Eesti koolinoorte XLIX täppisteaduste olümpiaad

MATEMAATIKA PIIRKONDLIK VOOR

26. jaanuaril 2002. a.

X klass

Lahendamiseks on aega 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Leia jagatis $\dfrac{6{,}8888\ldots}{2{,}4444\ldots}$, kus jagatav ja jagaja on lõpmatud perioodilised kümnendmurrud. Tulemus esita samuti lõpmatu perioodilise kümnendmurruna.

2. Leia võrrandisüsteemi kõik lahendid (kirjutis $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ tähistab kaherealist determinanti):

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} x & 1 \\ 2 & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & y \\ y & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ y & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} x & 1 \\ 2 & x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & y \\ y & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ y & 1 \end{vmatrix} \end{cases}.$$

3. Kas leidub täisnurkne kolmnurk, mille külgede pikkusteks on:
   a) üks täisarv ja kaks ratsionaalarvu, mis ei ole täisarvud;
   b) kaks täisarvu ja üks ratsionaalarv, mis ei ole täisarv;
   c) üks ratsionaalarv ja kaks irratsionaalarvu;
   d) kaks ratsionaalarvu ja üks irratsionaalarv?

   Iga alapunkti kohta too näide või põhjenda, miks niisugust kolmnurka ei leidu.

4. Teravnurkses kolmnurgas ABC ümberringjoone keskpunktiga O on $\angle ACB = 60^\circ$. Lõigaku sirge AO ümberringjoont teistkordselt punktis R ning olgu M ümberringjoone selle kaare AB keskpunkt, mis ei sisalda punkti C. Tõesta, et nelinurk $ROMB$ on romb.

5. Kolmnurga külgede pikkused on täisarvud a, b ja c, kusjuures $a < b < c$ ning $a + b + c = 2002$. Leia arvu b vähim ja suurim võimalik väärtus.

6. Ruudustikule mõõtmetega 100×100 paigutatakse 99 ruudukujulist tahvlit küljepikkustega 1, 2, 3, ..., 99 nii, et tahvlite küljed paiknevad ruudustiku joontel ja ükski tahvel ei ulatu ruudustikust väljapoole. Tõesta, et leidub ruudustiku ruut, mis on kaetud vähemalt 50 tahvliga.

Eesti koolinoorte XLIX täppisteaduste olümpiaad

MATEMAATIKA PIIRKONDLIK VOOR

26. jaanuaril 2002. a.

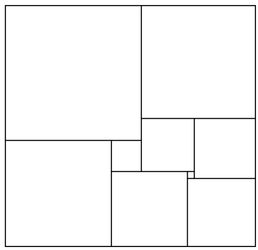
XI klass

Lahendamiseks on aega 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Lahenda võrrand $\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x-1} = \dfrac{x^2-x-2}{x^2+x+2}$.

2. Funktsiooni $y = \sqrt{x}$ graafikut nihutati kõigepealt 3 ühiku võrra x-telje negatiivses suunas ning seejärel peegeldati y-telje suhtes. Millise funktsiooni $y = f(x)$ graafik niiviisi saadi? Leia selle funktsiooni määramis- ja muutumispiirkond.

3. Ristkülik tükeldatakse 9 ruuduks, nagu joonisel näidatud. Teades, et väikseima ruudu küljepikkus on 1, leia ülejäänud ruutude küljepikkused.



4. Võrdhaarse kolmnurga haarale tõmmatud kõrgus jaotab haara suhtes $1:2$. Milline võib olla selle kolmnurga haara ja aluse pikkuste suhe?

5. Tõesta, et iga positiivse täisarvu n korral jagub arv $(n+1)^n - 1$ arvuga n^2.

6. Mereröövlite laeval on 10 piraati. Röövinud kirstu kuldmüntidega, jagasid nad mündid 10 kuhja, kuid ülelugemisel leidsid, et kuhjades pole münte ühepalju; muuhulgas oli kapteni kuhjas 2002 münti, aga pootsmani kuhjas ainult 100 münti. Piraadid otsustasid mündid ümber jagada nii: see, kelle kuhjas on kõige vähem münte, võtab endale ühe mündi iga ülejäänud piraadi kuhjast; seejärel võtab see, kelle kuhjas on nüüd kõige vähem münte, jällegi endale ühe mündi iga ülejäänud piraadi kuhjast, jne. (kui mingil sammul on vähima müntide arvuga piraate rohkem kui üks, võtab järgmisena münte juurde vanim neist). Kas võib juhtuda, et mingi arvu selliste sammude järel on kõigi piraatide kuhjades ühepalju münte?

Eesti koolinoorte XLIX täppisteaduste olümpiaad

MATEMAATIKA PIIRKONDLIK VOOR

26. jaanuaril 2002. a.

XII klass

Lahendamiseks on aega 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Täisnurkse võrdhaarse kolmnurga hüpotenuusi otspunktid on $A(0;1;2)$ ja $B(1;0;-2)$. Leia kolmnurga kolmanda tipu C koordinaadid, kui on teada, et see paikneb xy-tasandil.

2. Millise positiivse reaalarvu a korral võrranditega $y = 1 - (x - a)^2$ ja $y = x^2 - 1$ antud paraboolid puutuvad teineteist? Leia nende paraboolide puutepunkti koordinaadid ja nende ühise puutuja tõus.

3. Olgu X kuubi $ABCDA'B'C'D'$ tahu $ABCD$ keskpunkt. Leia lõikude $A'X$ ja $B'X$ vahelise nurga koosinus.

4. Kas leiduvad sellised naturaalarvud a, b, c ja d, et $\text{SÜT}(a,b)$, $\text{SÜT}(a,c)$, $\text{SÜT}(a,d)$, $\text{SÜT}(b,c)$, $\text{SÜT}(b,d)$ ja $\text{SÜT}(c,d)$ mingis järjekorras võetuna on järjestikused naturaalarvud?

5. Vaatleme jada $a_1, a_2, \ldots, a_n \ldots$.
   a) Tõesta, et kui iga $i > 1$ korral kehtib võrdus $\dfrac{a_{i-1} + a_i + a_{i+1}}{3} = a_i$, siis see jada on aritmeetiline.
   b) Kas sellest, et iga $i > 2$ korral $\dfrac{a_{i-2} + a_{i-1} + a_i + a_{i+1} + a_{i+2}}{5} = a_i$, järeldub, et see jada on aritmeetiline?

6. Juku tahab kirjutada 3×3 ruudustiku igasse ruutu ühe reaalarvu nii, et arvude summa igas reas, igas veerus ja kummalgi diagonaalil oleks 0. Juku väike õde Mari aga tahab täita kaks ruutu oma tahtmist mööda. Kas Juku saab Mari kirjutatud mistahes arvude korral ülejäänud ruute sobivalt täites siiski jõuda soovitud tulemuseni, kui:
   a) Mari kirjutab arvud ülemisse vasakusse ja ülemisse paremasse nurgaruutu;
   b) Mari kirjutab arvud ülemisse vasakusse ja alumisse paremasse nurgaruutu?