Eesti koolinoorte XLIX täppisteaduste olümpiaad

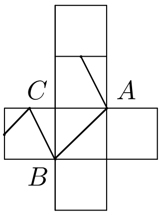
MATEMAATIKA PIIRKONDLIK VOOR

26. jaanuaril 2002. a.

Lahendused ja vastused

VII klass, I osa

1. -9. 2. $-1\frac{1}{2}$. 3. 502. ritta. 4. 12. 5. 13-kohalise. 6. $2\frac{4}{15}$. 7. $15°$. 8. $\frac{3}{4}\pi$. 9. 15 cm. 10. vt. joonist 1.



Joonis 1

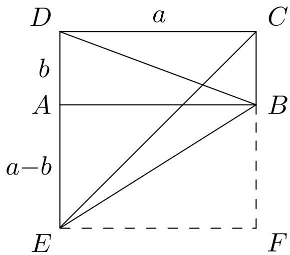
VII klass, II osa

1. *Vastus:* 60 päeva pärast: reedel, 8. märtsil 2002.

   Päevade arv Reinu, Madise ja Ahto ühest kohtumisest raamatukogu internetipunktis järgmiseni on vähim positiivne täisarv, mis jagub arvudega 4, 5 ja 6, s.t. nende arvude vähim ühiskordne $\text{VÜK}\,(4,5,6) = 60$. Et nädalas on 7 päeva, $60 = 8\cdot 7 + 4$ ning poiste eelmine kohtumine toimus esmaspäeval, siis järgmise kohtumise nädalapäev on reede. Et jaanuaris on 31 päeva ning veebruaris 28 päeva (aasta 2002 ei ole liigaasta), siis 7. jaanuarist 7. märtsini on kokku $31 + 28 = 59$ päeva ja 60. päev pärast poiste eelmist kohtumist on seega 8. märts.

2. *Vastus:* $5\ \text{cm}^2$.

Lahendus 1. Valime punkti F nii, et nelinurk $CDEF$ oleks ristkülik (tegelikult isegi ruut, sest $|ED| = |DC|$ — vt. joonist 2). Et kolmnurk EDC pindalaga 8 cm^2 moodustab poole ruudust $CDEF$, siis selle ruudu pindala on 16 cm^2. Et kolmnurk BCD pindalaga 3 cm^2 moodustab poole ristkülikust $ABCD$, siis selle ristküliku pindala on 6 cm^2. Ristküliku $AEFB$ pindala on seega $16 - 6 = 10$ cm^2 ning sellest ristkülikust poole moodustava kolmnurga ABE pindala on 5 cm^2.



Joonis 2

Lahendus 2. Nelinurk $BCDE$ koosneb kolmnurgast EDC, mille pindala on 8 cm^2, ja kolmnurgast EBC, mille pindala on võrdne kolmnurga BCD pindalaga (sest neil on sama alus ja ühine kõrgus), s.t. 3 cm^2. Kokku on nelinurga $BCDE$ pindala seega $8 + 3 = 11$ cm^2. Et kolmnurga ABE pindala saamiseks tuleb nelinurga $BCDE$ pindalast lahutada ristküliku $ABCD$ pindala ehk kahekordne kolmnurga BCD pindala, siis kolmnurga ABE pindala on

$$S_{ABE} = S_{BCDE} - 2S_{BCD} = 11 - 2 \cdot 3 = 5 \text{ cm}^2 .$$

Lahendus 3. Kolmnurkade EDB ja EDC pindalad on võrdsed (sest neil on sama alus ja ühine kõrgus), samuti on võrdsed kolmnurkade ADB ja BCD pindalad. Seega

$$S_{ABE} = S_{EDB} - S_{ADB} = S_{EDC} - S_{BCD} = 8 - 3 = 5 \text{ cm}^2 .$$

Lahendus 4. Et $|ED| = |DC|$ ja kolmnurga EDC pindala on

$$S_{EDC} = \frac{|ED| \cdot |DC|}{2} = 8 \text{ cm}^2 ,$$

siis $|AB| = |ED| = |DC| = 4\,\text{cm}$. Et kolmnurga BCD pindala on

$$S_{BCD} = \frac{|BC| \cdot |DC|}{2} = 3 \text{ cm}^2 ,$$

siis $|AD| = |BC| = 1{,}5$ cm ning $|AE| = |ED| - |AD| = 2{,}5$ cm. Kolmnurga ABE pindala on seega

$$S_{ABE} = \frac{|AB| \cdot |AE|}{2} = \frac{4 \cdot 2{,}5}{2} = 5 \text{ cm}^2 .$$

Lahendus 5. Olgu ristküliku külgede pikkused $|AB| = |DC| = a$ ja $|AD| = |BC| = b$. Et $|ED| = |DC| = a$, siis $|AE| = a - b$. Kuna kolmnurga EDC pindala on $\frac{a^2}{2}$, kolmnurga BCD pindala on $\frac{ab}{2}$ ja kolmnurga ABE pindala on $\frac{a(a-b)}{2} = \frac{a^2}{2} - \frac{ab}{2}$, siis kolmnurga ABE pindala on

$$S_{ABE} = S_{EDC} - S_{BCD} = 8 - 3 = 5 \text{ cm}^2 .$$

3. *Vastus:* punases pakis.

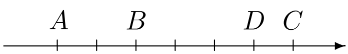
Lahendus 1. Et punases pakis on 10% võrra rohkem küpsiseid kui kollases pakis ja rohelises pakis 20% võrra vähem küpsiseid kui punases pakis ning kollases pakis on 1 kg küpsiseid, siis punases pakis on $1 \cdot \frac{100+10}{100} = 1{,}1$ kg küpsiseid ja rohelises pakis on $1{,}1 \cdot \frac{100-20}{100} = 0{,}88$ kg küpsiseid. Et roheline pakk maksab 12% võrra vähem kollasest pakist ja punane pakk 10% võrra rohkem punasest pakist ning kollane pakk maksab 50 krooni, siis roheline pakk maksab $50 \cdot \frac{100-12}{100} = 44$ krooni ja punane pakk maksab $44 \cdot \frac{100+10}{100} = 48{,}4$ krooni. Ühe kilogrammi küpsiste hind on seega kollases pakis 50 krooni, rohelises pakis $\frac{44}{0{,}88} = 50$ krooni ja punases pakis $\frac{48{,}4}{1{,}1} = 44$ krooni.

Lahendus 2. Punases pakis on 10% võrra rohkem küpsiseid kui

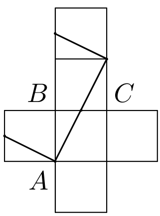
kollases, s.t. punases pakis on $\frac{100+10}{100} = 1{,}1$ korda niipalju küpsiseid kui kollases. Rohelises pakis on 20% võrra vähem küpsiseid kui punases, s.t. rohelises pakis on $\frac{100-20}{100} = 0{,}8$ korda niipalju küpsiseid kui punases, ehk kokku $1{,}1 \cdot 0{,}8 = 0{,}88$ korda niipalju küpsiseid kui kollases. Roheline pakk maksab 12% võrra vähem kui kollane, s.t. rohelise paki hind on $\frac{100-12}{100} = 0{,}88$ korda kollase paki hind. Järelikult rohelise ja kollase paki küpsised on ühesuguse 1 kg hinnaga.
Punase paki hind on 10% võrra kõrgem kui rohelisel pakil, kuid küpsiseid on seal 10% võrra rohkem kui kollases pakis, kus on rohkem küpsiseid kui rohelises pakis. Seega punase paki küpsised on rohelise ja kollase paki küpsistest odavamad.

VIII klass, I osa

1. 2. 2. -1. 3. 333. ritta. 4. 25. 5. 72 on ainus selline arv.
6. vt. joonist 3; sobib ka selle peegelpilt. 7. 20. 8. 17 cm. 9. $\frac{3}{16}a^2$.
10. vt. joonist 4.



Joonis 3



Joonis 4

VIII klass, II osa

1. *Vastus:* 15, 30, 45, 60, 75 ja 90.
   Kolme järjestikuse naturaalarvu summa on

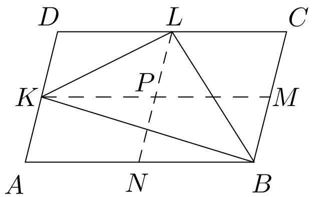
$$(a-1) + a + (a+1) = 3a\ ,$$

kus a on keskmine neist arvudest. Seega naturaalarv avaldub kolme järjestikuse naturaalarvu summana siis ja ainult siis, kui ta jagub 3-ga (välja arvatud arv 0, kui see lugeda naturaalarvuks, või arv 3, kui 0 naturaalarvuks mitte lugeda, sest selle korral pole vähim liidetavatest naturaalarv). Viie järjestikuse naturaalarvu summa on

$$(b-2)+(b-1)+b+(b+1)+(b+2)=5b\,,$$

kus b on keskmine neist arvudest. Seega naturaalarv avaldub viie järjestikuse naturaalarvu summana siis ja ainult siis, kui ta jagub 5-ga (välja arvatud jällegi arv 0 või 5 olenevalt sellest, kas 0 lugeda naturaalarvuks või mitte).

Järelikult avalduvad nii kolme kui ka viie järjestikuse naturaalarvu summana need ja ainult need naturaalarvud, mis jaguvad nii 3-ga kui ka 5-ga, välja arvatud arv 0. Et arvud 3 ja 5 on ühistegurita, siis jaguvad nii 3-ga kui ka 5-ga parajasti need arvud, mis jaguvad 15-ga. Seega otsitavad arvud on 15, 30, 45, 60, 75 ja 90.



Joonis 5

2. *Vastus:* $90\ \mathrm{cm}^2$.

   Olgu M ja N vastavalt rööpküliku külgede BC ja AB keskpunktid ning P lõikude KM ja LN lõikepunkt ehk rööpküliku keskpunkt (vt. joonist 5). Siis kolmnurga ABK pindala on pool rööpküliku $ABMK$ pindalast ehk $\frac{1}{4}$ rööpküliku $ABCD$ pindalast, kolmnurga BCL pindala on pool rööpküliku $BCLN$ pindalast ehk samuti $\frac{1}{4}$ rööpküliku $ABCD$ pindalast ning kolmnurga LDK pindala on pool rööpküliku $LDKP$ pindalast ehk $\frac{1}{8}$ rööpküliku $ABCD$ pindalast. Otsitav kolmnurga BLK pindala on seega

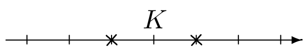
$$S_{BKL} = S_{ABCD} - S_{ABK} - S_{BCL} - S_{LDK} =$$
$$= S_{ABCD} \cdot \left(1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right) = \frac{3}{8} \cdot S_{ABCD} = 90 \text{ cm}^2 .$$

3. *Vastus:* 6.00.

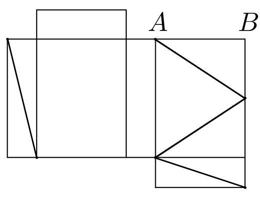
   Et lennuk tõusis linnast A õhku kell 7.00 ja maandus taas linnas A kell 16.30, siis lend linnast A linna B, 3-tunnine peatus linnas B ja tagasilend linnast B linna A kestsid kokku 9 tundi ja 30 minutit, millest mõlema lennu koguaeg moodustas 6 tundi ja 30 minutit. Et lend linnast A linna B kestis 30 minutit vähem kui lend linnast B linna A, siis lend linnast B linna A kestis 3 tundi ja 30 minutit ning lennuk tõusis linnast B õhku kell 13.00 linna A aja järgi. Seega on linna B kohalik aeg 1 tund järel linna A kohalikust ajast ning lennuk tõusis linnast A õhku kell 6.00 linna B aja järgi.

IX klass, I osa

1. 5. 2. $-2\frac{2}{15}$. 3. 252. ritta. 4. 8. 5. 45. 6. vt. joonist 6. 7. 45°. 8. 1440°. 9. $ab - b^2$. 10. vt. joonist 7.



Joonis 6



Joonis 7

IX klass, II osa

1. Olgu võrduse vasak pool A. Viies murrud ühisele nimetajale, saame

$$A = \frac{x(y+z)}{(x-y)(x-z)} + \frac{y(z+x)}{(y-z)(y-x)} + \frac{z(x+y)}{(z-x)(z-y)} =$$

$$= \frac{x(y+z)(y-z)+y(z+x)(z-x)+z(x+y)(x-y)}{(x-y)(x-z)(y-z)} =$$
$$= \frac{x(y^2-z^2)+y(z^2-x^2)+z(x^2-y^2)}{(x-y)(x-z)(y-z)} .$$

Avades nimetajas sulud, saame

$$\begin{aligned}
(x-y)(x-z)(y-z) &= (x^2-xz-yx+yz)(y-z) = \\
&= x^2y-xzy-y^2x+y^2z-x^2z+xz^2+yxz-yz^2 = \\
&= y(x^2-z^2)+x(z^2-y^2)+z(y^2-x^2) = \\
&= -\big(x(y^2-z^2)+y(z^2-x^2)+z(x^2-y^2)\big) ,
\end{aligned}$$

kust $A=-1$.

2. *Vastus:* 45°.

Lahendus 1. Olgu kolmnurga ABC teravnurkade suurused $\angle A=\alpha$ ja $\angle B=\beta$ (vt. joonist 8), siis $\alpha+\beta=90^\circ$. Võrdhaarsest kolmnurgast CAK saame

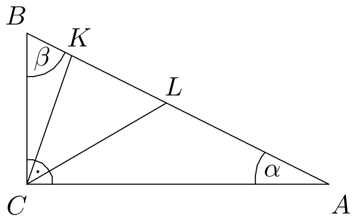
$$\angle AKC = \frac{180^\circ-\alpha}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$$

ning võrdhaarsest kolmnurgast LBC saame

$$\angle BLC = \frac{180^\circ-\beta}{2} = 90^\circ - \frac{\beta}{2} .$$

Kolmnurgast CLK leiame nüüd

$$\angle KCL = 180^\circ - \angle AKC - \angle BLC = \frac{\alpha+\beta}{2} = 45^\circ .$$



Joonis 8

Lahendus 2. Tähistame $x = \angle KCL$, $y = \angle CKL = \angle ACK$ ja $z = \angle KLC = \angle LCB$. Siis nurga ACB suurus on $y + z - x = 90°$ ning kolmnurga CKL sisenurkade summa on $y+z+x = 180°$. Lahutades teisest võrdusest esimese, saame $2x = 90°$, kust $x = 45°$.

3. *Vastus:* a) 33; b) ei leidu.

a) Et kolme järjestikuse naturaalarvu summa on

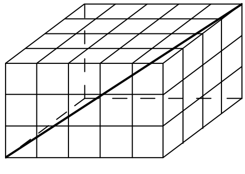
$$(a-1) + a + (a+1) = 3a \ ,$$

kus a on keskmine neist arvudest, siis naturaalarv avaldub kolme järjestikuse naturaalarvu summana siis ja ainult siis, kui ta jagub 3-ga (välja arvatud arv 0, kui see lugeda naturaalarvuks, või arv 3, kui 0 naturaalarvuks mitte lugeda, sest selle korral pole vähim liidetavatest naturaalarv). Naturaalarvu ruut aga jagub 3-ga siis ja ainult siis, kui see arv ise jagub 3-ga. Seega vastavad ülesande tingimustele parajasti kõik 3-ga jaguvad 100-st väiksemad naturaalarvud, välja arvatud arv 0. Selliseid arve on 33.

b) Nelja järjestikuse naturaalarvu summa on

$$(a-1) + a + (a+1) + (a+2) = 4a + 2 \ ,$$

kus a on teine neist arvudest, ning annab seega 4-ga jagades jäägi 2. Mistahes paaritu naturaalarvu ruut aga annab 4-ga jagades jäägi 1 ning mistahes paarisarvu ruut jagub 4-ga — seega ei leidu naturaalarvu, mille ruut esituks nelja järjestikuse naturaalarvu summana.



Joonis 9

4. *Vastus:* 10 kuupi.

Vaatleme risttahukat lõikavaid tasandeid, mis on paralleelsed risttahuka mingi paari vastastahkudega ega lõika ühtki neist kuupidest, millest risttahukas on kokku pandud (vt. joonist 9). Neist tasanditest 4 on risti risttahuka pikkusega 5 servadega (ehk paralleelsed mõõtmetega 3×4 tahkudega), 3 on risti pikkusega 4 servadega ning 2 on risti pikkusega 3 servadega: kokku on neid tasandeid seega $4+3+2=9$. Risttahuka kaht vastastippu ühendav diagonaal läheb ühest kuubist üle teise siis ja ainult siis, kui ta lõikab üht neist 9 tasandist, ning igaüht neist tasandeist lõikab ta täpselt ühe korra. Jääb üle veenduda, et diagonaal ei lõika korraga rohkem kui üht neist tasandeist: kui see oleks nii, siis peaks kehtima üks võrdustest $\frac{a}{b}=\frac{3}{4}$, $\frac{b}{c}=\frac{4}{5}$ ja $\frac{a}{c}=\frac{3}{5}$, kus a, b ja c on positiivsed täisarvud ning $a \leqslant 2$, $b \leqslant 3$ ja $c \leqslant 4$ (arve a, b ja c võib vaadelda kui lõigatavate tasandite järjekorranumbreid vastava tahkude paariga paralleelsete vaadeldavate tasandite hulgas). See ei ole aga võimalik, sest arvud 3, 4 ja 5 on paarikaupa ühistegurita. Niisiis läheb diagonaal ühest kuubist teise üle 9 korral ning läbib seega 10 kuupi.

X klass

1. *Vastus:* 2,818181 . . . .

   Olgu $x = 0{,}4444\ldots$, siis $10x = x + 4$, kust $9x = 4$ ehk $x = \frac{4}{9}$.
   Seega $6{,}8888\ldots = 6 + 2 \cdot \frac{4}{9} = \frac{62}{9}$, $2{,}4444\ldots = 2 + \frac{4}{9} = \frac{22}{9}$ ning otsitav jagatis on $\frac{62}{22} = 2\frac{9}{11}$ ehk lõpmatu perioodilise kümnendmurruna $2{,}818181\ldots$ (perioodi leidmiseks jagame arvu 9 arvuga 11).

2. *Vastus:* $x=3$, $y=0$; $x=3$, $y=-1$; $x=-2$, $y=0$; $x=-2$, $y=-1$.

   Kirjutades determinandid lahti, saame

   $$\begin{cases} (x^2-2)+(1-y^2) = (x+4)+(1+y) \\ (x^2-2)-(1-y^2) = (x+4)-(1+y) \end{cases}.$$

   Liites võrrandite vastavad pooled, saame $2(x^2-2)=2(x+4)$ ehk $x^2-x-6=0$, kust $x=3$ või $x=-2$. Lahutades esimesest võrrandist teise, saame $2(1-y^2)=2(1+y)$ ehk $y^2+y=0$, kust $y=0$ või $y=-1$. Kõik neli saadavat kombinatsiooni x ja y väärtustest rahuldavad ka antud võrrandisüsteemi.

3. *Vastus:* a) jah; b) ei; c) jah; d) jah.

   a) Sobib näiteks kolmnurk küljepikkustega $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$ ja 1 (või mistahes muu kolmnurk, mis on saadud täisarvuliste küljepikkustega täisnurkse kolmnurga homoteetsel vähendamisel nii, et mingi külje pikkuseks saaks 1).

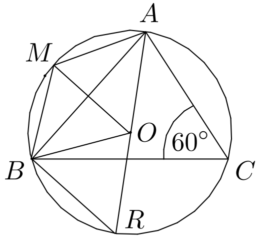
   b) Oletame, et selline kolmnurk leidub: siis selle külgede pikkusteks on mingid täisarvud m ja n ning taandumatu murd $\frac{p}{q}$. Vastavalt Pythagorase teoreemile peab murd $\frac{p^2}{q^2}$ olema võrdne ühega täisarvudest m^2+n^2, m^2-n^2 ja n^2-m^2. See ei ole aga võimalik, sest ka murd $\frac{p^2}{q^2}$ on taandumatu (arvude p^2 ja q^2 mistahes ühine algtegur oleks ka arvude p ja q ühine algtegur).

   c) Sobib näiteks võrdhaarne täisnurkne kolmnurk, mille kaatetid on pikkusega $\sqrt{2}$ ja hüpotenuus pikkusega 2 (või mistahes muu võrdhaarne täisnurkne kolmnurk, mille hüpotenuus on ratsionaalarvulise pikkusega; on ka teistsuguseid sobivaid kolmnurki, nt. küljepikkustega $\sqrt{2}$, $\sqrt{7}$ ja 3 või 1, $\sqrt{2}$ ja $\sqrt{3}$).

   d) Sobib näiteks võrdhaarne täisnurkne kolmnurk, mille kaatetid on pikkusega 1 ja hüpotenuus pikkusega $\sqrt{2}$ (või mistahes selline täisnurkne kolmnurk, mille kaatetite pikkused on täisarvud ja nende ruutude summa pole täisruut; on ka teistsuguseid sobivaid kolmnurki, nt. küljepikkustega 1, $\sqrt{3}$ ja 2).

4. *Lahendus 1.* Kuna $\angle ACB=60^\circ$ ning piirdenurga suurus on pool samale kaarele toetuva kesknurga suurusest, siis $\angle AOB=120^\circ$ (siinjuures on oluline, et punktid O ja C oleksid sirgest AB samal pool — see on nii, kuna ümberringjoone keskpunkt O paikneb kolmnurga ABC sees). Et M on kaare AB keskpunkt, siis lõik OM on nurga AOB poolitaja ning $\angle AOM=\angle MOB=60^\circ$ (vt. joonist 10). Samas $\angle ROB=180^\circ-\angle AOB=60^\circ$. Et $|RO|=|BO|=|MO|$, siis kolmnurgad MOB ja ROB on

võrdkülgsed ja nelinurk $ROMB$ on romb.



Joonis 10

Lahendus 2. Et punktid C ja M on kõõlust AB erineval pool, siis $\angle AMB = 180^\circ - \angle ACB = 120^\circ$. Et M on kaare AB keskpunkt, siis $\angle AMO = \angle BMO = 60^\circ$, ning kuna $|OM| = |OB|$, siis kolmnurk BMO on võrdhaarne 60° alusnurgaga ja seega võrdkülgne. Et teravnurkse kolmnurga ümberringjoone keskpunkt O paikneb kolmnurga sees, siis punktid R ja C on kõõlust AB samal pool ning $\angle ORB = \angle ARB = \angle ACB = 60^\circ$, ning kuna $|OR| = |OB|$, siis kolmnurk BRO on samuti võrdkülgne. Seega nelinurk $ROMB$ on romb.

5. *Vastus:* 502 ja 999.

Et kolmnurgas on mistahes külje pikkus väiksem ülejäänud kahe külje pikkuste summast ning vaadeldava kolmnurga külgede pikkused on täisarvud, siis $c \leqslant a + b - 1$. Kuna $a < b$, siis $a \leqslant b - 1$, mistõttu $c \leqslant a + b - 1 \leqslant 2b - 2$ ning

$$2002 = a + b + c \leqslant (b - 1) + b + (2b - 2) = 4b - 3 \ .$$

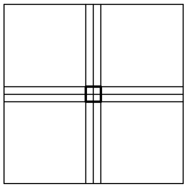
Siit $b \geqslant \dfrac{2005}{4}$ ning täisarvulisuse tõttu $b \geqslant 502$. Väärtus $b = 502$ on tõepoolest võimalik, sest on olemas kolmnurgad küljepikkustega 501, 502 ja 999 ning 500, 502 ja 1000.

Leidmaks b maksimaalset võimalikku väärtust paneme tähele, et $c \geqslant b + 1$ ning kuna $c \leqslant a + b - 1$, siis $a \geqslant c - b + 1 \geqslant 2$. Seega

$$2002 = a + b + c \geqslant 2 + b + (b + 1) = 2b + 2 \ ,$$

kust $b \leqslant \dfrac{1999}{2}$ ning täisarvulisuse tõttu $b \geqslant 999$. Väärtus $b = 999$

on võimalik, sest on olemas kolmnurk küljepikkustega 3, 999 ja 1000.



Joonis 11

6. Vaatleme ruudustiku nelja keskmist ruutu (vt. joonist 11). Igaüks 49 tahvlist, mille küljepikkus on vähemalt 51, katab mistahes paigutuse korral kõik need ruudud; tahvel küljepikkusega 50 aga katab mistahes paigutuse korral vähemalt ühe neist neljast ruudust. See ruut ongi niisiis kaetud vähemalt 50 tahvliga.

XI klass

1. *Vastus:* $x = 0$ või $x = -\dfrac{3}{2}$.

   Teisendades võrrandi kujule

   $$(x^2+1+1)(x^2+x+2) = (x^2-x-1)(x^2-x-2)$$

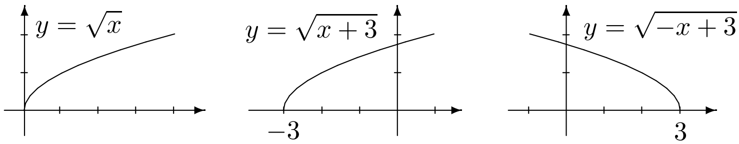
   ning avades sulud, saame

   $$x^4+2x^3+4x^2+3x+2 = x^4-2x^3-2x^2+3x+2\ ,$$

   mis sarnaste liikmete koondamisel annab $4x^3+6x^2 = 0$ ehk $4x^2\left(x+\dfrac{3}{2}\right) = 0$. Selle võrrandi lahenditeks on $x = 0$ ja $x = -\dfrac{3}{2}$, mis ka mõlemad rahuldavad esialgset võrrandit (on vaja kontrollida, et kumbki nimetaja ei võrduks nulliga).

2. *Vastus:* $y = \sqrt{-x+3}$; määramispiirkond on $(-\infty;3]$ ja muutumispiirkond $[0;\infty)$.

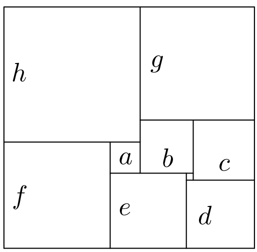
   Funktsiooni $y = f(x)$ graafiku nihutamine a võrra x-telje negatiivses suunas teisendab selle funktsiooni $y = f(x+a)$ graafikuks, peegeldamine y-telje suhtes aga funktsiooni $y = f(-x)$ graafikuks. Seega saame funktsiooni $y = \sqrt{x}$ graafikust nihutamise tulemusena funktsiooni $y = \sqrt{x+3}$ graafiku ning sellest peegeldamisel omakorda funktsiooni $y = \sqrt{-x+3}$ graafiku. See funktsioon on määratud, kui $x \leqslant 3$, s.t. määramispiirkonnaks on $(-\infty; 3]$, ning omandab samuti nagu funktsioon $y = \sqrt{x}$ suvalisi mittenegatiivseid väärtusi, s.t. muutumispiirkonnaks on $[0; \infty)$.



Joonis 12

3. *Vastus:* 4, 7, 8, 9, 10, 14, 15 ja 18.

   Olgu ülejäänud 8 ruudu küljepikkused suuruse järjekorras a, b, c, d, e f, g ja h (vt. joonist 13), siis $c = b + 1$, $d = c + 1$ ja $e = d + 1$, s.t. $e = b + 3$. Et $e + 1 = b + a$, siis $a = (b + 4) - b = 4$. Nüüd $f = e + a = e + 4$ ja $h = f + a = e + 8 = b + 11$ ning $g = b + c = 2b + 1$. Teisalt aga $g + b = h + a$ ehk $3b + 1 = b + 15$, kust $b = 7$ ning $c = b + 1 = 8$, $d = c + 1 = 9$, $e = d + 1 = 10$, $f = e + 4 = 14$, $g = 2b + 1 = 15$ ja $h = f + 4 = 18$.



Joonis 13

4. *Vastus:* $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ või $\sqrt{\dfrac{3}{2}}$.

   Olgu see võrdhaarne kolmnurk ABC tipunurgaga A ning olgu

D tipust B tõmmatud kõrguse aluspunkt haaral AC. Olgu selle kolmnurga aluse pikkus a ja haara pikkus x. Avaldades kõrguse BD ruudu Pythagorase teoreemi põhjal nii kolmnurgas BDA kui ka kolmnurgas BDC, saame

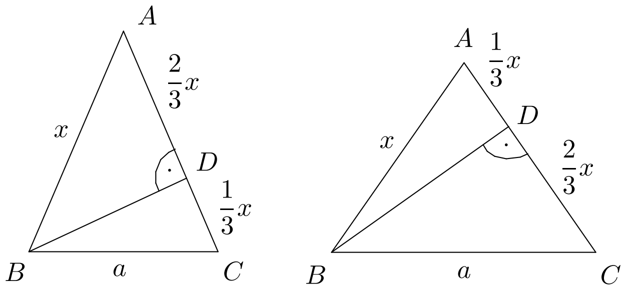
$$x^2 - |AD|^2 = |BD|^2 = a^2 - |DC|^2 ,$$

kust

$$a^2 = x^2 - |AD|^2 + |DC|^2 = x^2 \left(1 - \left(\frac{|AD|}{x}\right)^2 + \left(\frac{|DC|}{x}\right)^2\right)$$

ning

$$\frac{a^2}{x^2} = 1 - \left(\left(\frac{|AD|}{x}\right)^2 - \left(\frac{|DC|}{x}\right)^2\right).$$



Joonis 14

Ülesande tingimuste põhjal avaldiste $\frac{|AD|}{x}$ ja $\frac{|DC|}{x}$ väärtused on $\frac{1}{3}$ ja $\frac{2}{3}$ mingis järjekorras (kaks erinevat võimalust selleks on kujutatud joonisel 14). Nende ruudud on seega $\frac{1}{9}$ ja $\frac{4}{9}$ samas järjekorras ning nende ruutude vahe on $\pm\frac{3}{9} = \pm\frac{1}{3}$. Seega esimese võimalusena $\frac{a^2}{x^2} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$, millest $\frac{x^2}{a^2} = \frac{3}{2}$ ja $\frac{x}{a} = \sqrt{\frac{3}{2}}$, ning teise võimalusena $\dfrac{a^2}{x^2} = 1 + \dfrac{1}{3} = \dfrac{4}{3}$, millest $\dfrac{x^2}{a^2} = \dfrac{3}{4}$ ja $\dfrac{x}{a} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

5. *Lahendus 1.* Rakendades samasust

$$a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots + a + 1)$$

$a = n+1$ korral, saame

$$(n+1)^n - 1 = (n+1-1)\big((n+1)^{n-1} + (n+1)^{n-2} + \ldots + 1\big)\ .$$

Teine tegur koosneb n liidetavast, mis kõik annavad n-ga jagamisel jäägi 1 (kui arv a annab k-ga jagamisel jäägi 1, siis ka selle mistahes positiivse astendajaga aste a^m annab k-ga jagamisel jäägi 1). Seega teine tegur jagub arvuga n ning kogu korrutis jagub arvuga n^2.

Lahendus 2. Rakendades Newtoni binoomvalemit

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n$$

$a = 1$ ja $b = n$ korral ning arvestades, et $\dbinom{n}{1} = n$, saame

$$(n+1)^n - 1 = 1 + n\cdot n + \binom{n}{2}n^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}n^{n-1} + n^n - 1\,,$$

kus paremal pool pärast esimese ja viimase liikme koondamist kõik ülejäänud jaguvad arvuga n^2.

6. *Vastus:* ei.

Igal sammul saab piraat, kelle kuhjas on kõige vähem münte, täpselt 9 münti oma kuhja juurde ning igaüks ülejäänud piraatidest annab oma kuhjast 1 mündi ära. Seega müntide arvude vahe mistahes kahes kuhjas kas muutub täpselt 10 võrra või jääb muutumatuks. Et aga algul oli kapteni kuhjas 2002 ja pootsmani kuhjas 100 münti ning vahe $2002 - 100 = 1992$ ei jagu 10-ga, siis ei saa müntide arvud neis kahes kuhjas kirjeldatud ümberjagamise käigus ka kunagi võrdsustuda.

XII klass

1. *Vastus:* $C(2;2;0)$ või $C(-1;-1;0)$.

   Lahendus 1. Et punkt C paikneb xy-tasandil, siis peab selle z-koordinaat olema 0, s.t. $C(x;y;0)$. Et $A(0;1;2)$ ja $B(1;0;-2)$ ning kaatetid AC ja BC on võrdse pikkusega, siis

   $$(x-0)^2+(y-1)^2+(0-2)^2=(x-1)^2+(y-0)^2+(0-(-2))^2 ,$$

   kust sulge avades ja sarnaseid liikmeid koondades saame $x=y$. Pythagorase teoreemist saame nüüd võrdhaarsust arvestades, et $2\cdot|AC|^2=|AB|^2$ ehk

   $$2\cdot\left((x-0)^2+(y-1)^2+(0-2)^2\right)=$$
   $$=(1-0)^2+(0-1)^2+(-2-2)^2=18 .$$

   Asendades siin $y=x$ saame ruutvõrrandi $4x^2-4x+10=18$ ehk $x^2-x-2=0$, mille lahenditeks on $x=2$ ja $x=-1$.

   Lahendus 2. Samuti nagu eelmises lahenduses paneme kõigepealt tähele, et $C(x;y;0)$. Kolmnurga küljevektorid $\overrightarrow{AC}=(x;y-1;-2)$ ja $\overrightarrow{BC}=(x-1;y;2)$ on võrdse pikkusega ja omavahel risti. Seega

   $$x^2+(y-1)^2+(-2)^2=(x-1)^2+y^2+2^2 ,$$

   kust $x=y$, ning

   $$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=x\cdot(x-1)+(y-1)\cdot y+(-2)\cdot 2=0 .$$

   Võrdust $x=y$ arvestades saame siit ruutvõrrandi $x^2-x-2=0$, mille lahenditeks on $x=2$ ja $x=-1$.

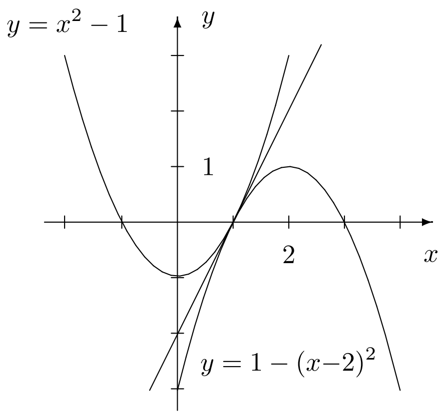
2. *Vastus:* $a=2$, puutepunkt on $(1;0)$ ja paraboolide ühise puutuja tõus selles punktis on 2.

   Lahendus 1. Paraboolid puutuvad teineteist punktis $(x;y)$, kui vastava x korral funktsioonide $y=x^2-1$ ja $y=1-(x-a)^2$ väärtused on võrdsed (s.t. $(x;y)$ on paraboolide ühine punkt) ning ka nende funktsioonide tuletiste väärtused ehk vastavate paraboolide puutujate tõusud selle x korral on võrdsed (s.t. paraboolidele selles punktis tõmmatud puutujad langevad kokku).

Et funktsiooni $y = x^2 - 1$ tuletis on $y' = 2x$ ja funktsiooni $y = 1 - (x-a)^2 = -x^2 + 2ax + 1 - a^2$ tuletis on $y' = -2x + 2a$, siis saame x ja a määramiseks võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} x^2 - 1 = 1 - (x-a)^2 \\ 2x = -2x + 2a \end{cases}.$$

Teisest võrrandist leiame $a = 2x$ ning esimesse võrrandisse asendades saame $x^2 - 1 = 1 - (-x)^2$ ehk $2(x^2 - 1) = 0$, kust $x = \pm 1$. Et otsitav a väärtus peab olema positiivne, siis sobib ainult $x = 1$, mis annab $a = 2$ ja $y = x^2 - 1 = 0$. Seega paraboolide puutepunkti koordinaadid $a = 2$ korral on $(1; 0)$ ning nende ühise puutuja tõus selles punktis on 2 (tuletiste $y' = 2x$ ja $y' = -2x + 2a$ ühine väärtus $x = 1$ korral).



Joonis 15

Lahendus 2. Et parabool $y = x^2 - 1$ avaneb ülespoole ja parabool $y = 1 - (x-a)^2$ avaneb allapoole, siis nad puutuvad teineteist siis ja ainult siis, kui neil on täpselt üks ühine punkt. Seega on vaja leida a väärtused, mille korral ruutvõrrandil

$$x^2 - 1 = 1 - (x-a)^2 \tag{1}$$

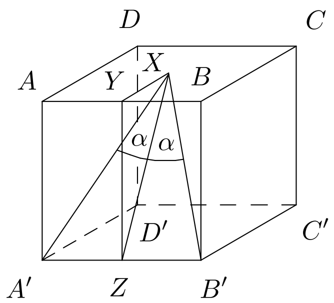
on täpselt üks lahend, s.t. vastav diskriminant on võrdne nulliga.

Teisendades selle võrrandi kujule $2x^2 - 2ax + a^2 - 2 = 0$, leiame

$$D = 4a^2 - 8(a^2 - 2) = 16 - 4a^2$$

ning tingimusest $D = 0$ saame $a = \pm 2$. Et otsitav a väärtus peab olema positiivne, siis sobib ainult $a = 2$.

Asendades nüüd $a = 2$ paraboolide ühist punkti määravasse võrrandisse (1), saame $2x^2 - 4x + 2 = 0$, kust $x = 1$ ning $y = x^2 - 1 = 0$. Seega on paraboolide puutepunkti koordinaadid $(1; 0)$. Paraboolide ühise puutuja tõus selles punktis on võrdne funktsioonide $y = x^2 - 1$ ja $y = 1 - (x - 2)^2$ tuletiste ühise väärtusega kohal $x = 1$. Et funktsiooni $y = x^2 - 1$ tuletis on $y' = 2x$, siis otsitav puutuja tõus on 2.



Joonis 16

3. *Vastus:* $\dfrac{2}{3}$.

Lahendus 1. Olgu Y ja Z vastavalt kuubi servade AB ja $A'B'$ keskpunktid (vt. joonist 16). Üldisust kitsendamata võime eeldada, et kuubi serva pikkus on 2, siis $|A'Z| = |B'Z| = 1$, $|ZY| = 2$ ja $|YX| = 1$. Täisnurksest kolmnurgast XYZ saame

$$|ZX|^2 = |ZY|^2 + |YX|^2 = 4 + 1 = 5$$

ning täisnurksest kolmnurgast $A'ZX$ saame

$$|A'X|^2 = |A'Z|^2 + |ZX|^2 = 1 + 5 = 6\ .$$

Olgu $\angle A'XZ = \angle B'XZ = \alpha$, siis $\angle A'XB' = 2\alpha$ ning

$$\begin{aligned}\cos\angle A'XB' &= \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 2\cdot\frac{|ZX|^2}{|A'X|^2} - 1 = \\ &= 2\cdot\frac{5}{6} - 1 = \frac{2}{3}\,.\end{aligned}$$

Lahendus 2. Üldisust kitsendamata eeldame jälle, et kuubi serva pikkus on 2 ja tahu diagonaali pikkus seega $2\sqrt{2}$. Siis $|AX| = \frac{1}{2}|AC| = \sqrt{2}$ ning täisnurksest kolmnurgast $A'AX$ saame

$$|A'X|^2 = |A'A|^2 + |AX|^2 = 4 + 2 = 6\,.$$

Seega $|A'X| = |B'X| = \sqrt{6}$ ning koosinusteoreemist kolmnurgas $A'XB'$ leiame

$$\cos\angle A'XB' = \frac{|A'X|^2 + |B'X|^2 - |A'B'|^2}{2\cdot|A'X|\cdot|B'X|} = \frac{6+6-4}{12} = \frac{2}{3}\,.$$

4. *Vastus:* ei leidu.

   Mistahes 6 järjestikuse naturaalarvu hulgas on täpselt kaks sellist, mis jaguvad 3-ga. Kui aga arvude a, b, c ja d paarikaupa võetud suurimatest ühisteguritest kaks jaguvad 3-ga, siis peavad arvudest a, b, c ja d vähemalt kolm jaguma 3-ga — üldisust kitsendamata olgu need a, b ja c. Siis aga jaguvad 3-ga ka $\mathrm{SÜT}\,(a,b)$, $\mathrm{SÜT}\,(b,c)$ ja $\mathrm{SÜT}\,(a,c)$, s.t. vähemalt kolm vaadeldavatest suurimatest ühisteguritest — seega ei saa need suurimad ühistegurid olla 6 järjestikust naturaalarvu.

5. *Vastus:* b) ei järeldu.

   a) Ülesandes antud võrdus

   $$\frac{a_{i-1} + a_i + a_{i+1}}{3} = a_i$$

   on samaväärne võrdusega $a_{i-1} - 2a_i + a_{i+1} = 0$, mis omakorda on samaväärne võrdusega

   $$a_i - a_{i-1} = a_{i+1} - a_i\,.$$

Seega jada kahe järjestikuse liikme vahe on konstantne ning see jada on aritmeetiline.

b) Fikseerime jada elemendid a_1, a_2, a_3 ja a_4 suvaliselt. Et võrdus

$$\frac{a_{i-2} + a_{i-1} + a_i + a_{i+1} + a_{i+2}}{5} = a_i$$

on samaväärne võrdusega

$$a_{i+2} = 4a_i - a_{i+1} - a_{i-1} - a_{i-2} \ ,$$

siis saame jada liikmed a_5, a_6, a_7, ... üheselt leida, nii et ülesande tingimus on iga $i > 2$ korral täidetud. Ilmselt võib aritmeetilise jada omadus olla rikutud juba jada esimeste liikmetega (näiteks valides $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ ja $a_4 = 1$).

6. *Vastus:* a) jah; b) ei.

a) Olgu Mari kirjutatud arvud x ja y, siis ülemise rea keskmiseks arvuks peab Juku kirjutama $-x-y$. Edasi võib Juku kirjutada keskmisse ruutu 0, alumisse ritta vasakult paremale vastavalt $-y$, $x+y$ ja $-x$ ning keskmisse ritta vasakule $y-x$ ja paremale $x-y$ (vt. joonist 17). On lihtne kontrollida, et niiviisi ruudustiku ülejäänud ruudud täites on kõik soovitud tingimused tõepoolest täidetud.

x	$-x-y$	y
$y-x$	0	$x-y$
$-y$	$x+y$	$-x$

Joonis 17

a	b	c
d	e	f
g	h	i

Joonis 18

b) Olgu ruudustik nõutaval viisil arvudega täidetud ning olgu ülemises reas vasakult paremale arvud a, b ja c, keskmises reas arvud d, e ja f ning alumises reas arvud g, h ja i (vt. joonist 18). Siis neli võrdust keskmise rea, keskmise veeru ja kummagi diagonaali kohta annavad liitmisel

$$(d+e+f)+(b+e+h)+(a+e+i)+(g+e+c)=0$$

ehk $a+b+c+d+4e+f+g+h+i=0$. Teiselt poolt aga kolm võrdust kolme rea kohta annavad

$$(a+b+c)+(d+e+f)+(g+h+i)=0\ .$$

Neist võrdustest saame $3e=0$, s.t. keskmises ruudus peab olema arv 0 ning vasakusse ülemisse ja paremasse alumisse nurgaruutu peavad seega olema kirjutatud arvud, mille summa on 0. Seega juhul, kui Mari kirjutatavate arvude summa ei ole 0, ei saa Juku ülejäänud ruutudesse arve niiviisi kirjutada, et kõik soovitud tingimused oleksid täidetud.