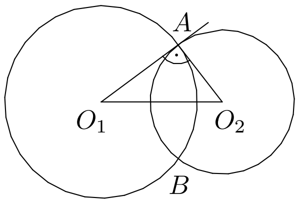
$$
\begin{aligned}
x \cdot 5! &= \frac{10 \cdot 9}{2} \cdot \frac{8 \cdot 7}{2} \cdot \frac{6 \cdot 5}{2} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2} \cdot \frac{2 \cdot 1}{2} = \\
&= \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = \\
&= 9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1\,,
\end{aligned}
$$

millest $x = 9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1 = 945$.

4. Kuna puutuja on vastava raadiusega risti, siis $\angle O_1AO_2 = 90^\circ$ (vt. joonist 5). Pythagorase teoreemi abil saame nüüd

$$\pi \cdot |O_1A|^2 + \pi \cdot |O_2A|^2 = \pi \cdot (|O_1A|^2 + |O_2A|^2) = \pi \cdot |O_1O_2|^2,$$

mis on parajasti võrdne ülesandes nõutud ringi pindalaga.



Joonis 5

5. *Vastus:* 70.

Paneme kirja kõikvõimalikud eelistusjärjekorrad ja tähistame vastava järjekorra valinud inimeste arvud tähtedega A, B, ..., F:

A: uudised, spordisaated, teleseriaalid;
B: uudised, teleseriaalid, spordisaated;
C: spordisaated, uudised, teleseriaalid;
D: spordisaated, teleseriaalid, uudised;
E: teleseriaalid, uudised, spordisaated;
F: teleseriaalid, spordisaated, uudised.

Nüüd saame ülesande tingimuste põhjal koostada võrrandisüsteemi

$$\begin{aligned} D + E + F &= 110, \\ A + B + E &= 140, \\ A + C + D &= 120. \end{aligned}$$

Liites kõigi võrrandite vastavad pooled, saame

$$(A + B + C + D + E + F) + (A + D + E) = 370.$$

Võttes arvesse, et $A+B+C+D+E+F=200$, saame, et $A+D+E=170$ ning seega $B+C+F=200-(A+D+E)=30$. Kuna iga eelistust nimetas vähemalt kümme inimest, siis peab olema $B=C=F=10$. Nüüd saame kolmandast võrrandist, et $A+D=110$. Kuna $A+D+E=170$, siis $E=60$ ning neid inimesi, kes märkisid esimese eelistusena teleseriaalid, oli $E+F=60+10=70$.

6. *Vastus:* jah.

Olgu ringjoone keskpunkt O. Vastavalt ülesande tingimustele saab tirts mingist punktist A hüpata edasi punkti B, mille korral $\angle AOB = \dfrac{360^\circ}{n}$ tirtsu valitud arvu n jaoks. Seega taandub ülesanne nurga 360° (või selle mingi kordse) esitamisele nurkade $\dfrac{360^\circ}{n}$ summana — ehk arvu 1 (või mistahes positiivse täisarvu) esitamisele murdude $\dfrac{1}{n}$ summana — kus nimetajad n on kõik erinevad ja suuremad kui 2. Üks võimalus selleks on

$$1=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}\,.$$

Märkused.
1. Korrutades otsitavas võrduses kõik liikmed läbi paremal pool olevate murdude nimetajate vähima ühiskordsega, võime ülesande taandada ka naturaalarvu esitamisele oma erinevate positiivsete tegurite summana, millest ükski ei ole võrdne poolega sellest arvust.
2. Tirts võib üheainsa täisringiga tagasi alguspunkti jõuda lõpmata paljudel viisidel. Tõepoolest, kuna $\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n(n+1)}$, siis võime arvu 1 lahutuses lugejaga 1 murdude summaks suurima nimetajaga liidetava $\dfrac{1}{n}$ asendada kahe liidetavaga $\dfrac{1}{n+1}$ ja $\dfrac{1}{n(n+1)}$.

XI klass

1. *Vastus:* $x>1$ või $-2<x<-1$.

Viies mõlemad murrud ühele poole ja ühisele nimetajale, saame võrratuse

$$\frac{(x^2+x-2)-(x^2-1)}{(x^2-1)(x^2+x-2)} \geqslant 0\ ,$$

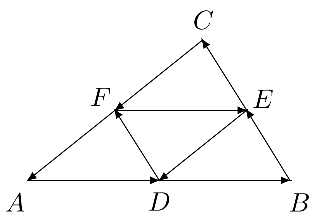
ehk

$$\frac{x-1}{(x-1)^2(x+1)(x+2)} \geqslant 0\ .$$

Jagades lugeja ja nimetaja läbi teguriga $x-1$ (seda võime teha, sest $x=1$ kui avaldise x^2-1 nullkoht ei ole nagunii antud võrratuse lahendiks), saame

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)(x+2)} \geqslant 0\ .$$

See võrratus kehtib, kui teguritest $x-1$, $x+1$ ja $x+2$ ükski ei võrdu nulliga ning nende hulgas on paarisarv negatiivseid, s.t. kui $x>1$ või $-2<x<-1$. Et esialgses võrratuses esinevate murdude nimetajate nullkohtadeks on parajasti arvud 1, -1 ja -2, siis täiendavaid kitsendusi me siit ei saa ning kõik arvud mõlemast leitud piirkonnast on esialgse võrratuse lahenditeks.



Joonis 6

2. *Vastus:* $(1;3)$, $(-1;-1)$ ja $(5;-1)$.

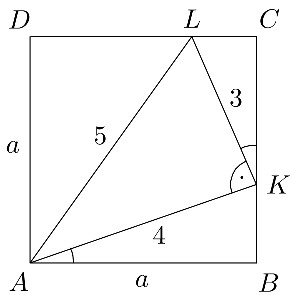
Tähistame vaadeldava kolmnurga tipud A, B ja C ning külgede AB, BC ja CA keskpunktid vastavalt D, E ja F nii, et $D(0;1)$, $E(2;-1)$ ja $F(3;1)$. Et kolmnurga kahe külje keskpunkte ühendav lõik on paralleelne kolmanda küljega ning selle pikkus on pool kolmanda külje pikkusest, siis $\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{FE}=(-1;-2)$,

$\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{DF} = (3;0)$ ja $\overrightarrow{FA} = \overrightarrow{ED} = (-2;2)$, Seega kolmnurga tippude koordinaadid on $B(-1;-1)$, $C(5;-1)$ ja $A(1;3)$.

3. *Vastus:* 99.

Kahekohalise arvu $\overline{ab} = 10a + b$ jaoks saame ülesande tingimusest võrrandi $10a + b = ab + a + b$, ehk $9a = ab$. Et $a \neq 0$, siis peab olema $b = 9$ ning on lihtne kontrollida, et iga 9-ga lõppev kahekohaline arv, sh. arv 99, rahuldab ülesande tingimust.

Näitame nüüd, et suuremad arvud ei saa ülesande tingimust rahuldada. Tõepoolest, kolmekohalise arvu $\overline{abc} = 100a + 10b + c$ korral saame võrrandi $100a+10b+c = abc+a+b+c$, ehk $a(bc-99) = 9b$; neljakohalise arvu $\overline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + d$ korral saame analoogiliselt võrrandi $a(bcd - 999) = 99b + 9c$, jne. Igal juhul on saadava võrrandi vasak pool alati negatiivne (sest $a > 0$ ning k ühekohalise arvu korrutis on väiksem kui $\underbrace{99\ldots9}_{k} = 10^k - 1$), parem pool aga on mittenegatiivsete liidetavate summa ja seega mittenegatiivne. Seega kolme- ja rohkemakohalised arvud ei saa ülesande tingimust rahuldada.



Joonis 7

4. *Vastus:* $\dfrac{16\sqrt{17}}{17}$.

Olgu ruudu $ABCD$ küljepikkus a (vt. joonist 7). Et kolmnurgas AKL on

$$|AL|^2 = 25 = 16 + 9 = |AK|^2 + |KL|^2 ,$$

siis $\angle AKL = 90^\circ$. Seega $\angle CKL = 90^\circ - \angle BKA = \angle BAK$

ning täisnurksed kolmnurgad KCL ja ABK on sarnased. Seega $\dfrac{|CK|}{a} = \dfrac{|KL|}{|AK|} = \dfrac{3}{4}$, kust $|CK| = \dfrac{3}{4}a$ ja $|BK| = a - |CK| = \dfrac{1}{4}a$.
Pythagorase teoreemist täisnurkses kolmnurgas ABK saame nüüd $a^2 + \left(\dfrac{1}{4}a\right)^2 = |AK|^2 = 16$, kust $a = \dfrac{16\sqrt{17}}{17}$.

5. *Vastus:* $x = 9$, $y = 55$; $x = 15$, $y = 13$; $x = 57$, $y = 7$.

Viies kõik liikmed ühele poole ja tegurdades saame

$$0 = (x-8)(y-6) - 6 \cdot 8 - 1$$

ehk $(x-8)(y-6) = 49 = 7^2$. Kui x ja y on positiivsed täisarvud, siis $x - 8$ ja $y - 6$ on täisarvud ning peavad seega olema arvu 7^2 jagajad.
Et 7 on algarv, siis arvu 7^2 jagajad on ± 1, ± 7 ja $\pm 7^2$. Tegurid $x-8$ ja $y-6$ peavad ilmselt olema ühe ja sama märgiga, ning kuna $x-8$ ei ole väiksem kui -7 ja $y-6$ ei ole väiksem kui -5, siis ükski võimalustest $(-1) \cdot (-7^2)$, $(-7) \cdot (-7)$ ja $(-7^2) \cdot (-1)$ ei sobi ning tegurid $x-8$ ja $y-6$ peavad seega mõlemad olema positiivsed. Niisiis jääb järele 3 võimalust:

a) $x - 8 = 1$ ja $y - 6 = 7^2 = 49$, siis $x = 9$ ja $y = 55$;
b) $x - 8 = 7$ ja $y - 6 = 7$, siis $x = 15$ ja $y = 13$;
c) $x - 8 = 7^2 = 49$ ja $y - 6 = 1$, siis $x = 57$ ja $y = 7$.

Märkus. Avaldades ülesandes antud võrdusest y, saame

$$y = \frac{1+6x}{x-8} = 6 + \frac{49}{x-8}\ .$$

Siit näeme, et $x-8$ peab olema arvu $49 = 7^2$ jagaja. Edasi võime jätkata sarnaselt ülaltoodud lahendusega.

6. *Vastus:* a) ei; b) jah.

Paneme tähele, et kirjeldatud sammu tulemusena n-nurga tippude juures olevate nullide arvu paarsus ei muutu. Tõepoolest, kui valitud arvu naabriteks on 0 ja 1, siis nullide arv ei muutu; kui aga valitud arvu naabriteks on 0 ja 0 või 1 ja 1, siis nullide arv vastavalt väheneb või suureneb 2 võrra. Niisiis selleks, et lõpuks saaks alles jääda 0 nulli, peab meil alguses nulle olema paarisarv. Järelikult juhul a) ei ole nõutav teisendus võimalik.

Näitame nüüd, et juhul b) on võimalik kõigi tippude juurde saada arvud 1. Tõepoolest, kui meil on kusagil järjest 4 nulli, siis 2 sammuga saame need muuta ühtedeks:

$$0000 \to 1010 \to 1111\,.$$

Muutes esimesel sammul ainsa 1 naabrid samuti ühtedeks ning edasi rakendades ülaltoodud võtet 500 korda, saamegi 1001 sammuga kõik 2002 nulli muuta ühtedeks.

XII klass

1. *Vastus:* $x = 0$.

   Et $16 = 2^4$, saame teisendada võrrandi kujule $2^{6x} + 2^{8x} = 2^{4x+1}$, ehk $2^{4x} \cdot (2^{2x} + 2^{4x} - 2) = 0$. Et $2^{4x} > 0$ mistahes reaalarvu x korral, siis on see samaväärne võrrandiga $2^{2x} + 2^{4x} - 2 = 0$. Tehes muutuja vahetuse $y = 2^{2x}$, saame y suhtes ruutvõrrandi $y^2 + y - 2 = 0$, mille lahenditeks on $y = 1$ ja $y = -2$. Lahend $y = -2$ ei sobi, kuna 2^{2x} ei saa olla negatiivne, ning $y = 1$ annab $2^{2x} = 1$, kust $x = 0$.

2. *Vastus:* $a = 3,\ b = -\dfrac{3}{2}$ *(vt. märkust lahenduse lõpus!)*.

   Et parabooli puutuja tõusunurk oleks 45°, peab selle puutuja tõus ehk vastava ruutfunktsiooni tuletise väärtus puutepunktis olema $\tan 45^\circ = 1$. Leiame sellest lähtudes kõigepealt puutepunkti koordinaadid. Funktsiooni $y = \dfrac{1}{2}x^2$ tuletis on $y' = \dfrac{1}{2}\cdot 2x = x$, mistõttu puutepunkti x-koordinaat peab olema 1 ning y-koordinaat järelikult $\dfrac{1}{2} \cdot 1^2 = \dfrac{1}{2}$.

   Niisiis on meil vaja leida arvud a ja b, mille korral funktsiooni $y = -x^2 + ax + b$ väärtus kohal $x = 1$ oleks $\dfrac{1}{2}$ ning selle tuletise $y' = -2x + a$ väärtus samal kohal $x = 1$ oleks 1. Võrrandist

$-2 \cdot 1 + a = 1$ leiame $a = 3$ ning asendades selle võrrandisse $-1^2 + a \cdot 1 + b = \frac{1}{2}$ saame $2 + b = \frac{1}{2}$, kust $b = -\frac{3}{2}$.

Märkus. Lahenduses vaadeldakse juhtu, kus neil paraboolidel pole mitte lihtsalt ühine puutuja, vaid nad ka *puutuvad teineteist* (siit saime, et funktsiooni $y = -x^2 + ax + b$ väärtus kohal $x = 1$ peab olema $\frac{1}{2}$). Ülesande tekstist on see tingimus kahjuks välja jäänud, mistõttu tekstis nõutud omadusega on kõik paraboolid, mis on saadud ülaltoodud lahenduses leitud parabooli $y = -x^2 + 3x - \frac{3}{2}$ nihutamisel piki nende paraboolide ühist puutujasirget $y = x - \frac{1}{2}$. Niisugused on paraboolid $(y - t) = -(x - t)^2 + 3(x - t) - \frac{3}{2}$, ehk $y = -x^2 + (3 + 2t)x - \left(\frac{3}{2} + 2t + t^2\right)$, kus t on suvaline reaalarv. Seega võime ülesande tekstile vastava üldise vastuse esitada kujul "$a = 3 + 2t$, $b = -\frac{3}{2} - 2t - t^2$, kus t on suvaline reaalarv" või kujul "reaalarvud a ja b, mis rahuldavad tingimust $a^2 + 4b - 2a + 3 = 0$".

3. *Vastus:* Kõik täisarvud, mis ei jagu 2-ga ega 3-ga.

   Lahendus 1. Lahutame antud avaldise (mis on ruutkolmliige n^2 suhtes) teguriteks:

$$n^4 + n^2 - 2 = (n^2 + 2)(n^2 - 1) = (n^2 + 2)(n + 1)(n - 1) .$$

Kui n on paarisarv, siis tegurid $n + 1$ ja $n - 1$ on paaritud ning $n^2 + 2$ jagub 2-ga, kuid mitte 4-ga. Seega ei jagu nende tegurite korrutis sel juhul 4-ga ega järelikult ka mitte 72-ga.

Kui n jagub 3-ga, siis ükski teguritest $n^2 + 2$, $n + 1$ ja $n - 1$ ei jagu 3-ga. Seega ei jagu nende korrutis sel juhul 3-ga ega järelikult ka mitte 72-ga.

Olgu nüüd n paaritu arv, mis ei jagu 3-ga. Siis n^2 annab 3-ga jagamisel jäägi 1 ja $n^2 + 2$ jagub seega 3-ga, ning üks arvudest $n + 1$ ja $n - 1$ jagub samuti 3-ga. Nende tegurite korrutis jagub järelikult 9-ga. Et $n + 1$ ja $n - 1$ on mõlemad paarisarvud, siis üks neist jagub 4-ga ning nende korrutis jagub 8-ga. Et arvud 8 ja 9 on ühistegurita, siis $n^4 + n^2 - 2$ jagub sel juhul arvuga $8 \cdot 9 = 72$.

Lahendus 2. Kuna $72 = 8 \cdot 9$ ning arvud 8 ja 9 on ühistegurita, siis 72-ga jaguvad need ja ainult need arvud, mis jaguvad nii 8-ga kui ka 9-ga. Uurime nüüd avaldise $n^4 + n^2 - 2$ väärtuse jagamisel 8-ga ja 9-ga tekkivaid jääke.

Kui n on paarisarv, siis n^4 jagub 8-ga ning n^2 annab 8-ga jagamisel jäägi 0 või 4. Seega $n^4 + n^2 - 2$ annab 8-ga jagamisel jäägi 2 või 6 ning järelikult ei jagu 8-ga.

Kui $n = 2k + 1$ on paaritu, siis annab $n^2 = 4(k^2 + k) + 1$ 8-ga jagamisel jäägi 1 (sest $k^2 + k$ on alati paarisarv) ning $n^4 = (n^2)^2$ annab samuti 8-ga jagamisel jäägi 1. Seega $n^4 + n^2 - 2$ jagub 8-ga. Edasi vaatleme kahte alajuhtu.

a) Kui n jagub 3-ga, siis nii n^4 kui ka n^2 jaguvad 3-ga, mistõttu $n^4 + n^2 - 2$ ei jagu 3-ga ega järelikult ka mitte 9-ga.

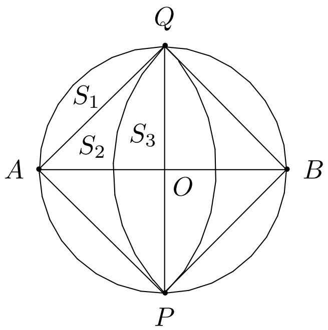
b) Kui n ei jagu 3-ga, siis n^2 annab 9-ga jagades jäägi 1, 4 või 7, mistõttu $n^4 + n^2 = n^2(n^2 + 1)$ annab 9-ga jagades jäägi 2 (tõepoolest, $1 \cdot 2 = 2$, $4 \cdot 5 = 20 = 2 \cdot 9 + 2$ ning $7 \cdot 8 = 56 = 6 \cdot 9 + 2$). Niisiis $n^4 + n^2 - 2$ jagub sel juhul nii 8-ga kui ka 9-ga ning järelikult jagub 72-ga.

4. *Vastus:* 2.

Olgu vaadeldavate kaarte lõikepunktid P ja Q, siis $APBQ$ on ruut ning ringjoone keskpunkt O on ühtlasi selle ruudu diagonaalide AB ja PQ lõikepunktiks (vt. joonist 8). Ringi sektor AOQ jaguneb kolmeks osaks pindaladega S_1, S_2 ja S_3, kusjuures ülesandes nõutud pindala on $S = 4 \cdot (S_1 + S_2)$.

Et $|AB| = 2$, siis $|AO| = |OQ| = 1$ ning $S_1 + S_2 + S_3 = \dfrac{\pi}{4}$ ja $S_2 + S_3 = \dfrac{1 \cdot 1}{2} = \dfrac{1}{2}$, kust $S_1 = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2}$. Pindala S_3 on võrdne poolega sektori PBQ ja kolmnurga PBQ pindalade vahest, s.t. $S_3 = \dfrac{1}{2} \cdot \left(\dfrac{2\pi}{4} - 1\right) = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2}$. Näeme, et $S_1 = S_3$ ning otsitav pindala on seega

$$S = 4 \cdot (S_1 + S_2) = 4 \cdot (S_2 + S_3) = 2\ .$$



Joonis 8

Märkus. Pindalade S_1 ja S_3 võrdsuses võime veenduda ka ilma neid välja arvutamata. Tõepoolest: S_1 on esialgse ringjoone $90°$ kaarele toetuva segmendi pindala, S_3 aga pool sarnase segmendi pindalast ringjoone jaoks, mille keskpunkt on B ning mis läbib punkti P. Niisiis piisab veenduda, et sellise ringjoonega piiratud ringi pindala on kaks korda suurem esialgse ringjoonega piiratud ringi pindalast — see on aga nii, sest selle ringjoone kahe ristuva raadiuse ja nende otspunkte ühendava kõõluga piiratud kolmnurga PBQ pindala on kaks korda suurem esialgse ringjoone jaoks konstrueeritud vastava kolmnurga AOQ pindalast (kolmnurk PBQ koosneb kahest kolmnurgaga AOQ võrdsest kolmnurgast).

5. *Vastus:* 2003.

Lahendus 1. Olgu a nende kolme jada mistahes ühine liige, siis arv $b > a$ on samuti kõigi kolme jada liige siis ja ainult siis, kui vahe $b - a$ jagub iga vaadeldava jada vahega. Kuna antud jadade vahed on vastavalt 11, 13 ja 14, mis on paarikaupa ühistegurita, siis on see samaväärne tingimusega, et vahe $b-a$ jagub nende korrutisega $11 \cdot 13 \cdot 14 = 2002$.

Lisades iga jada algusesse veel ühe liikme (nii, et jadade aritmeetilisus säiliks) näeme, et see täiendav liige on kõigi kolme jada korral 1. Järgmine (ehk ülesandes antud jadade jaoks tegelikult esimene) ühine liige on seega $1 + 2002 = 2003$.

Lahendus 2. Antud aritmeetiliste jadade üldliikmed on vastavalt $12 + 11n$, $14 + 13m$ ja $15 + 14k$. Et otsitav arv a peab sisalduma kõigis kolmes jadas, siis $a = 12 + 11n = 14 + 13m = 15 + 14k$, kus n, m ja k on mingid mittenegatiivsed täisarvud. Võrrandi $12+11n = 14+13m$ võime kirjutada kujul $11(n+1) = 13(m+1)$, ning kuna arvud 11 ja 13 on ühistegurita, siis järeldub siit, et arv $n + 1$ peab jaguma 13-ga. Analoogiliselt saame võrrandi $12 + 11n = 15 + 14k$ kirjutada kujul $11(n + 1) = 14(k + 1)$, ning kuna 11 ja 14 on ühistegurita, siis järeldada, et $n+1$ peab jaguma 14-ga. Kuna ka 13 ja 14 on ühistegurita arvud, siis peab $n+1$ järelikult jaguma nende korrutisega, s.t. arvu n vähimaks võimalikuks väärtuseks on $13 \cdot 14 - 1 = 181$, mis annab $a = 12 + 11 \cdot 181 = 2003$.

6. *Vastus:* kummagi laua taga oli 50 valetajat.

   Paneme tähele, et mistahes küsitletu (olenemata sellest, kas ta ise oli tõerääkija või valetaja) nimetas oma naabrit valetajaks siis ja ainult siis, kui naaber oli temast endast erinevat liiki, s.t. kui tõerääkija naaber oli valetaja või valetaja naaber oli tõerääkija. Järelikult istusid esimese laua taga tegelikult tõerääkijad ja valetajad vaheldumisi, teise laua taga aga istusid kõrvuti kaks tõerääkijat, siis kaks valetajat, seejärel jälle kaks tõerääkijat jne. Järelikult oli kummagi laua taga parajasti 50 tõerääkijat ja 50 valetajat.