XLIX Олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии

МАТЕМАТИКА, РЕГИОНАЛЬНЫЙ ТУР

26 января 2002 г.

X класс

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи дает 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Найти частное $\dfrac{6{,}8888\ldots}{2{,}4444\ldots}$, где делимое и делитель бесконечные периодические десятичные дроби. Результат также представить в виде бесконечной периодической десятичной дроби.

2. Найти все решения системы уравнений (запись $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ обозначает определитель второго порядка):

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} x & 1 \\ 2 & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & y \\ y & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ y & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} x & 1 \\ 2 & x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & y \\ y & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ y & 1 \end{vmatrix} \end{cases}.$$

3. Найдется ли прямоугольный треугольник, длины сторон которого:
   а) одно целое и два рациональных числа, не являющиеся целыми;
   б) два целых и одно рациональное число, не являющееся целым;
   в) одно рациональное и два иррациональных числа;
   г) два рациональных и одно иррациональное число?

   Для каждого подпункта привести пример или обосновать, почему такого треугольника не существует.

4. В остроугольном треугольнике ABC с центром описанной окружности O имеется $\angle ACB = 60°$. Пусть прямая AO пересекает второй раз описанную окружность в точке R и пусть M середина этой дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C. Доказать, что четырехугольник $ROMB$ есть ромб.

5. Длины сторон треугольника целые числа a, b и c, причем $a < b < c$ и $a + b + c = 2002$. Найти наименьшее и наибольшее возможные значения числа b.

6. На клетчатую доску размером 100×100 кладут 99 квадратных плиток, со сторонами $1, 2, 3, \ldots, 99$ так, что стороны плиток расположены на сторонах клеток и ни одна плитка не выходит за границы доски. Доказать, что найдется клетка доски, которая покрыта не менее чем 50 плитками.

XLIX Олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии

МАТЕМАТИКА, РЕГИОНАЛЬНЫЙ ТУР

26 января 2002 г.

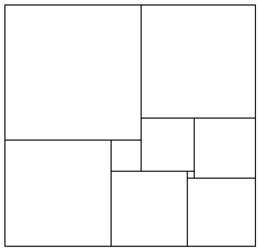
XI класс

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи дает 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Решить уравнение $\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x-1} = \dfrac{x^2-x-2}{x^2+x+2}$.

2. График функции $y = \sqrt{x}$ сдвинули сначала на 3 единицы в отрицательном направлении оси x, а после этого зеркально отразили относительно оси y. График какой функции $y = f(x)$ получили таким образом? Найти область определения и область значений этой функции.

3. Прямоугольник разбивают на 9 квадратов, как показано на рисунке. Зная, что длина стороны наименьшего квадрата равна 1, найти длины сторон остальных квадратов.



4. Высота, опущенная на бедро равнобедренного треугольника, делит бедро в отношении $1:2$. Каково может быть отношение длин бедра и основания в этом треугольнике?

5. Доказать, что при любом положительном целом n число $(n+1)^n - 1$ делится на число n^2.

6. На пиратском корабле находятся 10 пиратов. Похитив ящик с золотыми монетами, они разделили их на 10 кучек, но при пересчете обнаружили, что количество монет в кучках неравное; при этом в кучке капитана было 2002 монеты, а в кучке боцмана — только 100 монет. Пираты решили перераспределить деньги так: тот, у кого в кучке меньше всего монет, берет себе по одной монете из кучек всех остальных пиратов; затем тот, у кого теперь в кучке меньше всего монет, берет по одной монете из кучек всех остальных пиратов и т.д. (если на каком-либо шаге будет более чем один пират с наименьшим количеством монет, то следующим монеты берет старший из них). Может ли случиться, что после некоторого числа таких шагов в кучках у всех пиратов будет равное количество монет?

XLIX Олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии

МАТЕМАТИКА, РЕГИОНАЛЬНЫЙ ТУР

26 января 2002 г.

XII класс

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи дает 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Точки $A(0;1;2)$ и $B(1;0;-2)$ являются концами гипотенузы прямоугольного равнобедренного треугольника. Найти координаты третьей вершины C этого треугольника, если известно, что она лежит на плоскости xy.

2. Для какого положительного действительного числа a параболы, заданные уравнениями $y = 1 - (x-a)^2$ и $y = x^2 - 1$ касаются друг друга? Найти координаты точки касания парабол и угловой коэффициент их общей касательной.

3. Пусть X центр грани $ABCD$ куба $ABCDA'B'C'D'$. Найти косинус угла между отрезками $A'X$ и $B'X$.

4. Найдутся ли такие натуральные числа a, b, c и d, что НОД(a,b), НОД(a,c), НОД(a,d), НОД(b,c), НОД(b,d) и НОД(c,d) взятые в некотором порядке являются последовательными натуральными числами?

5. Рассмотрим последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n \ldots$.
   а) Доказать, что если для каждого $i > 1$ выполняется равенство $\dfrac{a_{i-1} + a_i + a_{i+1}}{3} = a_i$, то эта последовательность арифметическая.
   б) Следует ли из того, что для каждого $i > 2$ выполняется равенство $\dfrac{a_{i-2} + a_{i-1} + a_i + a_{i+1} + a_{i+2}}{5} = a_i$ то, что эта последовательность арифметическая?

6. Юра хочет написать в каждую клетку таблицы 3×3 одно действительное число так, чтобы сумма чисел в каждой строке, каждом столбце и на обеих диагоналях была равна 0. Но его младшая сестра Маша хочет заполнить две клетки по своему желанию. Может ли Юра при любых числах, написанных Машей, все же достичь желаемого результата, заполняя оставшиеся клетки подходящим образом, если:
   а) Маша пишет числа в верхнюю левую и верхнюю правую угловые клетки;
   б) Маша пишет числа в верхнюю левую и нижнюю правую угловые клетки?