XLVIII Олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии

МАТЕМАТИКА, РЕГИОНАЛЬНЫЙ ТУР

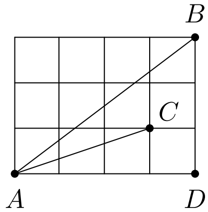
27 января 2001 г.

X класс

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи дает 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Уравнение $\sqrt{x+a}+x+b=0$ имеет действительное решение x. Найти наибольшее возможное значение разности $b-a$.

2. На клетчатой бумаге взяты точки A, B, C и D так, как показано на рисунке. Доказать, что углы BAC и CAD равны.



3. Найти все такие пары положительных целых чисел (a, b), для которых

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{ab}=\frac{2}{5}\,.$$

4. На стороне AB прямоугольника $ABCD$ взяты точки E и F так, что $|AE| = |BF|$ и отрезки CE и DF пересекаются в точке P. Доказать, что площадь треугольника CDP равна сумме площадей треугольников ADE, BCF и EFP.

5. Живущее в Африке племя Абабабов использует алфавит в котором есть только буквы А и Б. Ни одно слово абабабского языка не является началом другого слова. Может ли в абабабском языке быть три четырехбуквенных, десять пятибуквенных, тридцать шестибуквенных и пять семибуквенных слов?

XLVIII Олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии

МАТЕМАТИКА, РЕГИОНАЛЬНЫЙ ТУР

27 января 2001 г.

XI класс

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи дает 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Правительство Республики Кизанеи представило в парламент проект закона, согласно которому отношение зарплаты каждого члена правительства к средней зарплате всех работающих граждан Кизанеи должно равняться семикратному отношению числа работающих граждан Кизанеи к числу членов правительства. Известно, что в Республике Кизанеи N работающих граждан, из которых M являются членами правительства, и средняя зарплата работающих граждан, не входящих в правительство, равна $c > 0$ независимо от того, примут ли новый закон или нет.

   Парламентская оппозиция обещала своим избирателям, что не даст поднять зарплату членов правительства выше средней зарплаты остальных работающих граждан Кизанеи. Должна ли оппозиция препятствовать принятию представленного проекта закона?

2. Пусть a, b и c такие положительные целые числа, что

   $$abc + ab + bc + ca + a + b + c = 2000\,.$$

   Найти все возможные значения суммы $a + b + c$.

3. Пусть D середина стороны AB треугольника ABC, а E такая точка на стороне BC, что $|BE| = 2 \cdot |EC|$, причем $\angle ADC = \angle BAE$. Доказать, что треугольник ABC прямоугольный.

4. Доказать, что среди любых 10 последовательных положительных целых чисел найдется число, являющееся взаимно простым с остальными.

5. Последовательно размещенные на окружности $2n + 1$ точек $A_0, A_1, \ldots, A_{2n}$ делят окружность на равные дуги. Как надо соединить эти точки отрезками, чтобы длина полученной замкнутой ломаной, состоящей из $2n + 1$ звеньев, была максимальной?

XLVIII Олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии

МАТЕМАТИКА, РЕГИОНАЛЬНЫЙ ТУР

27 января 2001 г.

XII класс

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи дает 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Пусть a, b положительные целые числа.
   а) Доказать, что если числа a и b взаимно просты, то числа ab и $a+b$ также взаимно просты.
   б) Выполняется ли обратное утверждение?

2. Обозначим через a_n знакопеременную сумму квадратов чисел $1, 2, 3, \ldots, n$: $a_1 = 1^2$, $a_2 = 1^2 - 2^2$, $a_3 = 1^2 - 2^2 + 3^2$, $a_4 = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2$, и т.д. Доказать, что для любого целого положительного n выполняется равенство

$$|a_n| = 1 + 2 + 3 + \ldots + n \,.$$

3. На прямой, проведенной перпендикулярно отрезку AB через его внутреннюю точку C, взяты лежащие по одну сторону от отрезка AB точки D и E так, что $|AC| = |DC|$ и $|BC| = |EC|$. Пусть P, Q, R и S середины отрезков AB, BE, DE и AD соответственно. Доказать, что четырехугольник $PQRS$ квадрат.

4. Произведение действительных чисел a, b и c равно 1 и сумма этих чисел равна сумме их обратных чисел. Доказать, что по крайней мере одно из чисел a, b и c равно 1.

5. Найти наименьшее значение n, при котором возможно покрыть квадрат $n \times n$ доминошками размера 1×2 так, что любая прямая, делящая этот квадрат на две части, делит на две части хотя бы одну доминошку.